УДК 519.21

В. А. ГРИЩЕНКО, мл. науч. сотр.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В данной статье изучается поведение потока попаданий процесса в некоторое подмножество состояний, когда вероятность выхода в это подмножество асимптотически мала. Данная проблематика привлекала внимание многих исследователей. Но мы ограничимся ссылкой на результаты А. Д. Соловьева [1, 2] изучения времени до первой потери требования в системах массового обслуживания с быстрым обслуживанием, поскольку на подобной модели будут проиллюстрированы наши результаты.

Исследуем ступенчатый процесс $\omega(t)$ и найдем поток его попаданий в подмножество D. Будем предполагать, что скачки процесса $\omega(t)$ происходят в моменты $t_1, \ldots, t_k, \ldots$, заданные соотношением $t_k = \sum_{i=1}^{k} \tau(x(i), i)$, где $x(i)$ —дискретная последовательность с областью значений E; $\{\tau(i, j)\}$, $i \in E$, $j = 1, 2, \ldots$ — семейство положительных независимых в совокупности и не зависящих от $x(\cdot)$ случайных величин, распределение которых не зависит от индекса j.

Введем случайную величину η_k равную 1, если $\omega(t_k) \in D$, и равную 0 в противном случае, $k \geq 1$. Будем изучать поток $\zeta_k =$

$=t_{\nu(k)}$, где $\nu(k)=\min\left\{m:\sum_{i=1}\eta_i=k\right\}$. Воспользуемся тем, что ζ_k можно определить в виде $\zeta_k=\xi_n(\mu_n(k))$, где $\mu_n(k)=\inf\{t:\eta_n(t)=k\}$, $\xi_n(t)=\sum_{i=1}^{[nt]}\tau(x(i),i)$, $\eta_n(t)=\sum_{i=1}^{[nt]}\eta_i$ (здесь индекс n играет роль параметра серии, от которого зависят все введенные величины, и по нему будет производиться предельный переход). Таким образом, изучение потока ξ_k, $k\geqslant 1$ сводится к анализу асимптотического поведения вектора $(\xi_n(t),\eta_n(t))$ при $n\to\infty$.

Относительно процесса $\omega(t)$ предполагается следующее: существует подмножество I из множества значений $\omega(t)$, такое, что если $\omega(t_k)\in I$, то при известной траектории $x(\cdot)$ семейство $\{\omega(t_i)\}$, $i>k$ не зависит от семейства $\{\omega(t_i)\}$, $i<k$, где k — натуральное число.

Обозначим $p_n(k,x(\cdot))=P_{x(\cdot)}\{\eta_k=1/A_{\max(0,k-N)}\}$; где $A_i=\{\omega(t_i)\in I\}$, $N=N(n)$ — некоторое целое положительное число, такое, что почти для всех $x(\cdot)$

$$\sup_k\sum_{i=k}^{k+N}p_n(i,x(\cdot))<\theta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0;\tag{1}$$

$$P_{x(\cdot)}\left\{\eta_k=1,\ \bigcap_{i=k-N}^{k=1}\bar{A}_i\right\}=o(p_n(k,x(\cdot))),\ k>N.\tag{2}$$

Пусть почти для всех $x(\cdot)$

$$P_{x(\cdot)}\{A_0\}=1,\ \sup_{i>j}P_{x(\cdot)}\{\bar{A}_i/A_j\}<\delta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0;\tag{3}$$

$$\sup_k P_{x(\cdot)}\{\bar{A}_{k+1}/\eta_k=1\}<\beta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\tag{4}$$

Определим случайный процесс $v_n(t)=\sum_{i=1}^{[nt]}p_n(i,x(\cdot))$.

Теорема 1. Если $v_n(t)\underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Rightarrow}}v_0(t)$, где $P\{v_0(t)<\infty\}=1$ для каждого $t<\infty$, и выполнены условия (1)—(4), то $\eta_n(t)\underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Rightarrow}}\Pi(v_0(t))$, где символом $\Pi(\lambda(t))$ обозначен неоднородный не зависящий от $v_0(t)$ пуассоновский процесс с параметром $\lambda(t)$.

Введем семейство случайных величин $\{\eta_k'\}$, $k\geqslant 1$, где η_k' принимает значение 1, если имеет место $\{\eta_k=1\}\cap A_{k+1}\cap\left(\bigcup_{i=k-N}^{k-1}A_i\right)$, и равна 0 в противном случае. Будем изучать сходимость $\eta_n'(t)=$

$= \sum_{i=1}^{[nt]} \eta'_i$, поскольку из условий теоремы очевидным образом вытекает $\eta_n(t) - \eta'_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0, \ t < \infty$.

В ходе доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если выполнены условия (1)—(4), то почти для каждого $x(\cdot)$ и каждой реализации $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{k-N-1}$ имеет место

$$\left|1 - \frac{P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1/\eta'_{k-1} = \ldots = \eta'_{k-N} = 0, \ \eta'_{k-N-1}, \ldots, \eta'_1\}}{p_n(k, x(\cdot))}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

$$P_{x(\cdot)}\left\{\eta'_k = 1/\bigcup_{i=k-N}^{k-1}\{\eta'_i = 1\}, \ \eta'_{k-N-1}, \ldots, \eta'_1\right\} \leqslant$$
$$\leqslant p_n(k, x(\cdot))(1 + o(1)).$$

Доказательство леммы.

$$P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1/\eta'_{k-1} = \ldots = \eta'_{k-N} = 0, \ \eta'_{k-N-1}, \ldots, \eta'_1\} =$$
$$= \frac{P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1, \ \eta'_{k-1} = \ldots = \eta'_{k-N} = 0/\eta'_{k-N-1}, \ldots, \eta'_1\}}{P_{x(\cdot)}\{\eta'_{k-1} = \ldots = \eta'_{k-N} = 0/\eta'_{k-N-1}, \ldots, \eta'_1\}}. \tag{5}$$

Оценим числитель последней дроби. Он равен

$$P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1, \ \eta'_{k-1} = \ldots = \eta'_{k-N} = 0/A_{k-N}\} P_{x(\cdot)}\{A_{k-N}/\eta'_{k-N-1}, \ldots$$
$$\ldots, \eta'_1\} + P_{x(\cdot)}\left\{\eta'_k = 1. \ \bigcup_{l=k-N+1}^{k-1} A_l, \ \eta'_{k-1} = \ldots\right.$$
$$\left.\ldots = \eta'_{k-N} = 0/\overline{A}_{k-N}, \ \eta'_{k-N-1}, \ldots, \eta'_1\right\} \times$$
$$\times P_{x(\cdot)}\{\overline{A}_{k-N}/\eta'_{k-N-1}, \ldots, \eta'_1\}.$$

Далее,

$$p_n(k, x(\cdot)) = P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1, \ \eta'_{k-1} = \ldots = \eta'_{k-N} = 0/A_{k-N}\} +$$
$$+ P_{x(\cdot)}\left\{\eta'_k = 1, \ \bigcup_{l=k-N}^{k-1}\{\eta'_l = 1\}/A_{k-N}\right\}.$$

Чтобы оценить второе слагаемое, воспользуемся неравенством

$$P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1/A_{k-l}\} = P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1/A_{k-l}, \ A_{k-N}\} =$$
$$= P_{x(\cdot)}\{\eta'_k = 1, \ A_{k-l}/A_{k-N}\}[P_{x(\cdot)}\{A_{k-l}/A_{k-N}\}]^{-1} <$$
$$< p_n(k, x(\cdot))(1 - \delta_n)^{-1}$$

для $i<N$. Тогда

$$P_{x(\cdot)}\left\{\eta'_k=1,\ \bigcup_{i=k-N}^{k-1}\{\eta'_i=1\}/A_{k-N}\right\}<\sum_{i=k-N}^{k-1}P_{x(\cdot)}\{\eta'_k=1,$$

$$\eta'_i=1/A_{k-N}\}=\sum_{i=k-N}^{k-1}P_{x(\cdot)}\{\eta'_i=1/A_{k-N}\}\,P_{x(\cdot)}\{\eta'_k=1,\ A_{i+1}\}<$$

$$<p_n(k,\ x(\cdot))\,\theta_n\,(1-\delta_n)^{-2}.$$

Следовательно, имеет место

$$P_{x(\cdot)}\{\eta'_k=1,\ \eta'_{k-1}=\ldots=\eta'_{k-N}=0/A_{k-N}\}=$$

$$=(1+o(1))\,p_n(k,\ x(\cdot)).$$

Аналогично

$$P_{x(\cdot)}\left\{\eta'_k=1,\ \eta'_{k-1}=\ldots=\eta'_{k-N}=0,\right.$$

$$\left.\bigcup_{i=k-N+1}^{k-1}A_i/\bar{A}_{k-N},\ \eta'_{k-N-1},\ \ldots,\ \eta'_1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P_{x(\cdot)}\left\{\eta'_k=1,\ \bigcup_{i=k-N+1}^{k-1}A_i/\bar{A}_{k-N},\ \eta'_{k-N-1},\ \ldots,\ \eta'_1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P_{x(\cdot)}\left\{\eta'_k=1/\bigcup_{i=k-N+1}^{k-1}A_i\right\}<p_n(k,\ x(\cdot))\,(1-\delta_n)^{-1}.$$

Обозначим $\delta'_{n,t}(x(\cdot))=\sup\limits_{[nt]>i>j}P_{x(\cdot)}\left\{\bar{A}_i/A_j,\ \sum\limits_{k=j}^{i}\eta'_k=0\right\}$. Поскольку для $\alpha\in\,]0,\ 1[$ $\delta'_{n,t}(x(\cdot))<1-\left(1-\frac{\delta}{1-\alpha}\right)^{\alpha^{-1}v_n(t)}$, то в силу определения η'_k для каждой реализации $\eta'_{i-1},\ \ldots,\ \eta'_j$

$$\sup_{i>j}P_{x(\cdot)}\{\bar{A}_i/A_j,\ \eta'_{i-1},\ \ldots,\ \eta'_j\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Теперь легко показать, что числитель в (5) равен $(1+\varepsilon_n(x(\cdot)))\,p_n(k,\ x(\cdot))$, где $\varepsilon_n(x(\cdot))<\varepsilon_n$, $\varepsilon_n\xrightarrow[n\to\infty]{1}0$.

Аналогично оценивается знаменатель и производится окончательная проверка утверждения леммы.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай одномерных распределений. Для многомерных распределений сходимость доказывается аналогично.

Найдем сначала распределение $\eta'_n(t)$ на фиксированной траектории $x(\cdot)\in K_L=\{x(\cdot):v_n(t)<L,\ n>n_0\}$, где L, n_0 — фиксированные числа. Условимся обозначать символом $\langle k\rangle$ совокупность сочетаний $\langle i_1, \ldots, i_k\rangle$ из множества $\overline{1, [nt]}$,

$$P_{x(\cdot)}\{\eta'_n(t)=k\}=\sum_{\langle k\rangle}\prod_{i=1}^{[nt]}P_{x(\cdot)}\{\eta'_i=0/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i-1}\}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k}(P_{x(\cdot)}\{\eta'_{i_j}=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i_j-1}\}P^{-1}_{x(\cdot)}(\eta'_{i_j}=0/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i_j-1}\}),$$

где $\tilde{\eta}_i=1$, если $i=i_l$, $l=\overline{1, k}$, и $\tilde{\eta}_i=0$ в противном случае.

Воспользовавшись неравенством $-x-x^2\leqslant\ln(1-x)\leqslant-x$, справедливым для $0\leqslant x\leqslant 1/2$, получим

$$\exp\left\{-\max_{\langle k\rangle}\sum_{i=1}^{[nt]}P_{x(\cdot)}\{\eta'_i=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i-1}\}\right\}\times$$

$$\times(1+P_{x(\cdot)}\{\eta'_i=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i-1}\})\leqslant\prod_{i=1}^{[nt]}(1-$$

$$-P_{x(\cdot)}\{\eta^1_i=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i-1}\})\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\min_{\langle k\rangle}\sum_{i=1}^{[nt]}P_{x(\cdot)}\{\eta'_i=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i-1}\}\right\}.$$

Отсюда согласно утверждению леммы

$$\sum_{i=1}^{[nt]}P_{x(\cdot)}\{\eta'_i=0/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i-1}\}=\exp\left\{-(1+o(1))\sum_{i=1}^{[nt]}p_n(i, x(\cdot))\right\}.$$

Осталось оценить сумму

$$\sum_{\langle k\rangle}\prod_{j=1}^{k}P_{x(\cdot)}\{\eta'_{i_j}=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i_j-1}\}(1-$$

$$-P_{x(\cdot)}\{\eta'_{i_j}=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i_j-1}\})^{-1}.$$

Для этого обозначим $\langle k\rangle_1$ множество тех сочетаний $\langle i_1, \ldots, i_k\rangle$, в которых для любых пар i_l, i_m $|i_l-i_m|>N$. Тогда

$$\sum_{\langle k\rangle}\prod_{j=1}^{k}P_{x(\cdot)}\{\eta'_{i_j}=1/\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{i_j-1}\}(1-$$

$$-P_{x(\cdot)}\{\eta'_{i_j}=1/\tilde{\eta}_1,\ldots,\tilde{\eta}_{i_{j-1}}\})^{-1}=\sum_{\langle k\rangle}\prod_{j=1}^{k}g_{i_j}(1-g_{i_j})^{-1}=$$

$$=\sum_{\langle k\rangle\setminus\langle k\rangle_1}\prod_{j=1}^{k}p_n(i_j,x(\cdot))(1-p_n(i_j,x(\cdot)))^{-1}+$$

$$+\sum_{\langle k\rangle}\prod_{j=1}^{k}g_{i_j}(1-g_{i_j})^{-1}+\sum_{\langle k\rangle\setminus\langle k\rangle_1}\prod_{j=1}^{k}g_{i_j}(1-g_{i_j})^{-1}-$$

$$-\sum_{\langle k\rangle\setminus\langle k\rangle_1}\prod_{j=1}^{k}p_n(i_j,x(\cdot))(1-p_n(i_j,x(\cdot)))^{-1}. \qquad (6)$$

Нетрудно убедиться, что первые две суммы не превосходят $(v_n(t))^k(k!)^{-1}(1+o(1))$, так как согласно лемме

$$\prod_{j=1}^{k}g_{i_j}(1-g_{i_j})^{-1}=(1+o(1))\prod_{j=1}^{k}p_n(i_j,x(\cdot)).$$

Поскольку $\sum_{\langle k\rangle}\prod_{j=1}^{k}p_n(i_j,x(\cdot))>(k!)^{-1}(v_n(t))^k-\sup_i p_n(i,x(\cdot))\times$ $\times(v_n(t))^{k-1}$, то справедливо равенство

$$\sum_{\langle k\rangle_1}\prod_{j=1}^{k}g_{i_j}(1-g_{i_j})^{-1}+\sum_{\langle k\rangle\setminus\langle k\rangle_1}\prod_{j=1}^{k}p_n(i_j,x(\cdot))(1-p_n(i_j,x(\cdot)))^{-1}=$$
$$=(k!)^{-1}(v_n(t)(1+o(1)))^k.$$

Остальные суммы в (6) стремятся к нулю. Оценим, например, последнюю из них:

$$\sum_{\langle k\rangle\setminus\langle k\rangle_1}\prod_{j=1}^{k}p_n(i_j,x(\cdot))(1-p_n(i_j,x(\cdot)))^{-1}<$$

$$<(v_n(t))^{k-1}\sup_k\sum_{i=k}^{k+N}p_n(i,x(\cdot))\,[(1-\sup_k p_n(k,x(\cdot)))^k(k-1)!]^{-1}<$$

$$<\theta_nL^{k-1}((1-\theta_n)^k(k-1)!)^{-1}.$$

Таким образом,

$$P_{x(\cdot)}\{\eta'_n(t)=k\}=(v_n(t)(1+o(1)))^k(k!)^{-1}\exp\{-(1+o(1))v_n(t)\},$$

откуда

$$|M_{x(\cdot)}\exp\{is\eta'_n(t)\}-\exp\{v_n(t)(e^{is}-1)\}|\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

3*

Наконец, ввиду непрерывности и ограниченности функции $\exp\{(e^{is}-1)x\}$ и слабой сходимости $v_n(t)$ к $v_0(t)$ справедливо

$$|M_{K_L}\exp\{v_n(t)(e^{is}-1)\}-M_{K_L}\exp\{v_0(t)(e^{is}-1)\}|\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Из последних двух соотношений и из того, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует такое L, что $P\{K_L\}>1-\varepsilon$, вытекает справедливость утверждения теоремы.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и

$$\max_{[nt]>k} M\left(\sum_{j=k}^{k+N}\tau(x(j),j)/\eta_{k+N}=1\right)\underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}}0,\quad t<\infty; \tag{7}$$

$$\sup_k \overline{\lim_{n\to\infty}}\, nM\tau(k,1)<\infty, \tag{8}$$

то

$$|M\exp\{i(s_1\xi_n(t)+s_2\eta_n(t)\}-M(M_{x(\cdot)}\exp\{is_1\xi_n(t)\}\times$$
$$\times M_{x(\cdot)}\exp\{is_2\eta_n(t)\})|\underset{n\to\infty}{\to}0, \tag{9}$$

а если существуют $\xi_0(t)$ и $\eta_0(t)$ — пределы в смысле сходимости конечномерных распределений для процессов $\xi_n(t)$ и $\eta_n(t)$, то

$$\zeta_k=\xi_n(\mu_n(k))\underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Rightarrow}}\xi_0(\eta_0^{-1}(k)), \tag{10}$$

где $\eta_0^{-1}(k)=\inf\{t:\eta_0(t)=k\}$.

Доказательство. Разобьем отрезок $[0,t]$ точками $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots<t_{j_t}^{(n)}=t$, где $t_j^{(n)}=j\max(\sqrt{\theta_n},\sqrt{\delta_n})$, $j=\overline{0,j_t}$; $j_t=t/\max(\sqrt{\theta_n},\sqrt{\delta_n})$. Тогда $t_{j+1}^{(n)}-t_j^{(n)}=\max(\sqrt{\theta_n},\sqrt{\delta_n})\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Обозначим $B_n=\bigcap_{i=1}^{j_t}A_{[nt_i]}$, $C_n=\bigcap_{i=1}^{j_t}\bigcap_{l=i-N}^{i+N}\{\eta_l'=0\}$. Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty}P\{B_n\}=\lim_{n\to\infty}P\{\overline{C}_n\}=\lim_{n\to\infty}\theta_n[t/\max(\sqrt{\theta_n},\sqrt{\delta_n})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\delta_n[t/\max(\sqrt{\theta_n},\sqrt{\delta_n})]=0.$$

Введем величины $\xi^{(j)}=\sum_{k=[nt_j]+1}^{[nt_{j+1}]}\tau(x(k),k)$, $\overline{\xi}^{(j)}=\xi^{(j)}\chi_{\{\overline{\eta}^{(j)}=0\}}$, $\hat{\xi}^{(j)}=\xi^{(j)}-\overline{\xi}^{(j)}$, $\overline{\eta}^{(j)}=\sum_{k=[nt_j]+1}^{[nt_{j+1}]}\eta_k'$, где χ_A — индикатор события A.

Докажем, что процесс $\bar{\xi}_n(t) = \sum_{k=1}^{jt} \bar{\xi}^{(k)}$ и процессы $\hat{\xi}_n(t) = \sum_{k=1}^{jt} \hat{\xi}^{(k)}$, $\eta_n(t)$ асимптотически условно независимы. Из величин $\bar{\xi}^{(k)}$ и $\hat{\xi}^{(k)} + \bar{\eta}^{(k)}$ хотя бы одна равна нулю, значит, $\bar{\xi}^{(k)}u_h(\hat{\xi}^{(k)}v_k + \bar{\eta}^{(k)}w_h) = 0$. Поэтому

$$M_{x(\cdot)} \exp\left\{i\left(\sum_{k=1}^{jt} u_h\bar{\xi}^{(k)} + \sum_{k=1}^{jt} v_h\hat{\xi}^{(k)} + \sum_{k=1}^{jt} w_h\bar{\eta}^{(k)}\right)\right\} =$$

$$= M_{x(\cdot)} \prod_{k=1}^{jt} \exp\{i(u_h\bar{\xi}^{(k)} + v_h\hat{\xi}^{(k)} + w_h\bar{\eta}^{(k)})\} =$$

$$= M_{x(\cdot)} \prod_{k=1}^{jt} (\exp\{iu_h\bar{\xi}^{(k)}\} + \exp\{i(v_h\hat{\xi}^{(k)} + w_h\bar{\eta}^{(k)})\} - 1).$$

Учитывая, что величина $\bar{\xi}^{(k)}$ и пара $(\hat{\xi}^{(k)}, \bar{\eta}^{(k)})$ независимы на $\{x(\cdot) \cap B_n \cap C_n\}$ при разных k, и используя неравенство

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|,$$

если $|a_k| \leqslant 1$, $|b_k| \leqslant 1$, получаем

$$\left|M_{(x\cdot),B_n\cup C_n} \exp\left\{i\left(\sum_{k=1}^{jt} u_h\bar{\xi}^{(k)} + \sum_{k=1}^{jt} v_h\hat{\xi}^{(k)} + \sum_{k=1}^{jt} w_h\bar{\eta}^{(k)}\right)\right\} -\right.$$

$$\left.- M_{x(\cdot)} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{jt} u_h\bar{\xi}^{(k)}\right\} M_{x(\cdot)} \exp\left\{i\left(\sum_{k=1}^{jt} v_h\hat{\xi}^{(k)} + \sum_{k=1}^{jt} w_h\bar{\eta}^{(k)}\right)\right\}\right| =$$

$$= \left|\prod_{k=1}^{jt} M_{x(\cdot)} \exp\{i(u_h\bar{\xi}^{(k)} + v_h\hat{\xi}^{(k)} + w_h\bar{\eta}^{(k)})\} -\right.$$

$$\left.- \prod_{k=1}^{jt} M_{x(\cdot)} \exp\{iu_h\bar{\xi}^{(k)}\} M_{x(\cdot)} \exp\{i(v_h\hat{\xi}^{(k)} + w_h\bar{\eta}^{(k)})\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{jt} |M_{x(\cdot)} \exp\{i(u_h\bar{\xi}^{(k)} + v_h\hat{\xi}^{(k)} + w_h\bar{\eta}^{(k)})\} -$$

$$- M_{x(\cdot)} \exp\{iu_h\bar{\xi}^{(k)}\} M_{x(\cdot)} \exp\{iv_h\hat{\xi}^{(k)} + w_h\bar{\eta}^{(k)})\}| =$$

$$= \sum_{k=1}^{jt} |M_{x(\cdot)} \exp\{iu_h\bar{\xi}^{(k)}\} - 1|\, |M_{x(\cdot)} \exp\{i(v_h\hat{\xi}^{(k)} + w_h\bar{\eta}^{(k)})\} - 1| \qquad (11)$$

Заметим, что для всякого $\delta > 0$

$$\sup_{|u_k|<C} |M_{x(\cdot)} \exp\{iu_k \bar{\xi}^{(k)}\} - 1| < 2P_{x(\cdot)} \{\bar{\xi}^{(k)} > \delta\} + \delta C,$$

так как $|e^{i\alpha} - 1| \leqslant |\alpha|$. Из того, что $\sup\limits_{\substack{|v_k|<C \\ |w_k|<C}} \sum\limits_{k=1}^{lt} |M_{x(\cdot)} \exp\{iv_k \hat{\xi}^{(k)} + w_k \bar{\eta}^{(k)}\} - 1| < \infty$, и из произвольности δ вытекает, что последняя сумма в (11) стремится к нулю. Этим доказана асимптотическая условная независимость. Чтобы доказать (9), осталось применить (7).

Используя результаты [4], легко проверить утверждение (10). Теорема доказана.

Если последовательность $x(\cdot)$ — эргодическая, то в условиях теоремы 2 процессы $\xi_n(t)$ и $\eta_n(t)$ асимптотически независимы. В этом случае можно указать явное выражение предельного распределения ζ_k в терминах характеристических функций. При этом для нахождения $\xi_0(t)$ можно воспользоваться результатами работы [3].

Рассмотрим случай, когда во множестве E содержится конечное число элементов. Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_r\}$ — все последовательности длины N со значениями из $\bar{E}$. Предположим, существуют такие константы p_i, $i = \overline{1, r}$, что

$$\lim_{n\to\infty} nP\{\eta_N = 1/\{x(1), \ldots, x(N)\} = e_i\} = p_i. \tag{12}$$

Обозначим $\xi_n^{(i)} = \tau(i_N, 1)$, где $\{i_1, \ldots, i_N\} = e_i$. Пусть

$$n(M \exp\{i\lambda\xi_n^{(i)}\} - 1) = \varphi_n^{(i)}(\lambda) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi_0^{(i)}(\lambda), \tag{13}$$

$\nu_n^{(i)}(t)$ — частота появления e_i за $[nt]$ шагов последовательности $x(k)$,

$$M \exp\left\{i \sum_{j=1}^{r} s_j \nu_n^{(j)}(t)\right\} = \psi_n(t, s_1, \ldots, s_r) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \psi_0. \tag{14}$$

Теорема 3. Если в дополнение к условиям теоремы 2 имеют место (12)—(14), то

$$\lim_{n\to\infty} M \exp\{i(\lambda\xi_n(t) + \mu\eta_n(t))\} = \psi_0(t, -it(\varphi_0^{(1)}(\lambda) + p_1(e^{i\mu} - 1)), \ldots, -it(\varphi_0^{(r)}(\lambda) + p_r(e^{i\mu} - 1))).$$

Справедливость этого утверждения легко установить, используя предельные теоремы [4].

Пример. Пусть задана система массового обслуживания, состоящая из m обслуживающих устройств. На нее поступает ординарный поток требований, причем k-е требование приходит в момент $\tau_n(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_n(x(i), i)$ и время его обслуживания равно $\mu_n(x(k), k)$; $\{\mu_n(i, k), \tau_n(i, k)\}$, $i \in E$, $k = 1, 2, \ldots$ — семейство независимых в совокупности случайных величин, распределение которых не зависит от индекса k; $x(k)$ — дискретная последовательность со значениями в E.

Требование теряется, если в момент его поступления в системе находится на обслуживании m требований. Необходимо найти предельное поведение при $n \to \infty$ потока потерянных требований ζ_k, когда обслуживание производится асимптотически быстро.

Предположим, выполняются условия:

а) существует число $h > 0$ такое, что $P\{\tau_n(i, 1) > h\} = 1$, $i \in E$, $n \geqslant 1$;

б) существует число $H > 0$ такое, что $P\{\mu_n(i, 1) < H\} = 1$, $i \in E$, $n \geqslant 1$;

в) $\sup_i P\{\tau_n(i, 1) < \mu_n(i, 1)\} = \pi_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Покажем, что эти условия обеспечивают выполнимость (1)—(3). Положим $N = [H/h]$. Согласно а), б), если в момент $\tau_n(k) - 0$ в системе находится необслуженное требование, то оно поступило не раньше момента $\tau_n(k - N)$. Следовательно, если в момент $\tau_n(k)$ произошла потеря требования, то в ней находится m требований, первое из которых поступило не раньше $\tau_n(k - N)$ и не позже $\tau_n(k - 1)$.

Введем случайную величину $\chi_n(i, j)$ равную 1, если $\sum_{l=1}^{j-1} \tau_n(x(l), l) < \mu_n(x(i), i)$, и 0 — в противном случае; т. е. $\chi_n(i, j)$ есть индикатор того, что требование, поступившее в момент $\tau_n(i)$, к моменту $\tau_n(j)$ не обслужено.

Положим $p_n(k, x(\cdot)) = P_{x(\cdot)}\{\eta_k = 1/A_{k-N}\}$, где A_{k-N} — событие, заключающееся в том, что в момент $\tau_n(k-N) - 0$ система была свободная; $\eta_k = 1$, если $\sum_{i=k-N}^{k-1} \chi(i, k) = m$, и 0 в противном случае.

Выполнимость (1) и (3) проверяется очевидным образом. Проверим условие (2).

Пусть B_k^i — событие, заключающееся в том, что все требования, поступившие ранее момента $\tau_n(k-i)$, к моменту $\tau_n(k)$ обслужены, а требование, поступившее в момент $\tau_n(k-i)$, к моменту $\tau_n(k)$ находится на обслуживании. Тогда

$$p_n(k, x(\cdot)) = \sum_{i=k-N}^{k-m} P_{x(\cdot)}\{\eta_k = 1, \ B_k^i/A_{k-N}\} =$$

$$= \sum_{i=k-N}^{k-m} P_{x(\cdot)}\{\eta_k = 1/B_k^i, A_{k-N}\} P_{x(\cdot)}\{B_k^i/A_{k-N}\}.$$

Из определения B_k^l также вытекает цепочка равенств

$$P_{x(\cdot)}\left\{\eta_k=1,\ \bigcap_{i=k-N}^{k-1}\overline{A}_i\right\}=\sum_{l=N}^{m}P_{x(\cdot)}\left\{\eta_k=1,\ B_k^l,\ \bigcap_{i=k-N}^{k-1}A_i\right\}=$$

$$=\sum_{l=N}^{m}P_{x(\cdot)}\left\{\eta_k=1,\ B_k^l,\ \bigcap_{i=k-N}^{k-l}\overline{A}_i\right\}=$$

$$=\sum_{l=N}^{m}P_{x(\cdot)}\left\{\eta_k=1/B_k^l,\ \bigcap_{i=k-N}^{k-l}\overline{A}_i\right\}P_{x(\cdot)}\left\{B_k^l,\ \bigcap_{i=k-N}^{k-l}\overline{A}_i\right\}=$$

$$=\sum_{l=N}^{m}P_{x(\cdot)}\{\eta_k=1/B_k^l\}P_{x(\cdot)}\left\{B_k^l,\ \bigcap_{i=k-N}^{k-l}\overline{A}_i\right\}.$$

Далее,

$$p_n(k,x(\cdot))=\sum_{l=k-N}^{k-m}P_{x(\cdot)}\{\eta_k=1/B_k^l\}P_{x(\cdot)}\{B_k^l/A_{k-N}\}.$$

В то же время

$$P_{x(\cdot)}\left\{B_k^l,\ \bigcap_{i=k-N}^{k-l}\overline{A}_i\right\}<P_{x(\cdot)}\{B_k^l,\overline{A}_{k-N}\}\Rightarrow P_{x(\cdot)}\{\overline{A}_{k-N}\}P_{x(\cdot)}\{B_k^l/\overline{A}_{k-N}\}.$$

Наконец,

$$P_{x(\cdot)}\{B_k^l/A_{k-N}\}>P_{x(\cdot)}\left\{B_k^l,\ \bigcap_{j=k-N+1}^{l}A_j/A_{k-N}\right\}>$$

$$>P_{x(\cdot)}\{B_k^l/A_{k-l}\}(1-\pi_n)^N.$$

Справедливость (2) становится очевидной в силу $P_{x(\cdot)}\{\overline{A}_{k-N}\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Тем самым установлена возможность применения, доказанных нами предельных теорем для анализа времени до первой потери требования. Сформулируем, например, следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполняются условия а) — в) и последовательность $x(k)$ — эргодическая, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}p(k,x(\cdot))=\lambda$, $0<\lambda<\infty$; $\sup\limits_{n,i\in E}M\tau_n(i,1)<\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}Mn^{-1}\tau_n(n)=q<\infty$.

Тогда $P\{n^{-1}\zeta_1>x\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp\{-q^{-1}\lambda x\}$.

1. *Соловьев А. Д.* Резервирование с быстрым восстановлением.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, № 1. 2. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 6. 3. *Анисимов В. В., Война А. А.* Предельные теоремы для схем суммирования на случайных процессах с произвольным пространством состояний.— Теория вероятностей и матема-

тическая статистика, 1978, вып. 19. 4. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к дискретным схемам суммирования. Киев, 1976.

Поступила в редколлегию 19.12.78

V. A. Grishchenko

THE LIMIT THEOREMS FOR A CLASS OF RANDOM PROCESSES

Some classes of random non-Markovian step-processes are investigated. In particular the limit distribution of the flow of hits into the fixed set of states is obtained.