УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Пусть $\Xi = (\xi_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $m \geqslant n$ — прямоугольная вещественная матрица, элементы которой являются случайными величинами. Предположим, что существует совместная плотность распределения случайных элементов ξ_{ij}, равная $p(X)$, где X — вещественная прямоугольная матрица. Полярным разложением матрицы Ξ будем называть представление $\Xi = SU$, где $S = \sqrt{\Xi\Xi'}$, $U = S^{-1}\Xi$ [1]. Для случая, когда вектор-строки матрицы Ξ независимы и распределены по нормальному закону с ненулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми невырожденными матрицами ковариаций, распределение матрицы S дано в работе [2]. В общем случае, когда у элементов матрицы Ξ существует совместная плотность распределения, распределение матриц S и U не найдено. В настоящей работе с помощью метода нахождения распределения собственных чисел и собственных векторов случайных матриц [3, с. 336—343] найдено распределение матриц S и U.

Полярное разложение вещественных случайных матриц. Пусть K_1 — множество вещественных матриц размера $m \times n$, K_2 — множество неотрицательно-определенных матриц размера $n \times n$, K_3 — множество ортогональных действительных матриц размера $m \times n$, B_1, B_2 — σ-алгебры борелевских множеств соответственно в K_2 и K_3.

Теорема 1. Пусть G — группа m-мерных вещественных ортогональных матриц и μ — нормированная мера Хаара на ней, Ξ — случайная прямоугольная матрица размера $m \times n$, $m \geqslant n$ с плотностью распределения $p(X)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\Xi\Xi' \in L_1, (\Xi\Xi')^{-1/2}\Xi \in L_2\} = c_{nm} \times$$
$$\times \int_{Z_n \in L_1, H^{(n)} \in L_2} p(\sqrt{Z_n} H^{(n)}) \det Z_n^{(m-n-1)/2} \mu(dH)\, dZ_n, \qquad (1)$$

где $L_1 \in B_1$, $L_2 \in B_2$, $H = (h_{ij}) \in G$, $H^{(n)} = h_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$;

$$c_{nm} = [\pi^{n(n-1)/4 - nm/2} \prod_{i=1}^{n} \Gamma[(m+1-i)/2]]^{-1}.$$

Здесь и в следующих аналогичных теоремах будем считать, что плотность $p(Z_n)$ такова, что интеграл в правой части формулы (1) существует.

Доказательство. Для любой ограниченной и непрерывной функции f элементов матриц S^2 и U рассмотрим интеграл $\int f(ZZ', (ZZ')^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ$. В этом интеграле проделаем замену переменных $Z = YH$, $Y \in K_2$, $H \in K_3$. Якобиан J такой замены переменных не зависит от матрицы H и равен 1, что видно из следующего соотношения:

$$\int \exp(-\operatorname{Sp} ZZ')\, dZ = J \int \exp(-\operatorname{Sp}(YH)(YH)')\, dY.$$

Тогда

$$\int f(ZZ', (ZZ')^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ = \int f(YY', (YY')^{-1/2} YH)\, p(YH)\, dY. \tag{2}$$

Интеграл (2) от матрицы H не зависит, поэтому он не изменится, если мы его проинтегрируем по мере Хаара μ, заданной на группе G матриц H. Формула (2) приобретает следующий вид: $\int f(ZZ', (ZZ')^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ = \int f(YY', (YY')^{-1/2} YH)\, p(YH)\, dY\, \mu(dH)$. Любую вещественную матрицу Z размера $m \times n$, $m \geqslant n$ при условии, что $\det ZZ' \neq 0$, можно представить в виде $Z = XU$, где $X \in K_2$, $U \in K_3$, и это представление матрицы Z в виде $Z = XU$ единственно.

Рассмотрим замену переменных $Y = \sqrt{X} U$, $X \in K_2$, $U \in K_3$. В качестве параметров матрицы U можно выбрать ее $mn - n \times (n+1)/2$ углов Эйлера. Элементы матрицы U являются почти всюду непрерывно дифференцируемыми функциями углов Эйлера [4]. Количество независимых параметров матрицы X равно $n(n+1)/2$. Таким образом, число независимых параметров слева и справа в равенстве $Y = \sqrt{X} U$ одинаково, это преобразование почти всюду дифференцируемо по выбранным параметрам и взаимно однозначно на измеримом множестве $\{Y : \det YY' \neq 0\}$.

Обозначим якобиан преобразования $Y = \sqrt{X} U$ через $J(X, U)$. Учитывая то, что $\int_{\det ZZ'=0} p(Z)\, dz = 0$, находим

$$\int f(ZZ', (ZZ')^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ = \int f(X, UH) \times \\ \times p(\sqrt{X} UH)\, J(X, U)\, dX \mu(dH)\, dU, \tag{3}$$

где $dU = \Pi_i d\alpha_i$, α_i — углы Эйлера матрицы U, dX — элемент меры Лебега на K_2.

В равенстве ничего не изменится, если мы вместо $p(\sqrt{X} UH)$ подставим $p(\sqrt{\tilde{X}} \tilde{U} H)$, где

$$\sqrt{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \sqrt{X} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{cases} u_{ij}, & i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \\ q_{ij}, & i = \overline{n+1, m}, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Матрица $\sqrt{X}$ дополнена нулевыми элементами так, чтобы $\sqrt{\tilde{X}}$ имела размер $m \times m$, элементы q_{ij} выбраны таким образом, чтобы $\tilde{U} \in G$. Воспользовавшись инвариантностью меры μ, из (3) получаем

$$\int f(ZZ', (ZZ')^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ = \int f(X, H^{(n)})\, p(\sqrt{X}H^{(n)})\, \varphi(X)\, \mu(dH)\, dX,$$

где $\varphi(X) = \int J(X, U)\, dU.$ (4)

Положив в формуле (4) $f(X, U) \equiv f(X)$, $p(Z) = (2\pi)^{-mn/2} \times \exp\{-0{,}5\, \mathrm{Sp}\, ZZ'\}$, запишем $\int f(ZZ')\, p(Z)\, dZ = (2\pi)^{-nm/2} \int_{K_2} f(X) \times \varphi(X) \exp\{-0{,}5\, \mathrm{Sp}\, X\}\, dX$. Но тогда $(2\pi)^{-nm/2} \varphi(X) \exp\{-0{,}5 \mathrm{Sp} X\}$ — плотность Уишарта. Поэтому согласно [1] $\varphi(X) = c_{nm} \det Z_n^{(m-n-1)/2}$. Теорема 1 доказана.

Обобщенное распределение Уишарта. Обобщенной плотностью Уишарта будем называть плотность распределения матрицы $\Xi\Xi'$, где Ξ — случайная прямоугольная матрица с плотностью распределения $p(X)$. Согласно теореме 1 плотность распределения матрицы $\Xi\Xi'$, $m \geqslant n$ равна $c_{n,m} \int_G p(\sqrt{Z_n} H^{(n)})\, \mu(dH) \det Z^{(m-n-1)/2}$, где Z_n — неотрицательно-определенная матрица порядка n.

Если случайная матрица Ξ имеет плотность распределения

$$(2\pi)^{-mn/2} \det R_n^{m/2} \exp\{-\mathrm{Sp}\,(X - M)\, R_n\, (X - M)'\},$$

где R_n — положительно-определенная матрица, X и M действительные матрицы размера $m \times n$, $m \geqslant n$, то плотность распределения матрицы $\Xi\Xi'$ равна

$$(2\pi)^{-mn/2} c_{n,m} \int \exp\{-\mathrm{Sp}\,(\sqrt{Z_n} H^{(n)} - M)\, R_n\, (\sqrt{Z_n} H^{(n)} - M)'\}\, \mu(dH) \times$$
$$\times \det R^{m/2} \det Z^{(m-n-1)/2}$$

и называется нецентральной плотностью Уишарта.

Если дополнительно к условиям теоремы 1 $p(\sqrt{Z_n} H^{(n)}) = q(Z_n)$, то матрицы $\Xi\Xi'$ и $(\Xi\Xi')^{-1/2}\,\Xi$ независимы и имеют распределения

$$\mathbf{P}\{\Xi\Xi' \in M_1\} = c_{n,m} \int_{Z_n \in M_1} q(Z_n) \det Z_n^{(m-n-1)/2} dZ_n,$$

$$\mathbf{P}\{(\Xi\Xi')^{-1/2}\Xi \in M_2\} = \int_{H^{(n)} \in M_2} \mu(dH).$$

Полярное разложение комплексных случайных матриц. Пусть Ξ — прямоугольная случайная комплексная матрица размера $m \times n$, $m \geqslant n$. Предположим, что существует совместная плотность распределения действительных и мнимых частей элементов ξ_{ij} матрицы Ξ, равная $p(X)$, где X — комплексная матрица того же размера, что и Ξ. Пусть L_1 — множество комплексных матриц размера $m \times n$, L_2 — множество эрмитовых неотрицательно-определенных матриц размера $n \times n$, L_3 — множество унитарных матриц размера $m \times n$, D_1 и D_2 — σ-алгебры борелевских множеств соответственно в L_2 и L_3.

Теорема 2. Пусть Γ — группа m-мерных унитарных матриц и ν — нормированная мера Хаара на ней, Ξ — случайная комплексная прямоугольная матрица размера $m \times n$, $m \geqslant n$ с плотностью распределения $p(X)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{S^2 \in M_1, U \in M_2\} = \tilde{C}_{nm} \int_{Z_n \in M_1, H^{(n)} \in M_2} p(\sqrt{Z_n} H^{(n)}) \det Z_n^{m-n-1} \nu(dH) dZ_n, \tag{5}$$

где $M_1 \in D_1$, $M_2 \in D_2$, $H = (h_{ij}) \in \Gamma$, $H^{(n)} = (h_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$; $\tilde{c}_{nm} = [\Pi_{i=1}^n \Gamma(m - i + 1)\, \pi^{n(n-1)-nm} 2^{n^2-n(n+1)/2}]^{-1}$.

Доказательство. Для любой ограниченной и непрерывной функции f элементов матрицы S^2 и U рассмотрим интеграл $\int f(ZZ^*, (ZZ^*)^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ$. В этом интеграле сделаем замену переменных $Z = YH$, $Y \in L_1$, $H \in L_2$. Якобиан J такой замены переменных равен 1. Тогда $\int f(ZZ^*, (ZZ^*)^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ = \int f(YY^*, (YY^*)^{-1/2} YH)\, p(YH)\, dY$. Используя доказательство теоремы 1, приходим к следующей формуле:

$$\int f(ZZ^*, (ZZ^*)^{-1/2} Z)\, p(Z)\, dZ = \int_{L_2 \times L_3} f(X, H^{(n)}) \times$$

$$\times p(\sqrt{X} H^{(n)})\, \varphi(X)\, \nu(dH)\, dX, \tag{6}$$

где $\varphi(X)$ — некоторая борелевская функция элементов матрицы X.

Найдем функцию $\varphi(X)$. Воспользуемся заменой переменных $X = CYC$; X, Y, $C \in L_2$. Ее якобиан равен $|\det C|^{2(n+1)}$. Якобиан замены переменных $Z = CX$, $C \in L_2$, Z, $X \in L_1$ равен $|\det C|^{2m}$. После преобразований получаем

$$\int f(CZZ^*C)\, p(CZ)\, dZ\, |\det C|^{2m} \int f(CXC)\, p(C\sqrt{X} H^{(n)}) \times$$

$$\times \varphi(X)\, \mu(dH)\, dX\, |\det C|^{2m},$$

$$\int f(ZZ^*)\, p(Z)\, dZ = \int f(CXC)\, p(\sqrt{CXC}\, H^{(n)}) \times$$

$$\times \varphi(CXC)\, \mu(dH)\, dX\, |\det C|^{2(n+1)}. \tag{7}$$

Пусть $p(Z) = (2\pi)^{-mn} \exp(-0{,}5 \operatorname{Sp} ZZ^*)$, $Z \in L_1$. Тогда из (7) следует $\varphi(X)\, |\det C|^{2m} = \varphi(CXC)\, |\det C|^{2(n+1)}$. При $C = X^{-1/2}$ $\varphi(X) = c \det X^{m-n-1}$.

Найдем константу c. Полагая $f \equiv 1$, $p(Z) = (2\pi)^{-nm} \exp(-0{,}5 \operatorname{Sp} ZZ^*)$, получаем $c^{-1} = (2\pi)^{-nm} \int_{L_2} \det X^{m-n-1} \exp(-0{,}5 \operatorname{Sp} X)\, dX$. В этом интеграле сделаем замену переменных $X = SS^*$, где S — комплексная верхняя треугольная матрица с действительными элементами на диагонали. Якобиан такой замены переменных легко вычислить. Он равен $2^n \Pi_{i=1}^n s_{ii}^{2n-2i+3}$ (s_{ii} — элементы матрицы S). Тогда

$$c^{-1} = 2^n (2\pi)^{-nm} \int \exp(-0{,}5\Sigma_{i>j} |s_{ij}|^2) \Pi_{i>j} d\,\mathrm{Re}\, s_{ij} d\,\mathrm{Im}\, s_{ij} \times$$

$$\times \Pi_{i=1}^n \int_{s_{ii}>0} \exp(-0{,}5 s_{ii}^2) s_{ii}^{2m-2i+1} ds_{ii} =$$

$$= \Pi_{i=1}^n \Gamma(m-i+1) \pi^{n(n-1)-nm} 2^{n^2-n(n+1)/2}.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если дополнительно к условиям теоремы 2 $p(\sqrt{Z_n}\, H^{(n)}) \equiv q(Z_n)$, $Z_n \in L_2$, $H^{(n)} \in L_3$, то матрицы $\Xi\Xi^*$ и $(\Xi\Xi^*)^{-1/2}\Xi$ независимы и имеют соответственно распределения $\mathbf{P}\{\Xi\Xi^* \in M_1\} = c_{nm} \int_{Z_n \in M_1} q(Z_n) \det Z_n^{m-n-1} dZ_n$, $\mathbf{P}\{(\Xi\Xi^*)^{-1/2}\Xi \in M_2\} = \int_{H^{(n)} \in M_2} \nu(dH)$.

Моменты детерминантов случайных матриц Грама. Распределения случайных детерминантов имеют громоздкий вид, поэтому представляет интерес нахождение их моментов.

Пусть G — группа m-мерных вещественных ортогональных матриц и μ — нормированная мера Хаара на ней.

Теорема 3. Если случайная вещественная матрица Ξ размера $m \times n$, $m \geqslant n$ имеет плотность распределения $p(X)$ и существует $\mathbf{M}(\det \Xi\Xi')^k$, где k — целое неотрицательное число, то $\mathbf{M}(\det \Xi\Xi')^k = c_{n,m} c_{n,m+2k}^{-1} \int p(\sqrt{Z_{(m+2k)\times n} Z'_{(m+2k)\times n}}\, H^{(n)}) \mu(dH) dZ_{(m+2k)\times n}$, где $Z_{(m+2k)\times n}$ — вещественная матрица размера $(m+2k)\times n$, $H^{(n)} = (h_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $dZ = \Pi dz_{ij}$, величины $c_{n,m}$ определены в теореме 1.

Доказательство. Используя теорему 1, находим

$$\mathbf{M}(\det \Xi\Xi')^k = c_{n,m} \int p(\sqrt{Z_n}\, H^{(n)}) \det Z_n^{(m+2k-n-1)/2} \mu(dH)\, dZ_n,$$

где Z_n — неотрицательно-определенная матрица порядка n, и

$$\int \psi(\sqrt{Z_{(m+2k)\times n} Z'_{(m+2k)\times n}})\, dZ_{(m+2k)\times n} =$$

$$= c_{n,m+2k} \int \psi(\sqrt{Z_n Z'_n}) \det Z_n^{(m+2k-n-1)/2} dZ_n,$$

где ψ — некоторая непрерывная функция, выбранная так, чтобы эти интегралы существовали. Из этих двух равенств и получаем утверждение теоремы 3.

Следствие 2. Если дополнительно к условиям теоремы 3 $p(X) = q(XX')$ для всех матриц X размера $m \times n$, то

$$\mathbf{M}(\det \Xi\Xi')^k = c_{n,m} c_{n,m+2k}^{-1} \int q(Z_{(m+2k)\times n} Z'_{(m+2k)\times n})\, dZ.$$

В качестве примера случайной матрицы, удовлетворяющей условию $p(X) = q(XX')$, может служить матрица, плотность которой равна $(2\pi)^{-mn/2} \exp\{-0{,}5 \operatorname{Sp} R_n^{-1} XX'\} \det R_n^{-m/2}$, где R_n — положительно-определенная матрица. В этом случае $\int q(Z_{(m+2k)\times n} Z'_{(m+2k)\times n}) \times$ $\times dZ_{(m+2k)\times n} = (2\pi)^{-mn/2} \int \det R_n^{-m/2} \exp(-0{,}5 \operatorname{Sp} R_n^{-1} Z_{(m+2k)\times n} \times$ $\times Z'_{(m+2k)\times n})\, dZ_{(m+2k)\times n} = (2\pi)^{kn} \det R_n^k$.

Еще один пример плотности матрицы Ξ, удовлетворяющей следствию 2:

$$p(X) = \begin{cases} c, & \operatorname{Sp} XX' \leqslant 1, \\ 0, & \operatorname{Sp} XX' > 1, \end{cases} \qquad c = \Gamma((n+m)/2+1)\, \pi^{-(n+m)/2}.$$

В этом случае моменты k-го порядка случайных величин $\det \Xi\Xi'$ равны $c_{n,m} c_{n,m+2k}^{-1} \Gamma((n+m)/2+1)\, \Gamma^{-1}((n+m+2k)/2+1)\, \pi^{2k}$.

Сингулярные собственные числа случайных матриц. Пусть Ξ— вещественная случайная матрица размера $m \times n$. Сингулярными собственными числами матрицы Ξ назовем собственные числа матрицы $\Xi\Xi'$. Если элементы матрицы Ξ удовлетворяют условиям теоремы 1, то плотность матрицы $\Xi\Xi'$ равна

$$Q(Z_n) = c_{n,m} \int p(\sqrt{Z_n} H^{(n)}) \det Z_n^{(m-n-1)/2} \mu(dH).$$

Если собственные числа $\lambda_k(\omega)$ упорядочены по возрастанию, то, очевидно, они являются случайными величинами. Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. Если элементы матрицы Ξ удовлетворяют условиям теоремы 1, то собственные числа λ_i, $i = \overline{1, n}$ с вероятностью 1 различны.

Доказательство. Если хотя бы два числа λ_i совпадают между собой, то выражение $\Delta = \Pi_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$ должно быть равно нулю. Используя формулу для детерминанта Вандермонда, получаем

$$\Delta^2 = \det(s_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}, \quad s_0 = n, \quad s_k = \operatorname{Sp}\Xi_n^k, \quad k = \overline{1, 2n-2}.$$

Но $\det(s_{i+j})$— это некоторая полиноминальная функция элементов матрицы Ξ_n, не равная тождественно нулю. Так как у элементов матрицы Ξ_n существует совместная плотность распределения, то $P\{\Delta^2 = 0\} = 0$. Лемма 1 доказана.

Пусть Θ_n — случайная матрица, вектор-столбцы которой равны $\vec{\theta}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\vec{\theta}_{1i} \geqslant 0$, G — группа n-мерных вещественных ортогональных матриц, B — σ-алгебра борелевских множеств группы G, μ — нормированная мера Хаара на группе G.

Теорема 4. Если существует плотность распределения случайной матрицы Ξ размера $m \times n$, $m \geqslant n$, то

$$\mathbf{P}\{\Theta_n \in E,\ \alpha_i < \lambda_i < \beta_i,\ i = \overline{1, n}\} = c_{1n} \times$$
$$\times \int Q(X_n Y_n X_n')\, \Pi_{i>j}(y_i - y_j)\, \mu(dX_n)\, dY_n, \qquad (8)$$

где интегрирование ведется по области $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > 0$, $X_n \in E$, $x_{1i} \geqslant 0$, $\alpha_i < y_i < \beta_i$, $i = \overline{1, n}$, $X_n \in G$, $Y_n = (\delta_{ij} y_i)$, $dY_n = \Pi_i dy_i$; $c_{1n} = 2^{-n} \pi^{n(n+1)/4} \Pi_{i=1}^n \{\Gamma[(n-i+1)/2]\}^{-1}$.

Доказательство. Для любой ограниченной и непрерывной функции $f(\Theta_n, \Lambda_n)$ элементов матриц Θ_n, $\Lambda_n = (\delta_{ij}\lambda_i)$ в силу леммы 1 $\mathbf{M}[f(\Theta_n, \Lambda_n)/\theta_{1i} \geqslant \varepsilon_i, \ i = \overline{1, n}]\, \mathbf{P}\{\theta_{1i} \geqslant \varepsilon_i, \ i = \overline{1, n}\} = \int f(X_n, Y_n)\, p(Z_n)\, dZ_n$, где интегрирование ведется по области $\{x_{1i} \geqslant \varepsilon, i = \overline{1, n}, y_1 > \ldots > y_n\}$, матрицы Y_n и X_n удовлетворяют уравнению $Z_n = X_n Y_n X_n'$, ε — произвольная постоянная, меньшая 1.

Так как якобиан преобразования $Z_n = H_n T_n H_n'$, где T_n — симметричная вещественная матрица, $H_n \in G$, равен единице, то

$$\mathbf{M}[f(\Theta_n, \Lambda_n)/\theta_{1i} \geqslant \varepsilon, i = \overline{1, n}]\, \mathbf{P}\{\theta_{1i} \geqslant \varepsilon, i = \overline{1, n}\} = \\ = \int f(H_n X_n, Y_n)\, p(H_n Z_n H_n')\, dZ_n, \tag{9}$$

где область интегрирования равна $\{\Sigma_{k=1}^n h_{1k} x_{ki} \geqslant \varepsilon, \ i = \overline{1, n}, \ y_1 > \ldots \ldots > y_n > 0\}$. Рассмотрим замену переменных $Z_n = U_n Y_n U_n'$, $U_n \in G$, где элементы матрицы U_n заданы с помощью углов Эйлера u_i [4], которые принимают значения из множества K так, что первая ненулевая компонента каждого вектор-столбца матрицы U_n больше нуля. Очевидно, что число переменных слева и справа в равенстве $Z_n = U_n Y_n U_n'$ одинаково, на множестве $\{Z_n : y_1 > \ldots > y_n > 0\}$ это преобразование взаимно однозначно и элементы матрицы $U_n Y_n U_n'$ почти всюду непрерывно дифференцируемы по параметрам y_j, u_i, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n(n-1)/2}$. После замены переменных $Z_n = U_n Y_n U_n'$ интеграл (9) приобретает следующий вид:

$$\int f(H_n U_n, Y_n)\, p(H_n U_n Y_n U_n' H_n')\, J(U_n, Y_n)\, dY_n \Pi_{i=1}^l du_i, \tag{10}$$

где $J(U_n, Y_n)$ — якобиан преобразования $Z_n = U_n Y_n U_n'$, $l = n(n-1)/2$ и область интегрирования равна $\{\Sigma_{k=1}^n h_{1k} u_{ki} \geqslant \varepsilon, \ i = \overline{1, n}, \ y_1 > \ldots \ldots > y_n > 0, \ u_j \in K, \ j = \overline{1, l}\}$.

Выражение (10) от матрицы H_n не зависит, поэтому, интегрируя его по мере Хаара μ, получаем

$$\int_{h_{1i} \geqslant \varepsilon, \, y_1 > \ldots > y_n} f(H_n, Y_n)\, p(H_n Y_n H_n')\, \psi(Y_n)\, \mu(dH_n)\, dY_n, \tag{11}$$

где $\psi(Y_n) = \int J(Y_n, U_n) \Pi_{i=1}^l du_i$. Из работы [1] следует, что $J(Y_n, U_n) = \Pi_{i>j}(y_i - y_j)\, \varphi(U_n)$, $u_i \in K$, $i = \overline{1, l}$, $\varphi(U_n)$ — некоторая борелевская функция углов Эйлера матрицы U_n. Значит, $\psi(Y_n) = \Pi_{i>j}(y_i - y_j)\, c$, где c — некоторая постоянная. Подставляя $\psi(Y_n)$ в (11) в силу произвольности ε, получаем $\mathbf{P}\{\theta_{1i} = 0, \ i = \overline{1, n}\} = 0$. Следовательно, можно считать, что первые компоненты векторов

$\vec{\theta}_l$ неотрицательны. При $f\equiv 1$, $p(Z_n)=2^{-n/2}\pi^{-n(n+1)}\exp\{-0{,}5\times$ $\times \operatorname{Sp} Z_n^2\}$ значение константы c приведено в книге [1].

Найдем теперь распределение собственных чисел и векторов матрицы $\Xi\Xi^*$, где матрица Ξ удовлетворяет условиям теоремы 2. Плотность распределения матрицы $\Xi\Xi^*$ найдена в теореме 2, обозначим ее $f(Z_n)$. Собственные числа λ_k матрицы $\Xi\Xi^*$ располагаем в возрастающем порядке, а собственные векторы $\vec{\theta}_i$, $i=\overline{1,m}$ выбираем такими, чтобы $(\vec{\theta}_i,\vec{\theta}_i)=1$ и $\arg\theta_{1i}=c_i$, $i=\overline{1,n}$, где c_i — некоторые неслучайные числа.

Теорема 5. Пусть Γ — группа n-мерных унитарных матриц, ν — нормированная мера Хаара на ней, B — σ-алгебра борелевских множеств группы Γ. Тогда

$$\mathbf{P}\{\Theta_n\in E,\ \alpha_i<\lambda_i<\beta_i,\ i=\overline{1,n}\}=c_{2n}\int f(U_nY_nU_n^*)\,\Pi_{i>l}(y_i-$$
$$-y_j)^2\,\nu(dU/\arg u_{1i}=c_i,\ i=\overline{1,n})\,dY_n, \tag{12}$$

где интегрирование ведется по области $y_1>\ldots>y_n>0$, $\alpha_i<$ $<y_i<\beta_i$, $i=\overline{1,n}$, $U_n\in E\in B$, $\nu(dU_n/\arg u_{1i}=c_i)$ — регулярная условная мера Хаара, $c_{2n}=[\pi^{-n^2+n/2}\Pi_{j=0}^{n-1}j!]^{-1}$.

Доказательство. Якобиан преобразования $X_n=U_nY_nU_n^*$, $Y_n=(\delta_{ij}y_i)$, где $y_1>\ldots>y_n>0$, $\arg u_{1i}=c_i$ и матрица U_n задается с помощью углов Эйлера, равен $J(U_n,Y_n)=\Pi_{p>l}(y_p-$ $-y_l)^2\,\varphi(U_n)$, $\varphi(U_n)$ — некоторая орелевская функция углов Эйлера матрицы U_n. Как и при доказательстве теоремы 4, для любой ограниченной и непрерывной функции $g(\Theta_n,\Lambda_n)$ элементов матриц Θ_n и Λ_n

$$\mathbf{M}g(\Theta_n,\Lambda_n)=\int g(H_nU_n,Y_n)\,f(H_nU_nY_nU_n^*H_n^*)\times$$
$$\times\Pi_{p>l}(y_p-y_l)^2\,\varphi(U_n)\,dY_n\Pi_{i=1}^{l}du_i, \tag{13}$$

где область интегрирования равна

$$\{y_1>\ldots>y_n>0,\ \arg\Sigma_{k=1}^{n}h_{1k}u_{ki}=c_i,\ i=\overline{1,n},$$
$$\arg u_{1i}=c_i,\ i=\overline{1,n}\}.$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что в формуле (13) функции f и φ приближенно заменены непрерывными функциями. Тогда

$$\mathbf{M}g(\Theta_n,\Lambda_n)=\int g(H_nU_n,Y_n)\,f(H_nU_nY_nU_n^*H_n^*)\,\Pi_{p>l}(y_p-$$
$$-y_l)^2\,\Pi_{i=1}^{n}\delta(\arg\Sigma_{k=1}^{n}h_{1k}u_{ki}-c_i)\,\varphi(U_n)\,dY_n\Pi_{i=1}^{l}du_i, \tag{14}$$

где $\delta(x)$ — δ-функция и область интегрирования равна $\{y_1>\ldots$ $\ldots>y_n>0,\ \arg u_{1i}=c_i,\ i=\overline{1,n}\}$.

Интегрируя обе части формулы (14) по мере Хаара ν, заданной на группе Γ матриц H, получаем формулу (12). Определим постоянную c_{2n}. Для этого в формуле (12) положим $f\equiv 1$, $f(X_n)=2^{-n/2}\pi^{-n^2}\exp(-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,X_nX_n^*)$. Тогда

$$1=c_{2n}\int 2^{-n/2}\pi^{-n^2}\exp\left(-0{,}5\Sigma_{i=1}^{n}y_i^2\right)\Pi_{l>j}(y_l-y_j)^2\,dY_n.$$

Теорема 5 доказана.

Неравенства для детерминантов и следов случайных матриц Грама. Пусть $A(x)=(\xi_{ij}(x))$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ — комплексные матрицы, $\xi_{ij}(x)$ — случайные измеримые функции. Рассмотрим детерминанты матриц $\det\left(\int A(x)A^*(x)F(dx)\right)$, где $F(x)$ — некоторая функция распределения. Неравенство

$$\det\left(\int A(x)A^*(x)F(dx)\right)^{-s}\leqslant\int\det\left[A(x)A^*(x)\right]^{-s}F(dx),\quad s=1,2,\ldots \tag{15}$$

следует из интегрального представления для детерминанта матрицы

$$\det\left(\int A(x)A^*(x)F(dx)\right)^{-s}=\left[(2\pi)^{-n/2}\int\exp\left(-\left(\int A(x)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times A^*(x)F(dx)\vec{y},\vec{y}\right)\right)\Pi_{i=1}^{n}dy_i\right]^{-2s}\leqslant\left[(2\pi)^{-n/2}\int\exp\left(-(A(x)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times A^*(x)\vec{y},\vec{y})\right)\Pi_{i=1}^{n}dy_i\right]^{-2s}F(dx)=\int\det\left[A(x)A^*(x)\right]^{-s}F(dx).$$

Пусть λ — минимальное собственное число матрицы $\int A(x)A^*(x)\times$ $\times F(dx)$. Неравенство

$$\lambda^{-1}\left(\int A(x)A^*(x)F(dx)\right)\leqslant\int\lambda^{-1}(A(x)A^*(x))F(dx) \tag{16}$$

получаем, используя формулу

$$\lambda^{-1}\left(\int(A(x)A^*(x)F(dx)\right)=$$

$$=\left[\min_{(\vec{y},\vec{y})=1}\left(\int A(x)A^*(x)F(dx)\vec{y},\vec{y}\right)\right]^{-1},$$

где $\vec{y}$ — комплексный n-мерный вектор.

Утверждения, аналогичные (15) и (16), справедливы для случайных матриц $\left(\int\Xi(x)\Xi^*(x)F(dx)\right)$, где $\Xi(x)=(\xi_{ij}(x))$ —случайная матрица размера $m\times n$, $\xi_{ij}(x)$ — измеримые ограниченные с вероятностью 1 случайные процессы.

Моменты обратных случайных матриц. Рассмотрим линейную модель множественной регрессии $\vec{y}=A\vec{\theta}+\vec{\varepsilon}$, где $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)$— вектор наблюдений некоторой переменной, $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ — вектор ошибок наблюдений, $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — вектор неизвестных параметров, A — случайная матрица значений контролируемых переменных размера $n \times m$. Предположим, что $\mathbf{M}\vec{\varepsilon} = 0$, $\mathbf{M}\vec{\varepsilon}'\vec{\varepsilon} = R$, R — положительно-определенная матрица. Тогда оценка вектора параметров $\vec{\theta}$ согласно методу наименьших квадратов равна $\hat{\vec{\theta}} = \lim_{\delta \downarrow 0} (A'R^{-1} \times A + I\delta)^{-1} A'R^{-1}\vec{y}$.

Рассмотрим случай, когда с вероятностью 1 существует $(\Xi' R^{-1} \Xi)^{-1}$ (Ξ — случайная матрица размера $n \times m$). Для оценки $\vec{\theta}$ в этом случае имеем $\hat{\vec{\theta}} = (\Xi' R^{-1} \Xi)^{-1} \Xi' R^{-1} \vec{y}$. Эта оценка будет несмещенной, а ковариационная матрица ее K равна $\mathbf{M}(\Xi' R^{-1} \Xi)^{-1}$. Найдем условия, когда существуют $\mathbf{M}(\Xi' R^{-1} \Xi)^{-s}$ и $\mathbf{M}[\det(\Xi R \Xi')]^{-s}$.

Теорема 6. Пусть у случайной матрицы Ξ существуют плотность распределения $p(X)$, $R > 0$, $m \geqslant n$ и интеграл

$$\int_{Z>0} Z^{-s} p(\sqrt{R}\sqrt{Z} H^{(n)}) \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \mu(dH), \tag{17}$$

где интегрирование ведется по множеству всех неотрицательно-определенных матриц Z n-го порядка, μ — нормированная мера Хаара на группе G ортогональных m-мерных матриц. Тогда $\mathbf{M}(\Xi R \Xi')^{-s} < \infty$ и

$$\mathbf{M}(\Xi R \Xi')^{-s} = c_{n,m} \det R^{n/2} \int_{Z>0} Z^{-s} \; p(\sqrt{R}\sqrt{Z} H^{(n)}) \times \\ \times \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \mu(dH). \tag{18}$$

Доказательство. Очевидно, что $K = \int (X'R^{-1}X)^{-1} p(X)\, dX$. После замены переменных $X = \sqrt{R}Y$ этот интеграл будет иметь вид $K = \int (Y'Y)^{-1} p(\sqrt{R}Y)\, dY \det R^{n/2}$. Используя теперь теорему 1 получаем (18). Теорема 6 доказана.

Следствие 3. Пусть дополнительно к условиям теоремы 6 $\sup_X p(X) < \infty$, $p(X) \equiv 0$, если $\operatorname{Sp} XX' \geqslant c_1 > 0$, где c_1 — некоторая постоянная, и $m > n + 2s - 1$, где $s \geqslant 1$. Тогда $\|K\| < \infty$.

Доказательство. Используя теорему 4, из формулы (18) получаем $\mathbf{M}(\Xi R \Xi')^{-s} = c_{1n} c_{n,m} \det R^{n/2} \int U Y^{-s} U' p(\sqrt{R} U \sqrt{Y} U' H^{(n)}) \times \times \Pi_{i>j} (y_i - y_j) \Pi_{i=1}^n y_i^{(m-n-1)/2} \Pi_i dy_i \mu(dU)$, где интегрирование ведется по области $y_1 > \ldots > y_n > 0$, $\Sigma_{i=1}^n y_i \leqslant c_1$, $u_{1i} \geqslant 0$, $U \in G$. Из этой формулы получаем оценку

$$\|K\| \leqslant c \int_{y_1 > \ldots > y_n > 0, \Sigma_{i=1}^n y_i^2 \leqslant c_1} \Sigma_{i=1}^n y_i^{-s} \Pi_{i>j} (y_i - y_j) \times \\ \times \Pi_{i=1}^n y_i^{(m-n-1)/2} dy_i,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная.

Отсюда следует $\|K\| < \infty$. Следствие 3 доказано.

1. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963. 2. *James A. T.* The non-central Wishart distribution.— Proc. Roy. Soc., 1955, A229, N 2. 3. *Гирко В. Л*, Случайные матрицы. Киев, 1975. 4. *Мурнаган Д. Ф.* Теория представлений групп. М., 1950. 5. *Юдицкий М. И.* Оптимальное планирование регрессионных экспериментов при наличии случайных ошибок в уровнях факторов.— В кн.: Вопросы статистики и управления случайными процессами. Киев, 1973. 6. *Дороговцев А. Я.* Свойства оценок параметров линейной гауссовской регрессии в дискретном случае.— Вычислительная и прикладная математика, 1971, вып. 31. 7. *Гирко В. Л.* Стохастическая проблема Ляпунова.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1979, вып. 20. 8. *Журбенко И. Г.* Некоторые моменты случайных определителей.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, 9, вып. 4.

Поступила в редколлегию 07.05.79

V. L. Girko

THE POLAR EXPANSION OF RANDOM MATRICES

Let $\Xi = (\xi_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $m \geqslant n$ be the rectangular real matrix, its elements being the stochastic values which have the joint distribution density. In this article the joint distribution of matrices $(\Xi \Xi')^{1/2}$ and $(\Xi\Xi')^{1/2}\, \Xi$ is found and is used to determine the Wishart distribution and the moments of the Gram determinants and of the reciprocal matrices.