УДК 519.21

Ю. П. ФИЛОНОВ, канд. физ.-мат. наук
Киевский инженерно-строительный институт

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ ЦЕНТРИРОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ НЕВОЗВРАТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Пусть S_n, $n = 0, 1, \ldots$ — однородная невозвратная марковская цепь со счетным множеством состояний E. Для любого $x \in E$ f_x есть последовательность случайных величин (с. в.) $f_x(1), f_x(2), \ldots$ (f_x по x одинаково распределены, независимы и не зависят от цепи S_n); $r_{x,n}$ — вероятность возвращения цепи S_n, $n \geqslant 0$, $S_0 = x$ в состояние x на промежутке времени $[0, n-1]$ ($r_{x,\infty} = r_x$).

Будем считать, что $r = \sup\limits_x r_x < 1$. Основной результат, доказываемый в работе, состоит в следующем.

Теорема 1. Если $\mathbf{M}f_x(k) = 0$, $k > 0$, $r_{x,n} \to r_x$ $(n \to \infty)$ равномерно по x, r_{S_n} по вероятности сходится к некоторой с. в. r_∞ (также при $n \to \infty$), для любого $p \geqslant 1$ $\sum_k [\mathbf{M}|f_x(k)|^p]\, r^k < \infty$, то

$$P\left\{n^{-1/2}\sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\eta_{i,n}) < x\right\} \to$$

$$\to \int_{-\infty}^{x} dy \int_0^r [2\pi D(t)]^{-1/2} \exp\left\{-y^2(2D(t))^{-1}\right\} d\Phi(t) \qquad (n \to \infty),$$

где $\eta_{i,n}$ — число попаданий цепи S_n, $n \geqslant 0$ в состояние S_i на промежутке времени $[0, n-1]$, $D(t) = (1-t)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathbf{M} f_x^2(k)\, t^{k-1}$, $\Phi(t)$ — функция распределения с. в. r_∞.

Аналогичные утверждения справедливы для функционалов $\sum_x f_x(\theta_{x,n})$ и $\sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\nu_{i,n})$ ($\theta_{i,n}$ и $\nu_{i,n}$ — соответственно количества попаданий цепи в состояния x и S_i на промежутках времени $[0, n-1]$ и $[i, n-1]$), которые можно свести к функционалу $\sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\eta_{i,n})$. Формулировка этих результатов есть в работе [1].

Пусть $\theta_i = f_{S_i}(\eta_{i,n})$. Основную часть доказательства составит нахождение пределов моментов с. в. $n^{-1/2} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i$ для определения предельного распределения.

Предварительно докажем некоторые леммы. Запишем выражение

$$n^{-1}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_m=0}^{n-1}|\theta_{j_1}\ldots\theta_{j_m}|\chi\{S_{j_1}=\ldots=S_{j_m}\} \tag{1}$$

($\chi\{A\}$ — индикатор события A).

Лемма 1. Выражение (1) при $n\to\infty$ сходится по вероятности и в среднем порядка p при любом $p\geqslant 1$. В частности, при $m=2$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j_1,j_2=0}^{n-1}|\theta_{j_1}\theta_{j_2}|\chi\{S_{j_1}=S_{j_2}\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{j_1,j_2=0}^{n-1}\theta_{j_1}^2\chi\{S_{j_1}=S_{j_2}\}=(1-r_\infty)^2\sum_k k^2[\mathbf{M}f_x^2(k)]\,r_\infty^{k-1}. \tag{2}$$

Предел в (2) обозначим R.

Доказательство. Выражение (1) представим в виде

$$n^{-1}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}|\theta_{j_1}|^m\chi\{S_{j_1}=\ldots=S_{j_m}\}=n^{-1}\sum_{j_1=0}^{n-1}|\theta_{j_1}|^m\eta_{j_1,n}^{m-1}.$$

По теореме 2[1] в условиях теоремы 1 (исключая требование $\mathbf{M}f_x(k)=0$)

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}f_{S_i}(\eta_{i,n})=(1-r_\infty)^2\sum_k k[\mathbf{M}f_x(k)]\,r_\infty^{k-1}$$

(по вероятности и в среднем любого порядка). Если в приведенном пределе заменить функцию $f_x(k)$ функцией $k^{m-1}|f_x(k)|^m$, то получится доказательство леммы.

Пусть A — множество разбиений множества $\{1, 2, \ldots, l\}$ на непересекающиеся подмножества; $Q_1, \ldots, Q_s$ — непересекающиеся подмножества разбиения для данного $a\in A$ $(Q_i\in a)$; $|Q_i|$ — число элементов в Q_i; $A_1=\{a\in A:|Q_i|=1$ для некоторого $Q_i\in a\}$; $\chi_a(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ — индикатор события, состоящего в том, что $S_{j_i}=S_{j_k}$ при i и k, принадлежащих одному подмножеству разбиения a, и $S_{j_i}\neq S_{j_k}$ при i и k, принадлежащих разным подмножествам разбиения a.

Лемма 2. $\mathbf{M}\theta_{j_1}\theta_{j_2}\ldots\theta_{j_l}\chi_a(j_1, \ldots, j_l)=0$ при $a\in A_1$ и любых натуральных $j_1, \ldots, j_l$.

Доказательство. Достаточно установить равенство нулю математического ожидания при условии, что известна траектория $S_0, S_1, \ldots$. При фиксированных S_n, $n\geqslant 0$ или $\chi_a(j_1, \ldots, j_l)=0$, или существует i такое, что $S_{j_i}\neq S_{j_k}$ при $k\neq i$ (поскольку $a\in A_1$). Если $\chi_a=0$, то доказательство тривиально. В противном случае лемма 2 следует из того, что θ_{j_i} $(=f_{S_{j_i}}(\eta_{j_i,n}))$ условно не зависит от $\{\theta_{j_k}\}_{k\neq i}$ и $\mathbf{M}\theta_{j_i}=0$ (согласно равенству $\mathbf{M}f_x(k)=0$).

Введем определения: $A_2=\{a\in A:|Q_i|=2,\ i=1, \ldots, s\}$, $A_3=A\diagdown(A_1+A_2)$; $\chi_a'(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ — индикатор события, состоящего в том, что $S_{j_l} = S_{j'_k}$ при i и k, принадлежащих одному подмножеству разбиения a.

Лемма 3. I. $\chi_a(j_1, \ldots, j_l) \leqslant \chi'_a(j_1, \ldots, j_l) = \chi\{S_{j_i} = \text{const}, \ i \in Q_1\} \times \times \chi\{S_{j_i} = \text{const}, \ i \in Q_2\} \ldots \chi\{S_{j_i} = \text{const}, \ i \in Q_s\}$.

II. $0 \leqslant \chi'_d(j_1, \ldots, j_l) - \chi_d(j_1, \ldots, j_l) \leqslant \sum_{a \in A_3} \chi_a(j_1, \ldots, j_l) \quad (d \in A_2)$.

Утверждение очевидно.

Перейдем к доказательству теоремы. Можно записать

$$\mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i\right)^l = \mathbf{M} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l} = \mathbf{M} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l} \times$$

$$\times \sum_{a \in A} \chi_a(j_1, \ldots, j_l) = \mathbf{M}\left(\sum_{a \in A_1} + \sum_{a \in A_2} + \sum_{a \in A_3}\right) \times$$

$$\times \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_l = 0}^{n-1} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l} \chi_a(j_1, \ldots, j_l).$$

Используя леммы 2 и 3. II, получаем

$$\left|\mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \theta_i\right)^l - \sum_{a \in A_2} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l} \chi'_a(j_1, \ldots, j_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\mathbf{M} \sum_{a \in A_1} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l} \chi_a(j_1, \ldots, j_l)\right| +$$

$$+ \left|\mathbf{M} \sum_{a \in A_2} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l} (\chi_a(j_1, \ldots, j_l) - \chi'_a(j_1, \ldots, j_l))\right| +$$

$$+ \left|\mathbf{M} \sum_{a \in A_3} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l} \chi_a(j_1, \ldots, j_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M} \sum_{a \in A_2} \sum_{\bar{a} \in A_3} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} |\theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l}| \chi_{\bar{a}}(j_1, \ldots, j_l) +$$

$$+ \mathbf{M} \sum_{a \in A_3} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} |\theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l}| \chi_a(j_1, \ldots, j_l). \qquad (3)$$

Докажем, что правая часть неравенства (3) есть $o(n^{l/2})$ при $n \to \infty$. Поскольку число элементов множества A конечно и не зависит от n, то достаточно для фиксированного $a \in A_3$ доказать

$$\mathbf{M} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} |\theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l}| \chi_a(j_1, \ldots, j_l) = o(n^{l/2}) \quad (n \to \infty)$$

или (согласно лемме 3.I)

$$\mathbf{M} \sum_{j_1, \ldots, j_l = 0}^{n-1} |\theta_{j_1} \ldots \theta_{j_l}| n^{-1} \chi\{S_{j_i} = \text{const}, \ i \in Q_1\} \ldots$$

$$\ldots n^{-1} \chi\{S_{j_i} = \text{const}, \ i \in Q_s\}\Big] = (n^{\frac{l}{2} - s}). \qquad (4)$$

Сумма в левой части равенства (4) равна произведению сумм вида (1) соответственно с $m = |Q_1|, |Q_2|, \ldots, |Q_s|$. Применяя лемму 1, устанавливаем, что левая часть в (4) при $n \to \infty$ сходится. Равенство (4) справедливо, поскольку $l > 2s$ (для $a \in A_3$). Теперь можно утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} (n^{-1/2}\Sigma_{i=0}^{n-1}\theta_i)^l = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\Sigma_{a\in A_2}\Sigma_{j_1,\ldots,j_l=0}^{n-1}\theta_{j_1} \ldots$$
$$\ldots \theta_{j_l} n^{-l/2}\chi_a' (j_1, \ldots, j_l). \tag{5}$$

Так как элементы A_2 есть разбиения множества $\{1, 2, \ldots, l\}$ на пары, то $A_2 = \varnothing$ при нечетном l и предел в (5) равен 0. Пусть l четно. Заменяя χ_a' произведением (по лемме 3.1), представим внутреннюю сумму в правой части равенства (5) в виде произведения $l/2$ сумм вида (1) (при $m = 2$). Все эти $l/2$ сумм одинаковы, поэтому на основании леммы 1 получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} (n^{-1/2}\Sigma_{i=0}^{n-1}\theta_i)^l = \Sigma_{a\in A_2}\mathbf{M}R^{l/2} = (l-1)!!\,\mathbf{M}R^{l/2} \tag{6}$$

($(l-1)!!$ — количество элементов множества A_2, т. е. число разбиений множества $\{1, 2, \ldots, l\}$ на пары).

Пусть $p(x, d)$ — плотность нормального распределения со средним 0 и дисперсией d. Четные моменты нормального распределения равны $(l-1)!!d^{l/2}$, а нечетные — 0. Очевидно, что случайная величина с плотностью $\mathbf{M}p(x, R)$ имеет четные моменты (6) и нечетные — 0.

По методу моментов, чтобы доказать, что с. в. $n^{-1/2}\Sigma_{i=0}^{n-1}\theta_i$ по распределению сходится к с. в. с плотностью $\mathbf{M}p(x, d)$, достаточно установить единственность распределения с моментами (6). Единственность следует из условия Карлемана $\Sigma_{k=1}^{\infty}(m_{2k})^{-1/2k} = \infty$ (m_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$ — четные моменты с. в.), которое проверяется применением формулы Стирлинга к моментам (6) с учетом ограниченности R. Доказательство закончено.

Замечание 1. Если величина r_∞ не случайна, например, граница цепи состоит из одной точки (r_∞ инвариантна) или цепь является случайным блужданием (т. е. однородна по пространству состояний E, которое есть абелева группа), то предельное распределение функционала нормально.

В теореме 1 условия налагаются на поведение величин $r_{x,n}$ и r_{s_n}. Далее будет получено одно достаточное условие, выраженное через переходные вероятности цепи, при котором поведение величин $r_{x,n}$ и r_{s_n} удовлетворяет требованиям теоремы 1. Получение такого признака желательно потому, что марковская цепь обычно задается переходными вероятностями.

Пусть P — переходная матрица цепи S_n, $n \geqslant 0$; $P = \|P(x, y)\|_{x, y\in E}$, $P(x, y)$ — переходные вероятности; π_x — распределение скачка P-цепи (т. е. цепи с переходной матрицей P) в точке x (т. е. $\pi_x(k) = P(x, x+k)$, E — абелева группа).

Лемма 4. Если для P-цепи S_n при любом k $\pi_x(k)$ сходится когда $x\to\infty$ (т. е. когда x со временем покидает любое конечное подмножество E) к некоторому пределу $\pi(k)$ $(\Sigma_k\pi(k)=1)$, то для любой ограниченной функции Φ (от m переменных) $M^x\Phi(S_1-x, S_2-x, \ldots, S_m-x)\to M'\Phi(S_1, \ldots, S_m)$ при $x\to\infty$, где M^x (соответственно M') — математическое ожидание по вероятностной мере, индуцированной на пространстве траекторий в E P-цепью S_n (случайным блужданием с распределением скачка π) с начальным состоянием в x (соответственно в 0); S_n, $n=0, 1, \ldots$ — траектория в E.

Доказательство. Для любого конечного множества $A\subset E$

$$\mathbf{M}^x\{\Phi(S_1-x, \ldots, S_m-x): S_i-x\in A,\ i=1, \ldots, m\}\to$$
$$\to\mathbf{M}'\{\Phi(S_1, \ldots, S_m): S_i\in A,\ i=1, \ldots, m\},$$

поскольку математическое ожидание в данном случае представляется многочленом от переходных вероятностей и можно непосредственно переходить к пределу. Лемма будет доказана, если показать $\mathbf{M}^x\{\Phi(S_1-x, S_2-x, \ldots, S_m-x): S_i-x\in A^c$ для некоторого $i\in\{1, 2, \ldots, m\}\}\to 0$ при $A\uparrow E$ $(A^c=E\setminus A$, A пробегает все конечные подмножества E, упорядоченные по включению) равномерно по x. Так как Φ ограничена, то нужно доказать $P^x\{S_i-x\in A^c$ для некоторого $i\leqslant m\}\to 0$ $(A\uparrow E)$ равномерно по x. Имеем $P^x\{S_i-x\in A^c$ для некоторого $i\leqslant m\}\leqslant\Sigma_{l\leqslant m}P^x\{S_l-S_{l-1}\in B^c\}$, если A и B таковы, что $B_1+\ldots+B_l\subset A$, $l\leqslant m$, $B_i=B$. Так как $P^x\{S_i-S_{i-1}\in B^c\}\leqslant\sup\limits_x P^x\{S_1-x\in B^c\}$, то докажем $P^x\{S_1-x\in B^c\}\to 0$ $(B\uparrow E)$ равномерно по x. Для любого $\varepsilon>0$ существует конечное множество D такое, что $\Sigma_{k\in D}\pi(k)>1-\varepsilon$. Тогда из сходимости $P(x, x+k)$ при $x\to\infty$ следует существование конечного множества N такого, что $\Sigma_{k\in D}P(x, x+k)>1-2\varepsilon$ $(x\in N^c)$. При некотором конечном $B\supset D$ $\Sigma_{k\in B}P(x, x+k)>1-2\varepsilon$ $(x\in E)$. Получаем

$$P^x\{S_1-x\in B^c\}=\Sigma_{x\in B^c}P(x, x+k)<2\varepsilon\quad(x\in E).$$

Произвольность ε доказывает лемму.

Распределение вероятностей π на E назовем невозвратным с параметром r_π, если случайное блуждание с распределением π скачка невозвратно с вероятностью возвращения $r_\pi<1$. Расстоянием между распределениями α и β на E назовем величину $\|\alpha-\beta\|=\Sigma_{x\in E}|\alpha(x)-\beta(x)|$. (Существует множество признаков невозвратности в терминах распределения π [2]).

Теорема 2. Пусть распределение π_x скачков P-цепи при $x\to\infty$ достаточно быстро сходится к некоторому предельному невозвратному распределению π с параметром r_π, а именно: $\Sigma_x\|\pi_x-$

$-\pi \| < \infty$. Тогда P-цепь невозвратна, $\sup_x r_x < 1$, $r_{S_n} \to r_\pi$ почти наверное $(n \to \infty)$, $r_{x,n} \to r_x$ при $n \to \infty$ равномерно по x.

Доказательство. Случайное блуждание с распределением скачка π назовем P'-цепью. Для P и P'-цепей применяем следствие 1 теоремы 2 из работы [3], которое утверждает, что $G(x, x) \to G'(0, 0)$ $(x \to \infty)$ ($G(x, x)$ — среднее число возвращений в x для P-цепи, $G'(0, 0)$ — среднее число возвращений в 0 для P'-цепи). Так как $G(x, x) = (1 - r_x)^{-1}$, $G'(0, 0) = (1 - r_\pi)^{-1}$, то P-цепь невозвратна и

$$r_x \to r_\pi \quad (x \to \infty). \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\sup_x r_x < 1$, $r_{S_n} \to r_\pi (n \to \infty)$ почти наверное (поскольку для невозвратной цепи $S_n \to \infty$ почти наверное). Пусть $r'_{x,n}$ — вероятность возвращения P'-цепи в точку x на промежутке времени $[0, n-1]$, если начальным состоянием было x. Так как P'-цепь есть блуждание, то $r'_{x,n} = r'_n$ (не зависит от x). Применяя лемму 4, находим, что при любом n

$$r_{x,n} \to r'_n \quad (x \to \infty). \tag{8}$$

Поскольку $r'_n \to r_\pi (n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, такое, что $\varepsilon > | r'_n - r_\pi |$ при $n \geqslant N$. Из соотношений (7) и (8) следует существование таких конечных множеств A_1 и A_2, что $| r_x - r_\pi | < \varepsilon$ $(x \in A_1^c)$ и $| r_{x,N} - r'_N | < \varepsilon$ $(x \in A_2^c)$. Тогда при $n \geqslant N$ $| r_{x,n} - r_x | \leqslant | r_{x,N} - r_x | \leqslant | r_{x,N} - r'_N | + | r'_N - r_\pi | + | r_\pi - r_x | < 3\varepsilon$. Поскольку число точек множества $A_1 \cup A_2$ конечно и $r_{x,n} \uparrow r_x$ $(n \to \infty)$, монотонно возрастая (при любом x), то существует $N' > N$ такое, что $| r_{x,n} - r_x | < 3\varepsilon$ при $n > N'$ и всех x. Таким образом, $r_{x,d} \to r_x$ $(n \to \infty)$ равномерно по x. Теорема доказана.

Результаты, аналогичные теореме 2, можно получить, используя другие утверждения работы [3].

1. *Филонов Ю. П.* Предельные теоремы для функционалов от невозвратной марковской цепи.— В сб.: Математический анализ и теория вероятностей. Киев, 1978. 2. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М., 1969. 3. *Филонов Ю. П.* Устойчивость свойств возвратности и невозвратности марковских цепей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 19.

Поступила в редколлегию 09.04.79

Yu. P. Filonov

LIMIT DISTRIBUTION FOR CENTERED FUNCTIONAL FOR A TRANSIENT MARKOV'S-CHAIN

A theorem about limit distribution $n^{-1/2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\eta_{i,n})$ $(n \to \infty)$ is proved (S_n, $n = 0, 1, \ldots$ is homogeneous Markov's chain; $f_x = (f_x(1), f_x(2), \ldots)$ are independent identically distributed random sequences, independent from S_n, $n \geqslant 0$; $\eta_{i,n} = \text{card}\{k : S_k = S_i, k < n\}$).