УДК 519.21

В. Г. ГАДЖИЕВ, канд. физ.-мат. наук
Институт кибернетики АН УССР

О ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

I. Данная статья посвящена формуле обращения для преобразования Фурье в случае, когда функции заданы на гильбертовом пространстве. В этом пространстве нет инвариантной меры относительно сдвигов, аналогичной мере Лебега в конечномерном случае, и поэтому преобразование Фурье и формула обращения зависят от выбора меры, относительно которой производится интегрирование. В случае фиксированной гауссовой меры μ_0 А. В. Скороходом [1] дана формула обращения в виде $e^{0,5(A^{-1}x,x)}\int e^{-i(x,z)}\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}\mu_0^*(dz)$ (входящие в нее символы будут разъяснены ниже). Это почти всюду определенная функция, существующая при некоторых ограничениях. При определенных условиях она восстанавливает искомую функцию.

В данной статье показано, что интеграл

$$\int e^{-i(x,z)}\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}\mu_0^*(dz)$$

существует всегда, если $\varphi(z)$ — преобразование Фурье функции $f(x)\in L_2(\mu_0)$.

II. Приведем некоторые построения из работ [1, 2]. Пусть $(X, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство, где X — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств и μ_0 — гауссова мера с характеристическим функционалом $\varphi_0(z) = \int e^{i(z,x)}\mu_0(dx) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Az,z)\right\}$, где A — положительный ядерный оператор, μ — конечная счетно-аддитивная функция множеств с преобразованием Фурье $\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu(dx)$.

Предположим, что $\mu \ll \mu_0$, т. е. для любого $E \in \mathfrak{B}$ $\mu(E) = \int\limits_E f(x)\,\mu_0(dx)$. Пусть $X_n \subset X_{n+1}$ последовательность конечномерных пространств пространства X, $\bigcup\limits_n X_n$ плотно в X, P_n — проектирование на X_n. Обозначим $\mu_0^n(E) = \mu_0(P_n^{-1}E)$, $\mu^n(E) = \mu(P_n^{-1}E)$, где E — борелевское множество в X_n. Очевидно, $\mu^n \ll \mu_0^n$. Пусть $f_n(x)$ $(x \in X_n)$ — плотность. Тогда определено выражение $f_n(P_n x)$, $x \in X$ и имеет место [3] следующее утверждение.

Лемма. Почти для всех x по мере μ_0 выполняется соотношение $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(P_n x)$.

Если $\varphi_0^n(z)$, $\varphi^n(z)$ $(z \in X_n)$ — преобразование Фурье соответственно μ_0^n, μ^n, то $\varphi_0^n(z) = \varphi_0(P_n z)$, $\varphi^n(z) = \varphi(P_n z)$.

Предположим, что A не имеет нулевых собственных значений и X_n инвариантно относительно A. Тогда μ_0^n имеет на X_n плотность относительно лебеговой меры

$$p_0^n(x) = (2\pi)^{-\frac{m_n}{2}} [\det P_n A P_n] \exp\left\{-\frac{1}{2}(A^{-1}x, x)\right\}, \quad x \in X_n, \tag{1}$$

где m_n — размерность X_n. Поскольку μ^n имеет плотность относительно гауссовой меры μ_0^n на X_n, постольку она будет иметь плотность $p^n(x)$ относительно лебеговой меры на X_n. Пусть $\varphi^n(z)$ абсолютно интегрируема на X_n по мере Лебега. Тогда

$$p^n(x) = (2\pi)^{-m_n} \int\limits_{X_n} e^{-i(x,z)} \varphi^n(z)\,dz. \tag{2}$$

Разделив (2) на (1), получим

$$f_n(x) = (2\pi)^{-\frac{m_n}{2}} [\det P_n A P_n]^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(A^{-1}x, x)\right\} \int\limits_{X_n} e^{-i(x,z)} \varphi^n(z)\,dz, \quad x \in X_n. \tag{3}$$

Введем на X_n меру μ_0^{*n} с плотностью относительно лебеговой меры $(2\pi)^{-\frac{m_n}{2}} [\det P_n A P_n]^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Ax, x)\right\}$. Мера μ_0^{*n} будет гауссовой мерой на X_n с характеристическим функционалом $\varphi_0^{*n}(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(A^{-1}z, z)\right\}$, $z \in X_n$. Таким образом, $\varphi_0^{*n}(z) = \varphi_0^*(P_n z)$, где $\varphi_0^*(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(A^{-1}z, z)\right\}$, $z \in X_+$ (X_+ — образ оператора $A^{1/2}$), и $\varphi_0^*(z)$ можно рассматривать как характеристический функционал некоторой обобщенной меры μ_0^*, которая определяет меры μ_0^{*n}, причем для всякой измеримой ограниченной функции $h(z)$ в X_n при $m > n$ выполнено соотношение

$$\int_{X_m} h(P_n z)\, \mu_0^{*m}(dz) = \int_{X_n} h(P_n x)\, \mu_0^{*n}(dz).$$

Поэтому естественно положить

$$\int h(P_n z)\, \mu_0^{*}(dz) = \int_{X_n} h(z)\, \mu_0^{*n}(dz).$$

Используя эти обозначения, (3) можно переписать так:

$$f_n(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(A^{-1}x, x)\right\} \int e^{-i(x, P_n z)} \frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} \mu_0^{*}(dz), \quad x \in X_n. \qquad (4)$$

Равенства (4) и (3) эквиваленты. Поэтому условие существования интеграла в (3) (или в (2)) переходит в условие существования интеграла в (4), т. е. в абсолютную интегрируемость отношения $\frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)}$ по мере μ_0^*. В силу леммы

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{2}(A^{-1}P_n x, P_n x)\right\} \int e^{-i(P_n x, P_n z)} \frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} \mu_0^{*}(dz). \qquad (5)$$

Пусть X_- — пополнение X в метрике $(x, y)_- = (Ax, y)$; X_- — гильбертово пространство, X будем рассматривать как плотное подмножество в X_-; S — положительный симметричный оператор в X_- с конечным следом; X_{--} — гильбертово пространство, являющееся пополнением X_- в метрике $(x, y)_{--} = (Sx, y)_-$. Введем также $X_+ \subset \subset X$ со скалярным произведением $(x, y)_+ = (A^{-1}x, y)$. В работе [1] показано, что μ_0^* будет мерой на X_{--} с характеристическим функционалом $\varphi_0^*(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(A^{-1}z, z)\right\}$. В качестве S будем брать A, $(x, y)_{--} = (Ax, Ay)$.

III. Покажем, что $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ продолжимо на X_{--} и интегрируемо по мере μ_0^*. Для этого воспользуемся построениями из работы [4]. Пусть $Q(z)$ — некоторый полином. Тогда определен дифференциальный оператор

$$Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dz}\right)\varphi_0(z) = \int e^{i(z,x)} Q(x)\, \mu_0(dx).$$

Но $Q\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dz}\right)\varphi_0(z) = \widetilde{Q}(Az)\,\varphi_0(z)$, где $Q(Az)$ — некоторый полином.

Если $Q_n(x) \to f(x)$ в $L_2(\mu_0)$, то $Q_n(Az)$ имеет поточечный предел.

Действительно,

$$|[\widetilde{Q}_n(Az) - \widetilde{Q}_m(Az)]\,\varphi_0(z)|^2 = |\widetilde{Q}_n(Az)\,\varphi_0(z) - \widetilde{Q}_m(Az)\,\varphi_0(z)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int |Q_n(x) - Q_m(x)|^2 \mu_0(dx) \to 0. \qquad (6)$$

Обозначим этот предел через $\tilde{f}(Az)$. Заметим, что $\tilde{f}(Az)$ — целая аналитическая функция от z. Но

$$\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu(dx) = \int e^{i(z,x)} f(x)\mu_0(dx) = f\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dz}\right)\varphi_0(z) =$$
$$= \tilde{f}(Az)\,\varphi_0(z).$$

Отсюда $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} = \tilde{f}(Az)$ — целая аналитическая функция.

Полином $\tilde{Q}(Az)$, как легко показать, продолжим на $X_{\_\_\_}$ и интегрируем по мере $\mu_0^*(dz)$. Продолжение полиномов $\tilde{Q}_n(Az)$ на $X_{\_\_\_}$ также удовлетворяют неравенству (6). Следовательно, непрерывные продолжения $\tilde{Q}_n(Az)$ также имеют предел на $X_{\_\_\_}$, и этот предел является продолжением $\tilde{f}(Az)$. Отсюда $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} = \tilde{f}(Az)$ продолжима на $X_{\_\_\_}$.

Теперь покажем, что $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ интегрируема по мере μ_0^*. Для этого воспользуемся следующим критерием [5, 29]. Если $\sup\limits_n \int [\tilde{Q}_n(Az)]^2 \times \mu_0^*(dz) < \infty$, то $\{\tilde{Q}_n(Az)\}$ равномерно интегрируема. Тогда $\tilde{f}(Az) \in L_1(\mu_0^*)$ и $\tilde{Q}_n(Az) \to \tilde{f}(Az)$ в $L_1(\mu_0^*)$. Значит, надо доказать, что $\sup\limits_n \int |\tilde{Q}_n(Az)|^2 \mu_0^*(dz) < \infty$. Для этого используем некоторые вспомогательные построения и доказательства. Пусть μ_0^2 — гауссова мера с корреляционным оператором $2A$. Рассмотрим преобразование Фурье — Винера в гильбертовом пространстве [6]

$$\tilde{\tilde{f}}(z) = \int f(x + iz)\,\mu_0^2(dx). \tag{7}$$

Если $f(x)$ — полиномиальная цилиндрическая функция размерности n, то (7) превращается в равенство

$$\tilde{\tilde{f}}(y) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}\sqrt{\det A_n}} \int f(x + iy)\, e^{-\frac{1}{4}(A^{-1}x,x)}\,dx,$$

где $x \in X_n$, $A_n = P_n A P_n$. Пусть $y \in X_n$. Сделаем замену переменных $x + iy = z$. Тогда

$$\tilde{\tilde{f}}(y) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}\sqrt{\det A_n}}\, e^{\frac{1}{4}(A^{-1}y,y)} \int e^{\frac{i}{2}(A^{-1}y,z)} f(z)\, e^{-\frac{1}{4}(A^{-1}z,z)}\,dz.$$

После вторичной замены $\frac{1}{2} A^{-1} y = u$, $y = 2Au$ получим

$$\widetilde{\widetilde{f}}(2Au)\, e^{-(Au,u)} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}\sqrt{\det A_n}} \int e^{i(u,z)} f(z)\, e^{-\frac{1}{4}(A^{-1}z,z)} dz,$$

или $\widetilde{\widetilde{f}}(2Au)\, e^{-(Au,u)} = \int e^{i(z,u)} f(z)\, \mu_0^2(dz)$.

С другой стороны, для любого полинома $Q(z)$

$$Q\left(\frac{1}{i}\,\frac{d}{dz}\right) e^{-(Au,u)} = \int e^{i(u,z)} Q(z)\, \mu_0^2(dz).$$

Но $Q\left(\frac{1}{i}\,\frac{d}{du}\right) e^{-(Au,u)} = \overline{Q}(Az)\, e^{-(Au,u)}$, где $\overline{Q}(u)$ — некоторый полином. Следовательно, $\widetilde{\widetilde{Q}}(2Au) = \overline{Q}(Au)$. Но по обозначению $Q\left(\frac{1}{i}\,\frac{d}{du}\right) \times$ $\times e^{-\frac{1}{2}(Au,u)} = \widetilde{Q}(Au)\, e^{-\frac{1}{2}(Au,u)}$. Отсюда $\overline{Q}(Au) = \widetilde{Q}(2Au)$. Следовательно, $\widetilde{\widetilde{Q}}(2Au) = \widetilde{Q}(2Au)$, $\widetilde{\widetilde{Q}}(Au) = \widetilde{Q}(Au)$ и имеет место формула

$$\int e^{i(z,x)} Q(x)\, \mu_0(dx) = \widetilde{\widetilde{Q}}(Az)\, \varphi_0(z),$$

где $\widetilde{\widetilde{Q}}(z)$ — преобразование Фурье—Винера. Вообще, для $f(x) \in L_2(\mu_0)$

$$\int e^{i(z,x)} f(x)\, \mu_0(dx) = \widetilde{\widetilde{f}}(Az)\, \varphi_0(z),$$

где $\widetilde{\widetilde{f}}(z)$ — преобразование Фурье — Винера, и

$$\int\limits_{X} |\widetilde{Q}(Az)|^2 \mu_0^*(dz) = \frac{\sqrt{\det A_n}}{(2\pi)^{n/2}} \int |\widetilde{Q}(Az)|^2 e^{-\frac{1}{2}(Az,z)}\, dz =$$

$$= \frac{\sqrt{\det A_n}}{(2\pi)^{n/2}} \int |\widetilde{\widetilde{Q}}(Az)|^2 e^{-\frac{1}{2}(Az,z)}\, dz.$$

Сделаем замену переменных $Az = y$, тогда

$$\frac{\sqrt{\det A_n}}{(2\pi)^{n/2}} \int |\widetilde{\widetilde{Q}}(Az)|^2 e^{-\frac{1}{2}(Az,z)}\, dz = \frac{\sqrt{\det A_n}}{(2\pi)^{n/2} \det A_n} \int |\widetilde{\widetilde{Q}}(y)|^2 \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}y,y)} dy = \int |\widetilde{\widetilde{Q}}(y)|^2 \mu_0(dy).$$

Для преобразования Фурье — Винера имеет место равенство Парсеваля [7]:

$$\int\limits_X |\tilde{\tilde{Q}}(y)|^2 \mu_0(dy) = \int\limits_X |Q(x)|^2 \mu_0(dx).$$

Запишем его в такой форме:

$$\int\limits_{\overline{X}} |\tilde{Q}(Az)|^2 \mu_0^*(dz) = \int\limits_X |Q(y)|^2 \mu_0(dy).$$

Введем ортогональное разложение в $L_2(\mu_0)$: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_k(x)$, $Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k(x)$. Тогда

$$\int Q_n^2(z)\,\mu_0(dz) \leqslant \int f^2(z)\,\mu_0(dz) < \infty.$$

Следовательно,

$$\sup_n \int\limits_{\overline{X}} |\tilde{Q}(Az)|^2 \mu_0^*(dz) \leqslant \int f^2(z)\,\mu_0(dz) < \infty.$$

Отсюда $\tilde{f}(Az) = \tilde{\tilde{f}}(Az) \in L_1(\mu_0^*)$.

Итак, показали, что $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} = \tilde{f}(Az) \in L_1(\mu_0^*)$. Следовательно, имеет смысл выражение

$$g(x) = e^{\frac{1}{2}(A^{-1}x,x)} \int e^{-i(x,z)} \tilde{\tilde{f}}(Az)\,\mu_0^*(dz), \quad x \in X_+$$

и оно непрерывно на X_+.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на X и $Q_n(x) \to f(x)$ на X_+. Тогда $f(x)$ восстанавливается формулой обращения.

Доказательство. Пусть $Q_n(x)$ — цилиндрическая функция размерности m_n, т. е. $Q_n(P_{m_n}z) = Q_n(z)$. Тогда $Q_n(x) - g(P_{m_n}x) =$

$$= Q_n(P_{m_n}x) - g(P_{m_n}x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(A^{-1}P_{m_n}x, P_{m_n}x)\right\} \int e^{-i(P_{m_n}x,z)} [\tilde{\tilde{Q}}_n(Az) -$$

$$- \tilde{\tilde{f}}(Az)]\,\mu_0^*(dz).$$

Для всех $x \in X_+$ множитель, стоящий перед интегралом, ограничен, а интеграл сходится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, $Q_n(x) - g(P_{m_n}x) \to 0$ для всех $x \in X_+$. Исходя из условия теоремы получим $f(x) = g(x)$ на X_+. Так как по условию $f(x)$ непрерывна на X, а X_+ плотно в X, то $f(x)$ восстанавливается функцией $g(x)$.

IV. **Теорема 2.** Для того чтобы $\mu \ll \mu_0$ с плотностью $f(x) \in L_2(\mu_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ была продолжима на $X\_\_$ и

$$\int_{X\_\_} \left| \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} \right|^2 \mu_0^*(dz) < \infty.$$

Доказательство. Необходимость вытекает из вышеизложенного.

Достаточность. Пусть $\int \left| \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} \right|^2 \mu_0^*(dz) < \infty$. Тогда из равенства Парсеваля следует, что существует $f(x) \in L_2(\mu_0)$ такая, что $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} = \tilde{\tilde{f}}(Az)$. (Пространство $L_2(\mu_0^*)$ состоит из функций вида $\tilde{\tilde{f}}(Az)$). Тогда $\varphi(z) = \tilde{\tilde{f}}(Az)\varphi_0(z)$. Но $\tilde{\tilde{f}}(Az)\varphi_0(z) = \int e^{i(z,x)} f(x)\mu_0(dx)$. Следовательно, μ и $f(x)\mu_0(dx)$ имеют один и тот же характеристический функционал. Отсюда $\mu(dx) = f(x)\mu_0(dx)$ и $f(x) \in L_2(\mu_0)$.

Следствие. Для того чтобы $\mu \ll \mu_0$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)}$ сходилась в $L_2(\mu_0^*)$.

Пример. Пусть μ и μ_0 — гауссовы меры с характеристическими функционалами соответственно $\varphi(z) = \exp\left\{i(a,z) - \frac{1}{2}(Az,z)\right\}$ и $\varphi_0(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Az,z)\right\}$. Тогда $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} = \exp\{i(a,z)\}$. Для продолжимости $\exp\{i(a,z)\}$ на $X\_\_$ необходимо и достаточно, чтобы $a = A^{1/2}b$; продолжением в $\exp\{i(a,z)\}$ на $X\_\_$ будет $\exp\{i(b, A^{-1/2}z)\_\_\}$, которая измерима относительно μ_0^* и интегрируема в квадрате. Следовательно, при $a = A^{1/2}b$ $\mu \ll \mu_0$, что совпадает с известным результатом.

В заключение приношу благодарность А. В. Скороходу за обсуждение результатов.

1. *Скороход А. В.* Об одной формуле обращения для преобразования Фурье в гильбертовом пространстве.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, вып. 1. 2. *Гаджиев В. Г.* Формула обращения для плотностей знакопеременных мер в гильбертовом пространстве.— Изв. АН АзССР, 1969, № 1. 3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— УМН, 1967, 21, № 4. 4. *Гаджиев В. Г.* О преобразовании Фурье некоторых классов функций бесконечного числа переменных.— В кн.: Вероятностные методы в математической физике. Киев, 1979. 5. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы. М., 1973. 6. *Cameron R., Martin W.* Fourier—Wiener transforms of analytic functionals.— Duke Math. J., 1945, 12, N 3. 7. *Гаджиев В. Г.* О преобразованиях Фурье и двойственных пространствах.— Труды Ин-та кибернетики АН АзССР, 1980.

Поступила в редколлегию 01.06.79