УДК 519.21

В. В. АНИСИМОВ, д-р физ.-мат. наук,
В. Н. СИТЮК, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

О СХОДИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА К ПРОЦЕССУ С НЕЗАВИСИМЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ, УПРАВЛЯЕМОМУ НЕОДНОРОДНЫМ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

В работах [1—4] были развиты разные подходы к изучению асимптотического укрупнения состояний случайных процессов. В настоящей статье изучается сходимость неоднородной цепи Маркова, зависящей от малого параметра ε, к процессу с независимыми значениями, заданному на предельном укрупненном неоднородном марковском процессе, и исследуется совместная сходимость неоднородной цепи Маркова с расщепляющимся множеством состояний и построенного по ней укрупненного процесса к некоторому двумерному марковскому процессу.

Прежде сформулируем вспомогательное утверждение, обобщающее результат работы [5]. Пусть $y_\varepsilon(t)$ — пуассоновский процесс, заданный на цепи Маркова $x_\varepsilon(t)$ со множеством состояний $X = (1, \ldots, m)$, $m < \infty$ так, что $\{x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\}$ является марковским процессом, однородным по второй компоненте [6] и таким, что его вероятности переходов за малый промежуток времени Δ имеют вид

$$(i, k) \xrightarrow{(t, t+\Delta)} \begin{cases} (i, k+1) \text{ с вероятностью } b_k(\varepsilon, t)\Delta + o(\Delta), \\ (j, k) \text{ с вероятностью } q_{ij}(\varepsilon)\Delta + o(\Delta). \end{cases}$$

Предположим, что для элементов матрицы $Q(\varepsilon) = \| q_{ij}(\varepsilon) \|$ выполнено условие

$$\mathrm{A}: \lim_{\varepsilon \to 0} q_{ij}(\varepsilon) = q_{ij}, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

При этом цепь Маркова $x_0(t)$ с инфинитезимальной матрицей $Q = \| q_{ij} \|$ неприводима.

Теорема 1. Пусть выполнено условие А, а также условия:

1) существует такая последовательность $\beta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, что для любого $T > 0$ $\sup\limits_{0 \le u \le \beta_\varepsilon^{-1} T} \max\limits_{k \in X} b_k(\varepsilon, u) < \infty$;

$$2) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\beta_\varepsilon^{-1} t} b_k(\varepsilon, u)\, du = B_k(t) < \infty, \quad k \in X;$$

3) равномерно по $t < T$ для любых $H, T > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\beta_\varepsilon^{-1} t}^{\beta_\varepsilon^{-1} t + H} b_k(\varepsilon, u)\, du = 0, \quad k \in X.$$

Тогда независимо от начального состояния цепи $x_\varepsilon(t)$ конечномерные распределения процесса $y_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1} t)$ слабо сходятся почти для всех $t \geqslant 0$ к распределениям неоднородного пуассоновского процесса $y_0(t)$ с ведущей функцией $\Lambda(t) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k B_k(t)$, где π_k, $k = \overline{1, m}$ — стационарное распределение цепи $x_0(t)$.

Доказательство. Пусть $V(\beta_\varepsilon^{-1} t, \Theta)$ — матрица m-го порядка с элементами $v_{kj}^{\beta_\varepsilon^{-1} t}(\Theta) = M[\exp\{-\Theta y_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1} t)\} \chi(x_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1} t) = j / x_\varepsilon(0) = k]$, где Θ — числовой параметр. По аналогии с работой [6] для $V(t, \Theta)$ нетрудно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
V(t, \Theta) &= \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \left[E + \frac{t}{n} (Q(\varepsilon) + B(\varepsilon, u_i)) + o\left(\frac{t}{n}\right) \right] = \\
&= \exp\{Q(\varepsilon) t\} + \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(E + Q(\varepsilon) \frac{t}{n}\right)^{i-1} B(\varepsilon, u_i) \frac{t}{n} \times \right. \\
&\left. \times \left(E + Q(\varepsilon) \frac{t}{n}\right)^{n-i} \right] + \ldots + \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant n} \left(E + Q(\varepsilon) \frac{t}{n}\right)^{j_1 - 1} \times \right. \\
&\times B(\varepsilon, u_{j_1}) \frac{t}{n} \left(E + Q(\varepsilon) \frac{t}{n}\right)^{j_2 - j_1 - 1} \ldots B(\varepsilon, u_{j_r}) \frac{t}{n} \times \\
&\left. \times \left(E + Q(\varepsilon) \frac{t}{n}\right)^{n - j_r} \right] + \ldots,
\end{aligned} \tag{1}$$

где E — единичная матрица, $B(\varepsilon, u)$ — диагональная матрица с элементами на диагонали вида $b_k(\varepsilon, u)(\exp\{-\Theta\} - 1)$, $k = \overline{1, m}$. Отметим, что переход в (1) к пределу по $n \to \infty$ в каждом слагаемом справедлив в силу того, что

$$|V(t, \Theta)| \leqslant \exp\left\{m^2 \sum_{i=1}^{n} b(\varepsilon, u_i) \frac{t}{n}\right\} I \xrightarrow[n \to \infty]{} \exp\left\{m^2 \int_0^t b(\varepsilon, u)\, du\right\} I,$$

т. е. $V(t, \Theta)$ мажорируется равномерно сходящимся по n рядом (здесь I — матрица m-го порядка, у которой все элементы равны 1, а $b(\varepsilon, u) = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} | b_k(\varepsilon, u)(\exp\{-\Theta\} - 1)|$).

Таким образом, обозначая через Π матрицу стационарных вероятностей для цепи $x_0(t)$, переходя к пределу в (1) по $n \to \infty$, получаем

$$V(\beta_\varepsilon^{-1}t, \Theta) = e^{Q(\varepsilon)\frac{t}{\beta_\varepsilon}} + \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} e^{Q(\varepsilon)u_1} B(\varepsilon, u_1)\, e^{Q(\varepsilon)\left(\frac{t}{\beta_\varepsilon} - u_1\right)} du_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} e^{Q(\varepsilon)u_1} B(\varepsilon, u_1)\, du_1 \ldots \int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}u_{r-1}}^{\beta_\varepsilon^{-1}t} e^{Q(\varepsilon)(u_r - u_{r-1})} B(\varepsilon, u_r) \times$$

$$\times e^{Q(\varepsilon)\left(\frac{t}{\beta_\varepsilon} - u_r\right)} du_r + \ldots = e^{Q(\varepsilon)\frac{t}{\beta_\varepsilon}} + \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} [\Pi B(\varepsilon, u_1) +$$

$$+ (e^{Q(\varepsilon)u_1} - \Pi) B(\varepsilon, u_1)] [\Pi + (e^{Q(\varepsilon)\left(\frac{t}{\beta_\varepsilon} - u_1\right)} - \Pi)]\, du_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} [\Pi B(\varepsilon, u_1) + (e^{Q(\varepsilon)u_1} - \Pi) B(\varepsilon, u_1)]\, du_1 \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}u_{r-1}}^{\beta_\varepsilon^{-1}t} [\Pi B(\varepsilon, u_r) + (e^{Q(\varepsilon)(u_r - u_{r-1})} - \Pi) B(\varepsilon, u_r)] \times$$

$$\times [\Pi + (e^{Q(\varepsilon)\left(\frac{t}{\beta_\varepsilon} - u_r\right)} - \Pi)]\, du_r + \ldots = e^{Q(\varepsilon)\frac{t}{\beta_\varepsilon}} +$$

$$+ \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} \Pi B(\varepsilon, u_1)\, \Pi du_1 + \ldots + \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} \Pi B(\varepsilon, u_1)\, \Pi du_1 \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}u_{r-1}}^{\beta_\varepsilon^{-1}t} \Pi B(\varepsilon, u_r)\, \Pi du_r + \ldots + R(\varepsilon),$$

где $R(\varepsilon) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} R_r(\varepsilon)$,

$$R_r(\varepsilon) = \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} (e^{Q(\varepsilon)u_1} - \Pi) B(\varepsilon, u_1)\, du_1 \int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}u_1}^{\beta_\varepsilon^{-1}t} \Pi B(\varepsilon, u_2)\, du_2 \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}u_{r-1}}^{\beta_\varepsilon^{-1}t} \Pi B(\varepsilon, u_r)\Pi du_r + \ldots + \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} (e^{Q(\varepsilon)u_1} - \Pi) B(\varepsilon, u_1) du_1 \times$$

$$\times \int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}u_1}^{\beta_\varepsilon^{-1}t} (e^{Q(\varepsilon)(u_2-u_1)} - \Pi) B(\varepsilon, u_2) \ldots \int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}u_r}^{\beta_\varepsilon^{-1}t} (e^{Q(\varepsilon)(u_r-u_{r-1})} - \Pi) B(\varepsilon, u_r)\Pi du_r.$$

Ряд $R(\varepsilon)$ абсолютно и равномерно сходится при $\varepsilon \to 0$ к конечному пределу. Это следует из того, что $R(\varepsilon)$ представим в виде разности двух рядов, абсолютно и равномерно сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к конечным пределам. Следовательно, в силу условия 3 теоремы

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{r=1}^{\infty} R_r(\varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} R_r(\varepsilon) = 0,$$

так как нетрудно показать, что $\operatorname{nor}[\lim_{\varepsilon\to 0} R_r(\varepsilon)] = 0$, где для $A = \| a_{ij} \|$, $\operatorname{nor}[A] = \max_i \sum_j a_{ij}$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V(\beta_\varepsilon^{-1}t, \Theta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Pi \exp\left\{\Pi \int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} B(\varepsilon, u)\, du \Pi\right\} =$$

$$= \Pi \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} \pi_k B_k(t)(e^{-\Theta} - 1)\right\}.$$

Теорема доказана.

Пусть $x_\varepsilon(t)$ — неоднородная цепь Маркова со множеством состояний X, расщепляющимся в пределе на подмножества X_i, $i = \overline{1, r}$, причем $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$, $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$. Инфинитезимальная матрица цепи $x_\varepsilon(t)$ имеет вид $\tilde{Q}(\varepsilon, u) = Q + B(\varepsilon, u)$, где Q — блочно-диагональная матрица с матрицей в i-м блоке ($i = \overline{1, r}$) определенной на подмножестве X_i размерности k_i вида $Q^{(i)} = \| q_{ln} \|$, $l, n \in X_i$, $\sum_{\substack{n=1 \\ l\neq n}}^{k_i} q_{ln} = -q_{ll}$; $B(\varepsilon, u)$ — матрица m-го порядка, для элементов $b_{ln}(\varepsilon, u)$, $l \in X_i$, $n \in X_j$ которой выполняется $\sum_{j=1}^{r} \sum_{n\in X_j} b_{ln}(\varepsilon, u) = 0$, $l = \overline{1, m}$.

По цепи $x_\varepsilon(t)$ построим укрупненный процесс $\varkappa_\varepsilon(t)$ следующим образом: $\varkappa_\varepsilon(t) = i$, если $x_\varepsilon(t) \in X_i$. Изучим предельное поведение процесса $\{\varkappa_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t)\}$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P\{x_\varepsilon(0)\in X_i\} = P_0^{(i)}(0), \quad i=\overline{1,r};$

2) $\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant \beta_\varepsilon^{-1}T} \max\limits_{\substack{k\in X_i\\ l\in X_j}} |b_{kl}(\varepsilon, u)| < \infty, \ i,j=\overline{1,r};$

3) существуют непрерывные пределы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\beta_\varepsilon^{-1}t} b_{kl}(\varepsilon, u)\,du = B_{kl}(t) < \infty, k\in X_j, \ i\neq j, \ i,j=\overline{1,r};$

4) равномерно по $t<T$ для любых $H, T>0$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\beta_\varepsilon^{-1}t}^{\beta_\varepsilon^{-1}t+H} b_{kl}(\varepsilon, u)\,du = 0, \ k\in X_i, \ l\in X_j, \ i\neq j, \ j=\overline{1,r}.$

Тогда конечномерные распределения процесса $\{\varkappa_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1}t), x_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1}t)\}$ слабо сходятся при $\varepsilon\to 0$ к распределениям двумерного марковского процесса $\{\varkappa_0(t), x_0(t)\}$. Здесь $\varkappa_0(t)$ — неоднородный марковский процесс с непрерывным временем, вероятности переходов которого $p_{ij}(t, t+h), \ i,j=\overline{1,r}, \ i\neq j$ на интервале времени $[t, t+h]$ выразятся в виде $p_{ij}(t, t+h) = [\nu_{ij}(t+h) - \nu_{ij}(t)](1+o(1))$, где $\nu_{ij}(t) = \sum\limits_{k\in X_i}\sum\limits_{l\in X_j} \pi_k^{(i)} B_{kl}(t), \ i\neq j, \ i,j=\overline{1,r}, \pi_k^{(i)}, k\in X_i$ — стационарное распределение цепи с инфинитезимальной матрицей $Q^{(i)} = \|q_{ln}\|, l, n\in X_i$, $x_0(t)$ — случайный процесс, определяемый условными вероятностями пребывания $x_0(t)$ в состоянии $l\in X_i$, $P\{x_0(t) = l/\varkappa_0(t) = i, \mathfrak{F}_t\} = \pi_l^{(i)}, \ i=\overline{1,r}$, где $\mathfrak{F}_t$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\{\varkappa_0(u), x_0(u), u<t\}$, т. е. $x_0(t)$ — процесс с независимыми значениями, заданный на процессе $\varkappa_0(t)$.

Доказательство. Построим по процессу $\{\varkappa_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t)\}$ стохастически эквивалентный переключающийся процесс [7] $\{\varkappa_\varepsilon^{(1)}(t), x_\varepsilon^{(1)}(t)\}$ следующим образом. Пусть для любых $\varepsilon, t\geqslant 0$ и $i\in X_k$, $k=\overline{1,r}$ задано семейство случайных процессов $(x_\varepsilon^{(k,i)}(t, u, l), \chi_\varepsilon^{(k,i)}(t, l))$, распределения которых при разных $l\geqslant 0$ независимы и не зависят от l. Здесь $x_\varepsilon^{(k,i)}(t, u, l), t\geqslant u$ — цепь Маркова с инфинитезимальной матрицей $Q^{(k)}$ со значениями в X_k и $x_\varepsilon^{(k,i)}(u, u, 1) = i$, а $\chi_\varepsilon^{(k,i)}(t, l), \ t\geqslant 0, \ l\geqslant 0, \ i\in X_k$ — ступенчатый процесс, заданный на цепи $x_\varepsilon^{(k,i)}(t, u, l)$. Последовательные моменты его скачков обозначим $\tau_\varepsilon^{(k,i)}(l), i\in X_k$, а величины скачков, принимающие значения во множестве $(j, n), n\in X_j, \ j=\overline{1,r}, \ j\neq k$, обозначим через $\gamma_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$. Скачки $\chi_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$ и $x_\varepsilon^{(k,i)}(t, u, l)$ не совпадают с вероятностью 1. Если цепь $x_\varepsilon^{(k,i)}(t, u, l)$ на промежутке $[t, t+\Delta]$ находится в состоянии $j \in X_k$, то с вероятностью $b_{jn}(\varepsilon, t)\Delta + o(\Delta)$, где $n \in X_l$, процесс $\chi_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$ совершает скачок величиной (l, n).

Определим рекуррентным образом последовательности: $\tau_\varepsilon^{(0)} = 0$, $y_\varepsilon^{(0)} = (\varkappa_\varepsilon(0), \ x_\varepsilon(0))$, $\tau_\varepsilon^{(l+1)} = \min\{\tau_\varepsilon^{y_\varepsilon^{(l)}}(l) : \tau_\varepsilon^{y_\varepsilon^{(l)}}(l) > \tau_\varepsilon^{(l)}\}$, $y_\varepsilon^{(l+1)} = \gamma_\varepsilon^{y_\varepsilon^{(l)}}\tau_\varepsilon^{(l+1)}, l)$, $l \geqslant 0$. Тогда на промежутке $[\tau_\varepsilon^{(l)}, \tau_\varepsilon^{(l+1)})$ $x_\varepsilon^{(1)}(t) = x_\varepsilon^{y_\varepsilon^{(l)}}(t, \tau_\varepsilon^{(l)}, l)$, $l \geqslant 0$, а $\varkappa_\varepsilon^{(1)}(t) = j$, если $x_\varepsilon^{(1)}(t) \in X_j$, $t \geqslant 0$. Отсюда, если $y_\varepsilon^{(l)} = (j, n)$, то на l-м промежутке развивается независимо от прошлого процесс типа $x_\varepsilon^{(j,n)}(t, \tau_\varepsilon^{(l)}, l)$ и $\varkappa_\varepsilon^{(1)}(t) = j$, а момент переключения является моментом первого после $\tau_\varepsilon^{(l)}$ скачка процесса $\chi_\varepsilon^{(j,n)}(t, l)$. Отметим, что при таком построении моменты $\tau_\varepsilon^{(l)}$ являются марковскими для процесса $\{x_\varepsilon^{(1)}(t), \chi_\varepsilon(t)\}$, где $\chi_\varepsilon(t) = \chi_\varepsilon^{y_\varepsilon^{(l)}}(\tau_\varepsilon^{(l)}, l) + (\chi_\varepsilon^{y_\varepsilon^{(l)}}(t, l) - \chi_\varepsilon^{y_\varepsilon^{(l)}}(\tau_\varepsilon^{(l)}, l))$, т. е. $\chi_\varepsilon(t)$ строится как сумма приращений процессов $\chi_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$.

Пусть $\hat{\gamma}_\varepsilon^{(k,i)}(t, l) = j$, если $\gamma_\varepsilon^{(k,i)}(t, l) \in (j, X_j)$, $j = \overline{1, r}$ и $\hat{\chi}_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$— ступенчатый процесс, моменты скачков которого совпадают с моментами скачков процесса $\chi_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$. Величины $\hat{\chi}_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$ скачков равны $\hat{\gamma}_\varepsilon^{(k,i)}(t, l)$.

Из теоремы 1 и условий теоремы 2 следует слабая сходимость конечномерных распределений процесса $\hat{\chi}_\varepsilon^{(k,i)}(\beta_\varepsilon^{-1}t, l)$, $i \in X_k$, $k = \overline{1, r}$ к распределениям процесса $\chi_0^{(k)}(t, l)$ с ведущей функцией $\alpha^{(k,j)}(t) = \sum_{n \in X_j} \sum_{i \in X_k} \pi_i^{(k)} B_{in}(t)$. Так как $B_{in}(t)$, $i, n = \overline{1, m}$ — непрерывные функции, то имеет место слабая сходимость моментов скачков процесса $\hat{\chi}_\varepsilon^{(k,i)}(\beta_\varepsilon^{-1}t, l)$ к моментам скачков процесса $\chi_0^{(k)}(t, l)$ (последний — ординарный процесс со значениями в $\{1, 2, \ldots, r\}$), значит, по построению, и моментов переключений $\tau_\varepsilon^{(l)}$ к $\tau_0^{(l)}$ —последовательным моментам скачков процесса $\chi_0(t)$, построенного как сумма приращений неоднородных пуассоновских процессов $\chi_0^{(k)}(t, l)$.

Обозначая через $\tau_0^{(k)}(l)$ последовательные моменты скачков $\chi_0^{(k)}(t, l)$, а $\gamma_0^{(k)}(t, l)$ — их величины, построим переключающийся процесс $\{\varkappa_0^{(1)}(t), x_0^{(1)}(t)\}$ следующим образом. Положим $\tau_0^{(0)} = 0$, $P\{y_0^{(0)} = k\} = \pi_k^{(i)}$, если $x_0^{(1)}(0) \in X_i$, $\tau_0^{(l+1)} = \min\{\tau_0^{(y_0^{(l)})}(l) : \tau_0^{(y_0^{(l)})}(l) > \tau_0^{(l)}\}$, $y_0^{(l+1)} = \gamma_0^{(y_0^{(l)})}(\tau_0^{(l+1)}, l)$, $l \geqslant 0$. Тогда на промежутке $[\tau_0^{(l)}, \tau_0^{(l+1)})$ $\varkappa_0^{(1)}(t) = y_0^{(l)}$, а $x_0^{(1)}(t) = x_0^{(y_0^{(l)})}(t, \tau_0^{(l)}, l)$, $l \geqslant 0$, где $x_0^{(k)}(t, u, l)$, $l \geqslant u$ — процесс со значениями в X_k.

Нетрудно по индукции найти, что для любого $N \geqslant 1$ $\{\tau_\varepsilon^{(l)}, \varkappa_\varepsilon^{(1)}(\tau_\varepsilon^{(l)}), l = \overline{0, N}\} \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \{\tau_0^{(l)}, \varkappa_0^{(1)}(\tau_0^{(l)}), l = \overline{0, N}\}$. Слабая сходимость процесса $\{\varkappa_\varepsilon^{(1)}(\beta_\varepsilon^{-1}t), x_\varepsilon^{(1)}(\beta_\varepsilon^{-1}t)\}$ к $\{\varkappa_0^{(1)}(t), x_0^{(1)}(t)\}$ во всех точках стохастической непрерывности последнего следует из теоремы 9.1 [7] (см. также [8], лемма 1). Поскольку для любых $t \geqslant 0, \Delta > 0$

$$P\{x_\varepsilon^{(k,s)}(\beta_\varepsilon^{-1}(t+\Delta), \beta_\varepsilon^{-1}t, l) = j / x_\varepsilon^{(k,i)}(\beta_\varepsilon^{-1}t, 0, l) = s\} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \pi_j^{(k)}, \quad l \geqslant 0,$$

то очевидно, что цепь Маркова $x_\varepsilon^{(k,i)}(\beta_\varepsilon^{-1}t, 0, l)$ сходится к процессу с независимыми значениями и распределением $\pi_j^{(k)}$, $j \in X_j$.

Отметим, что в силу теоремы 1 распределение времени пребывания в состоянии k процесса $\varkappa_0^{(1)}(t)$, если $\varkappa_0^{(1)}(0) = k$, совпадает с распределением момента первого скачка пуассоновского процесса с ведущей функцией $\alpha^{(k)}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \sum_{n \in X_j} \sum_{i \in X_k} \pi_i^{(k)} B_{in}(t)$.

Очевидно, что по построению процесс $\{\varkappa_0^{(1)}(t), x_0^{(1)}(t)\}$ стохастически эквивалентен марковскому процессу $\{\varkappa_0(t), x_0(t)\}$, определенному в теореме. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда блочно-диагональная матрица Q, определенная выше, имеет элементы $q_{ln}^{(i)}(\varepsilon, u)$, $l, n \in X_i$, $i = \overline{1, r}$, относительно которых выполнено условие

В: равномерно по u из любого конечного интервала $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} q_{ln}^{(i)}(\varepsilon, \beta_\varepsilon^{-1}u) = q_{ln}^{(i)}(u)$, $l, n \in X_i$, $i = \overline{1, r}$, а цепь Маркова с инфинитезимальной матрицей $Q^{(i)}(u) = \| q_{ln}^{(i)}(u) \|$, непрерывной по u, неприводима при каждом u.

Тогда из предыдущих теорем и результатов [9] нетрудно получить такое утверждение.

Теорема 3. При выполнении условия В и условий теоремы 2 конечномерные распределения процесса $\{\varkappa_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1}t), x_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1}t)\}$ слабо сходятся при $\varepsilon \to 0$ к распределениям двумерного марковского процесса $\{\varkappa_0(t), x_0(t)\}$. Здесь $\varkappa_0(t)$ — неоднородный марковский процесс, вероятности переходов которого $p_{ij}(t, t+h)$ $i, j = \overline{1, r}$, $i \neq j$ на интервале времени $(t, t+h)$ определяются следующим образом: $p_{ij}(t, t+h) = [\nu_{ij}^{(0)}(t+h) - \nu_{ij}^{(0)}(t)](1 + o(1))$, где $\nu_{ij}^{(0)}(t) = \sum_{k \in X_i} \sum_{l \in X_j} \int_0^t \pi_k^{(i)}(u)\, dB_{kl}(u)$, $i, j = \overline{1, r}$, $i \neq j$, а $\pi_k^{(i)}(u)$, $k \in X_i$ — нормированное решение матричного уравнения $\vec{z} Q^{(i)}(u) = \vec{z}$, $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_{k_i})$, $x_0(t)$ — случайный процесс, определяемый условными вероятностями пребывания в состоянии $l \in X_i$ $P\{x_0(t) = l / \varkappa_0(t) = i, \mathfrak{F}_t\} =$

$= \pi_i^{(t)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, где $\mathfrak{F}_t$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\{\varkappa_0(u), x_0(u), u < t\}$, т. е. $x_0(t)$ — процесс с независимыми значениями, заданный на процессе $\varkappa_0(t)$.

1. *Королюк В. С.* Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний.— УМЖ, 1969, 21, № 6. 2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев, 1975. 3. *Коваленко И. Н.* Исследования по анализу надежности сложных систем. Киев, 1975. 4. *Анисимов В. В.* Асимптотическое укрупнение состояний случайных процессов.— Кибернетика, 1973, № 3. 5. *Анисимов В. В., Ситюк В. Н.* Асимптотическое поведение неоднородного пуассоновского процесса с ведущей функцией, зависящей от малого параметра, управляемого цепью Маркова.— Кибернетика, 1977, № 4. 6. *Ежов И. И., Скороход А. В.* Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I, II.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, вып. 1, 4. 7. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к дискретным схемам суммирования. Киев, 1976. 8. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для переключающихся процессов и их применение.— Кибернетика, 1978, № 6. 9. *Анисимов В. В., Ситюк В. Н.* Укрупнение неоднородной цепи Маркова с редкими нестационарными интенсивностями переходов между классами.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 19.

Поступила в редколлегию 04.05.79

V. V. Anisimov, V. N. Sityuk

ON CONVERGENCE OF NON-HOMOGENEOUS MARKOV'S CHAIN TO PROCESS WITH INDEPENDENT VALUES CONTROLLED BY NON-HOMOGENEOUS MARKOV'S PROCESS

The convergence of non-homogeneous Markov's chain depending on small parameter ε to process with independent value defined on Markov's chain is studied.