УДК 519.21

Д. Ф. ВЫСОЧАНСКИЙ, учитель
Бородянская заочная школа

ОДНОВЕРШИННОСТЬ СИММЕТРИЗАЦИИ СВЕРТКИ ОДНОВЕРШИННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. *Определение 1.* Функция распределения $F(t)$ называется одновершинной с модой в точке M, если на интервале $(-\infty, M)$ она выпукла, а на интервале (M, ∞) — вогнута.

Замечание 1. Мода может быть точкой разрыва функции $F(t)$, но вне моды одновершинная функция распределения $F(t)$ абсолютно непрерывна, т. е. распределение $F(t)$ при всех $t \neq M$ имеет плотность вероятности $f(t)$, монотонную на интервалах $(-\infty, M)$ и (M, ∞) [1, с. 197].

Определение 2. Симметризацией ${}^0F(t)$ функции распределения $F(t)$ называется функция распределения разности двух взаимно независимых случайных величин x' и x'', имеющих распределение $F(t)$ каждая. Функцию ${}^0F(t)$ можно представить с помощью интеграла

Лебега—Стилтьеса [1, с. 186—187]:

$$^0F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t+\tau)\, dF(\tau).$$

Замечание 2. Свертка двух одинаковых одновершинных распределений может не быть одновершинной [1, с. 208—209].

Лемма. Для произвольного одновершинного с модой в точке M и скачком q распределения $F(t)$ на R^1 справедливо $F(t) = pG(t) + qI(t)$, где $p = 1 - q$, $G(t)$ — абсолютно непрерывное одновершинное с модой в точке M распределение, $I(t)$ — индикатор множества (M, ∞) (см. [1, с. 132]).

2. **Теорема 1.** Симметризация $^0F(t)$ произвольного одновершинного распределения $F(t)$ одновершинна.

Доказательство. Достаточно доказать выпуклость функции $^0F(t)$ на интервале $(-\infty, 0)$. Согласно лемме

$$^0F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [pG(t+\tau) + qI(t+\tau)]\, d[pG(\tau) + qI(\tau)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} pG(t+\tau)\, d[pG(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} pG(t+\tau)\, d[qI(\tau)] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} qI(t+\tau)\, d[pG(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} qI(t+\tau)\, d[qI(\tau)] = p^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(t+\tau) \times$$

$$\times dG(\tau) + pqG(t+M) + qp[1 - G(M-t)] + q^2 I(t+M) =$$

$$= p^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(t+\tau)\, dG(\tau) + pq\{G(M+t) + [1 - G(M-t)]\},$$

т. е. на интервале $(-\infty, 0)$

$$^0F(t) = p^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(t+\tau)\, dG(\tau) + pq\{G(M+t) + [1 - G(M-t)]\}. \tag{1}$$

Поскольку p и q — вероятности, то второе слагаемое в (1) выпукло на интервале $(-\infty, 0)$; следовательно, теорема будет доказана, если мы докажем, что симметризация $^0G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t+\tau)\, dG(\tau)$ тоже выпукла на $(-\infty, 0)$ [2, с. 282].

Пусть $^0g(t)$ и $g(t)$ — плотности распределений вероятности $^0G(t)$ и $G(t)$ соответственно. Поскольку $G(t)$ абсолютно непрерывна, то (см. [1, с. 174 и 183]) на R^1 существует

$$^0g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau)\, dG(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, d_\tau G(\tau - t). \tag{2}$$

Для доказательства выпуклости на $(-\infty, 0)$ функции ${}^0G(t)$ достаточно показать, что функция (2) монотонно не убывает при $t < 0$ [2, с. 477; 1, с. 174].

Из (2), [3, с. 337 и 274—277], леммы, земечания 1, снова леммы и [1, с. 174] получаем последовательно

$$ {}^0g(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m/n) \{[G(b_{m,n} - t) - G(a_{m,n} - t)] - [G(b_{m+1,n} - t) - $$

$$ - G(a_{m+1,n} - t)]\} = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} [G(b_{m,n} - t) - G(a_{m,n} - t)] = $$

$$ = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} [g(a_{m,n} - \tau) - g(b_{m,n} - \tau)]\, d\tau, $$

т. е. при всех $t_1 < t_2 < 0$

$$ {}^0g(t_2) - {}^0g(t_1) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} [g(a_{m,n} - \tau) - g(b_{m,n} - \tau)]\, d\tau, \quad (3) $$

где

$$ a_{m,n} = \inf\{\tau : g(\tau) \geqslant m/n\} \leqslant M \leqslant \sup\{\tau : g(\tau) \geqslant m/n\} = b_{m,n}. \quad (4) $$

Если при произвольно фиксированной паре натуральных значений m и n некоторое значение $\tau < 0$ удовлетворяет неравенству $a_{m,n} < a_{m,n} - \tau < M \leqslant b_{m,n} < b_{m,n} - \tau$ либо $a_{m,n} \leqslant M < a_{m,n} - \tau < b_{m,n} < b_{m,n} - \tau$ (см. неравенства (4)), то из леммы, определения 1, замечания 1 и [4] находим: $g(a_{m,n} - \tau) \geqslant m/n > g(b_{m,n} - \tau)$. Если же $M \leqslant b_{m,n} < a_{m,n} - \tau \leqslant b_{m,n} - \tau$, то $g(a_{m,n} - \tau) \geqslant g(b_{m,n} - \tau)$. Поэтому в (3) все подынтегральные функции (будучи, очевидно, ограниченными снизу при всех $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2 < 0$) почти всюду неотрицательны на любом промежутке интегрирования $[t_1, t_2] \subset (-\infty, 0)$, т. е. (см. [2, с. 137, 116]) все интегралы, ряды и $[{}^0g(t_2) - {}^0g(t_1)]$ неотрицательны для любых $t_1 < t_2 < 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Симметризация ${}^0F(t)$ свертки $F(t)$ нескольких одновершинных распределений $F_m(t)$ одновершинна.

Доказательство. Из определения 2 и [1, с. 181] следует, что ${}^0F(t)$ является распределением суммы $\sum_{m=1}^{n} y_m$ некоторых, взаимно независимых случайных величин $y_m = x'_m - x''_m$, где x'_m и x''_m независимы и имеют одновершинное распределение $F_m(t)$, т. е. есть свертка нескольких симметричных одновершинных распределений ${}^0F_m(t)$, одновершинность которой установлена А. Винтнером [1, с. 208]. Теорема доказана.

Автор благодарен проф. Ю. И. Петунину за руководство работой.

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., 1967. 2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1974. 3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

Поступила в редколлегию 16.04.79

D. F. Vysochansky

UNIMODALITY OF THE SYMMETRIZATION OF THE CONVOLUTION OF UNIMODAL DISTRIBUTIONS

It is proved that the symmetrization of an unimodal distribution or of the convolution of some unimodal distributions is an unimodal distribution.