УДК 519.21

В. А. ДМИТРОВСКИЙ, ассист.
Обнинский филиал Московского
инженерно-физического института

НЕРАВНОМЕРНОЕ УСЛОВИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. Пусть $\xi(t)$ — стохастическое поле на r-мерном кубе, $t \in T = [0, 1]^r$. Введем функцию $F_\xi(t, \delta, u) = \sup\limits_{\substack{t+h \in T \\ |h|<\delta}} P\{|\xi(t) - \xi(t+h)| \geqslant u\}$, $|h| = \max\limits_{i=\overline{1,r}} |h_i|$. Условия, достаточные для непрерывности $\xi(t)$ с вероятностью 1, обычно давались в терминах равномерной по $t \in T$ сходимости ряда, члены которого определялись функцией $F_\xi(t, \delta, u)$ (см., например, [1—5]). В настоящей работе показано, что достаточным условием непрерывности поля служит сходимость аналогичного ряда по норме пространства $L^1(T)$ интегрируемых на T функций. Достаточные условия Колмогорова [1, с. 235] и Ферника (для гауссовских полей) [5, с. 97] являются частными случаями полученных результатов.

2. Для простоты рассмотрим одномерный случай.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ — сепарабельный стохастически непрерывный процесс, $t \in T = [0, 1]$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая целочисленная последовательность, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$,

$$\Phi_n(t, u) = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{a_{k+1}} F_\xi(t, 2^{-a_k}, ub_k).$$

Если существует $u_0 \geqslant 0$ такое, что для всех $u > u_0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\Phi_n(t, u) \in L^1(T)$, то

$$P\{\sup_{\substack{(t, t+h) \in T \otimes T \\ |h|<\delta}} |\xi(t) - \xi(t+h)| \geqslant u\} \leqslant 2\int_0^1 \Phi_n(t, u, B_n^{-1})\, dt,$$

где $B_n = b_n + 2\sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k$, $2^{-a_{n+1}} < \delta \leqslant 2^{-a_n}$, $u > u_0 B_n$.

Доказательство. Введем новый процесс $\eta(t) = \xi(\{|t|\})$, $t \in R$, где $\{\alpha\}$ означает дробную часть α. Очевидно, что процесс $\eta(t)$ есть 2-периодическая четная случайная функция на всей числовой прямой. Обозначим через S_k^x множество точек вида $x \pm i \times 2^{-a_k}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{a_k}$; $S^x = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k^x$. S^x является сепарабельным на $[x-1, x+1]$ множеством. Введем события

$$A_{k,l}^x(u) = \{\sup_{j=1,2,\ldots 2^{a_{k+1}-a_k}} |\eta(x + l\cdot 2^{-a_k}) - \eta(x + l\cdot 2^{-a_k} + j\cdot 2^{-a_{k+1}})| < ub_k\},$$

$$D_n^x(u) = \bigcap_{k=n}^{\infty} \bigcap_{l=-2^{a_k}}^{2^{a_k}-1} A_{k,l}^x$$

и оценим вероятности их дополнений:

$$P(\overline{A_{k,l}^x(u)}) = P\left(\bigcup_{j=1}^{2^{a_{k+1}-a_k}} \{|\eta(x + l\cdot 2^{-a_k}) - \eta(x - l\cdot 2^{-a_k} + j\cdot 2^{-a_{k+1}})| \geqslant ub_k\}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{2^{a_{k+1}-a_k}} P\{|\eta(x + l\cdot 2^{-a_k}) - \eta(x + l\cdot 2^{-a_k} + j\cdot 2^{-a_{k+1}})| \geqslant ub_k\} \leqslant \sum_{j=1}^{2^{a_{k+1}-a_k}} F_\eta(x + l\cdot 2^{-a_k}, j\cdot 2^{-a_{k+1}}, ub_k) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{a_{k+1}-a_k} F_\eta(x + l\cdot 2^{-a_k}, 2^{-a_k}, ub_k),$$

$$P(\overline{D_n^x(u)}) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=-2^{a_k}}^{2^{a_k}-1} 2^{a_{k+1}-a_k} F_\eta(x + l\cdot 2^{-a_k}, 2^{-a_k}, ub_k).$$

Докажем, что для любых $(t, t+h) \in S^x \otimes S^x$, где $2^{-a_{n+1}} < |h| \leqslant 2^{-a_n}$, $P(\{|\eta(t) - \eta(t+h)| < uB_n\} \mid D_n^x(u)) = 1$. Для любого $s \in S^x$ справедливо разложение

$$s = \begin{cases} x + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot 2^{-a_k} & \text{при } x \leqslant s, \\ x - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot 2^{-a_k} & \text{при } s \leqslant x, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \lambda_k < 2^{a_{k+1}-a_k}$. Нетрудно показать, что $\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \cdot 2^{-a_k} \leqslant \leqslant 2^{-a_n}$. Не ограничивая общности, положим $x \leqslant t < t+h$ и $t = x + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot 2^{-a_k}$, $h = \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu_k \cdot 2^{-a_k}$. Тогда

$$|\eta(t) - \eta(t+h)| \leqslant \left|\eta\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right) - \eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right)\right| +$$

$$+ \left|\eta\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot 2^{-a_k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu_k \cdot 2^{-a_k}\right) - \eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\eta\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right) - \eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right)\right| +$$

$$+ \left|\eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k} + \sum_{k=n}^{\infty} \nu'_k \cdot 2^{-a_k}\right) - \eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right)\right|,$$

где $\sum_{k=n}^{\infty} \nu'_k \cdot 2^{-a_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k \cdot 2^{-a_k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu_k \cdot 2^{-a_k}$, ν'_n равно либо 0, либо 1. При условии, что имеет место событие $D_n^x(u)$, для обоих слагаемых справедливы следующие неравенства:

$$\left|\eta\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right) - \eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right)\right| < u \sum_{k=n}^{\infty} b_k,$$

$$\left|\eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k} + \sum_{k=n}^{\infty} \nu'_k \cdot 2^{-a_k}\right) - \right.$$

$$\left. - \eta\left(x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot 2^{-a_k}\right)\right| < u\left(b_n + \sum_{k=n}^{\infty} b_k\right)$$

и окончательно $|\eta(t) - \eta(t+h)| < uB_n$.

В силу стохастической непрерывности и сепарабельности процесса $\eta(t)$ множество S^x является для него множеством сепарабельности на отрезке $[x-1, x+1]$ при любом $x \in [0, 1]$. Поэтому

$$\sup_{\substack{(t, t+h) \in T \otimes T \\ |h| < \delta}} |\xi(t) - \xi(t+h)| = \sup_{\substack{(t, t+h) \in S^x \otimes S^x \\ |h| < \delta}} |\eta(t) - \eta(t+h)|.$$

Отсюда следует

$$P\{\sup_{\substack{(t, t+h) \in T \otimes T \\ |h| < \delta}} |\xi(t) - \xi(t+h)| \geqslant u\} \leqslant P(\overline{D_n^x(uB_n^{-1})}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} 2^{a_{k+1}-a_k} \sum_{i=-2^{a_k}}^{2^{a_k}-1} F_\eta(x + i\cdot 2^{-a_k}, 2^{-a_k}, ub_k B_n^{-1}).$$

Проинтегрируем полученное неравенство по x от 0 до 1. В силу того, что $F_\eta(x, \delta, u) = F_\xi(\{|x|\}, \delta, u)$ и $\Phi_n(t, u) \in L^1(T)$, получим

$$P\{\sup_{\substack{(t,t+h)\in T\otimes T\\ |h|<\delta}} |\xi(t) - \xi(t+h)| \geqslant u\} \leqslant 2\int_0^1 \Phi_n(x, uB_n^{-1})\, dx.$$

Теорема доказана.

3. Для полей, определенных на гиперкубе $T = [0, 1]^r$, схема доказательства остается той же.

Теорема 2. Пусть $\xi(t)$, $t \in T = [0, 1]^r$ — сепарабельное стохастически непрерывное поле,

$$\Phi_n(t, u) = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{ra_{k+1}} F_\xi(t, 2^{-a_k}, ub_k),$$

где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательности, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Если существует такое $u_0 \geqslant 0$, что $\Phi_n(t, u) \in L^1(T)$ для всех $u > u_0$ и $n = 1, 2, \ldots$, то

$$P\{\sup_{\substack{(t,t+h)\in T\otimes T\\ |h|<\delta}} |\xi(t) - \xi(t+h)| \geqslant u\} \leqslant 2^r \int_T \Phi_n(t, uB_n^{-1})\, dt,$$

где $u > u_0 B_n$, $B_n = b_n + 2\sum_{k=n}^{\infty} b_k$, $2^{-a_{n+1}} < \delta \leqslant 2^{-a_n}$.

Следствие 1. Если поле $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то оно непрерывно с вероятностью 1.

Следствие 2. Пусть A — некоторое множество параметров, семейство полей $\xi_\alpha(t)$ и соответствующие им функции $\Phi_n^{(\alpha)}(t, u)$ для любых $\alpha \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условию $\int_T \Phi_n^{(\alpha)}(t, u)\, dt \leqslant$ $\leqslant K < \infty$, тогда семейство $\xi_\alpha(t)$ слабокомпактно.

Следствие 3. Пусть $F_\xi(t, \delta, u) \leqslant F_\xi(\delta, u)$ равномерно по $t \in T$. Ряд $\sum_{k=n}^{\infty} 2^{a_{k+1}} F_\xi(2^{-a_k}, ub_k)$ равномерно по $t \in T$ мажорирует функцию $\Phi_n(t, u)$. Сходимость ряда (1) при $a_k = k$ является условием Колмогорова непрерывности случайного поля.

Если же $\xi(t)$ — гауссовское поле, положим $a_k = 2^k$, $b_k =$ $= 2^{k/2}\rho(2^{-2^k})$, где $\rho(\delta) = \sup_{\substack{(t,t+h)\in T\otimes T\\ |h|<\delta}} \sqrt{E(\xi(t) - \xi(t+h))^2}$. В этом случае ряд (1) сходится только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}\rho(2^{-2^k}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$. Таким образом, мы получаем условие Ферника непрерывности гауссовского поля.

4. Приведем несложный пример. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, $\alpha_k < 2^{-1}$, $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность, что $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$. Рассмотрим процесс $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \alpha_k^{(3+\varepsilon)/2} t^{\alpha_k} \xi_k$, где $t \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$, ξ_k — одинаково распределенные некоррелированные случайные величины, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = 1$. Положим

$$\varphi_k(t, \delta) = \sup_{\substack{t+h \in [0,1] \\ |h| < \delta}} |t^{\alpha_k} - (t+h)^{\alpha_k}|^2.$$

Очевидно

$$\varphi_k(t, \delta) \leqslant \begin{cases} \alpha_k^2 \delta^2 (t-\delta)^{2(\alpha_k - 1)}, & 2\delta \leqslant t \leqslant 1, \\ \delta^{2\alpha_k}, & 0 \leqslant t < 2\delta. \end{cases}$$

По неравенству Чебышева

$$F_\xi(t, \delta, u) \leqslant u^{-2} \sup_{\substack{(t, t+h) \in [0,1]^2 \\ |h| < \delta}} E(\xi(t) - \xi(t+h))^2 \leqslant$$

$$\leqslant u^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \alpha_k^{3+\varepsilon} \varphi_k(t, \delta).$$

Воспользуемся теоремой 1 при $a_k = k$, $b_k = k^{-1-\varepsilon/2}$:

$$P\{\sup_{\substack{(t, t+h) \in [0,1]^2 \\ |h| < \delta}} |\xi(t) - \xi(t+h)| \geqslant u\} \leqslant 2\int_0^1 \Phi_n(t, uB_n^{-1})\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_0^1 \left[\sum_{k=n}^{\infty} 2^k (ub_k)^{-2} B_n^2 \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^2 \alpha_l^{3+\varepsilon} \varphi_l(t, 2^{-k}) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant 4B_n^2 u^{-2} \sum_{k=n}^{\infty} 2^k k^{2+\varepsilon} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^2 \alpha_l^{3+\varepsilon} \int_0^1 \varphi_l(t, 2^{-k})\, dt.$$

В силу свойств функций $\varphi_i(t, \delta)$ имеем неравенство

$$\int_0^1 \varphi_i(t, \delta)\, dt = \int_0^{2\delta} \varphi_i(t, \delta)\, dt + \int_{2\delta}^1 \varphi_i(t, \delta)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta^{1+2\alpha_i} + \int_{2\delta}^{1+\delta} \alpha_i^2 \delta^2 (t-\sigma)^{2(\alpha_i - 1)} dt \leqslant 2\delta^{1+2\alpha_i} +$$

$$+ \alpha_i^2 \delta^2 \int_{\delta}^{1} t^{2(\alpha_i - 1)} dt \leqslant (2 + \alpha_i^2/(1-2\alpha_i))\, \delta^{1+2\alpha_i},$$

и окончательно

$$P\{\sup_{\substack{(t, t+h) \in [0,1]^2 \\ |h| < \delta}} |\xi(t) - \xi(t+h)| \geqslant u\} \leqslant 4B_n^2 u^{-2} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2+\varepsilon} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 \alpha_i^{3+\varepsilon} (2 + \alpha_i^2/(1-2\alpha_i))\, 2^{-2k\alpha_i} \leqslant 4CB_n^2 u^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 \alpha_i^{3+\varepsilon} \times$$

$$\times \sum_{k=n}^{\infty} k^{2+\varepsilon} \cdot 2^{-2k\alpha_i} \leqslant 4CB_n^2 u^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 \alpha_i^{3+\varepsilon} \int_{n-1}^{\infty} t^{2+\varepsilon} \cdot 2^{-2t\alpha_i} dt \leqslant$$

$$\leqslant 4CB_n^2 u^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 \int_0^{\infty} t^{2+\varepsilon} \cdot 2^{-2t} dt = C' B_n^2 u^{-2},$$

$$C = \sup_{i=1,2,\ldots} (2 + \alpha_i^2/(1-2\alpha_i)).$$

Следовательно, процесс $\xi(t)$ непрерывен с вероятностью 1.

Заметим, что равномерное условие Колмогорова в этой ситуации неприменимо из-за того, что для любого $k = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{\substack{(t, t+h) \in [0,1]^2 \\ |h| < \delta}} E(\xi(t) - \xi(t+h))^2 = E\xi^2(\delta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \alpha_k^{3+\varepsilon} \delta^{2\alpha_k} > \beta_k^2 \alpha_k^{3+\varepsilon} \delta^{2\alpha_k}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-2\alpha_i)} b_k^{-2}$ расходится для любого $i = 1, 2, \ldots$ и любой последовательности $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$.

В заключение автор выражает признательность Е. И. Островскому за замечания в ходе работы.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971. 2. *Ядренко М. И.* О непрерывности выборочных функций случайных полей.— Тезисы докладов на VII Всесоюзном совещании по теории вероятностей. Тбилиси, 1963. 3. *Козаченко Ю. В.* Локальные свойства выборочных функций одного класса случайных процессов.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1970, вып. 1. 4. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О локальных свойствах реализаций некоторых случайных процессов и полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1973, вып. 10. 5. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В сб. «Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. М., 1978.

Поступила в редколлегию 06.09.78

V. A. Dmitrovsky

UNUNIFORM CONDITION OF CONTINUITY OF STOCHASTIC PROCESSES

This paper deals with the sufficient conditions of continuity of stochastic fields on the hypercube of dimension *r*. The main result is a new condition. The well-known condition by Kolmogorov and Fernique (the case of Gaussian fields) are the partial cases of this condition.