УДК 519.21

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, д-р физ.-мат. наук,
А. А. КУРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАИЛУЧШИХ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНОК

Настоящая статья посвящена развитию идей работы [1] и содержит общую формулировку геометрической части этой работы

Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство, K — некоторое подпространство пространства H, $K^{\perp}$ — ортогональное дополнение к K в H, z — случайный элемент в H вида

$$z = \sum_{k=1}^{n} \theta_k g_k + \varphi + \xi. \tag{1}$$

Предполагается, что φ — неизвестный элемент из K (мешающий параметр); $\sum_{k=1}^{n} \theta_k g_k$ — линейная комбинация известных фиксированных элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ из H с действительными коэффициентами $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, подлежащими оценке; ξ — случайный элемент со значениями в H, имеющий нулевое среднее значение и корреляционный оператор B.

Нас будут интересовать линейные относительно наблюдения z оценки вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)'$, удовлетворяющие таким условиям.

Оценка $\vec{\alpha}(z)$ имеет вид

$$\vec{\alpha}(z) = \langle \vec{f}, z \rangle = ((f_1, z), (f_2, z), \ldots, (f_n, z))', \tag{2}$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)'$, $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset H$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H.

Оценка $\vec{\alpha}(z)$ является несмещенной, т.е.

$$M\vec{\alpha}(z) = \vec{\theta} \tag{3}$$

для всех $\vec{\theta} \in R^n$ и $\varphi \in K$.

Оценку $\vec{\theta}(z)$, удовлетворяющую условиям (2) и (3), будем называть наилучшей, если для любой другой оценки $\vec{\alpha}(z)$, удовлетворяющей условиям (2) и (3), матрица $M[\vec{\alpha}(z)\vec{\alpha}(z)'] - M[\vec{\theta}(z)\vec{\theta}(z)']$ неотрицательно определена.

Условие несмещенности (3), записанное в виде

$$M\vec{\alpha}(z) = M\langle \vec{f}, \sum_{k=1}^{n} \theta_k g_k + \varphi + \xi \rangle = \sum_{k=1}^{n} \theta_k \langle \vec{f}, g_k \rangle + \langle \vec{f}, \varphi \rangle = \vec{\theta},$$

$$\vec{\theta} \in R^n, \varphi \in K,$$

приводит к следующим явным соотношениям для $\vec{f}$:

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset K^{\perp}, \tag{4}$$

$$(f_i, g_j) = (f_i, Pg_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ковариационная матрица оценки $\vec{\alpha}(z)$, удовлетворяющей условиям (2) и (4), равна

$$M[\vec{\alpha}(z)\vec{\alpha}(z)'] - \vec{\theta}\vec{\theta}' = ((Bf_i, f_j))_{i,j=1}^{n}. \tag{5}$$

Пусть P — оператор проектирования на подпространство $K^{\perp}$. Применив P к обеим частям (1), получаем соотношение

$$Pz = \sum_{k=1}^{n} \theta_k P g_k + P\xi. \tag{6}$$

По наблюдению Pz также можно получать несмещенные оценки вида (2) для $\vec{\theta}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть существует наилучшая оценка $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(Pz)$ для $\vec{\theta}$ по наблюдению Pz. Тогда наилучшая оценка для $\vec{\theta}$ по наблюдению z существует и совпадает с $\vec{\alpha}$.

Доказательство. Пусть $\vec{\alpha} = \langle \vec{h}, Pz\rangle$, $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)'$. Поскольку $\langle \vec{h}, Pz\rangle = \langle \vec{h}, P^2 z\rangle = \langle P\vec{h}, Pz\rangle$, то можно предполагать, что $\{h_1, \ldots, h_n\} \subset K^{\perp}$. Следовательно, оценка $\vec{\alpha} = \langle \vec{h}, z\rangle = \vec{\beta}(z)$ имеет вид (2). Легко проверить, что условие несмещенности (3) также выполнено. Для любой оценки $\vec{\beta}(z) = \langle \vec{f}, z\rangle$, удовлетворяющей соотношениям (2) и (3),

$$M\{[\vec{\beta}(z) - \vec{\theta}][\vec{\beta}(z) - \vec{\theta}]'\} = ((Bf_i, f_j))_{i,j=1}^n = ((BPf_i, Pf_j))_{ij=1}^n =$$

$$= M\{\langle \vec{f}, Pz\rangle \langle \vec{f}, Pz\rangle'\}.$$

Следовательно, матрица $M[\vec{\beta}(z)\vec{\beta}(z)'] - M[\vec{\alpha}\vec{\alpha}']$ неотрицательно определена, поскольку $\vec{\alpha}$ наилучшая оценка по наблюдению Pz.

Наилучшая оценка для $\vec{\theta}$ не всегда существует (см. условия (4)). Однако при некоторых дополнительных предположениях наилучшая оценка существует и может быть определена в явном виде. В подпространстве $K^{\perp}$ рассмотрим оператор $D = PB = PBP$, предположим, что оператор D является невырожденным в $K^{\perp}$. Второе дополнительное предположение — линейная независимость элементов $Pg_1, Pg_2, \ldots, Pg_n$, из которой, в частности, следует, что матрица $\Phi = (\Phi_{ij})_{ij=1}^n = ((D^{-1}g_i, g_j))_{i,j=1}^n$ является невырожденной.

Теорема 2. Предположим, что элементы $Pg_1, Pg_2, \ldots, Pg_n$ линейно независимы и оператор $D = PBP$ имеет обратный $D^{-1}: K^{\perp} \to K^{\perp}$. Оценка $\vec{\theta}(z) = \langle \vec{f}, z\rangle = \langle \vec{f}, Pz\rangle$, определяемая вектором $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)' = (D^{-1}g_1, \ldots, D^{-1}g_n)'$, является наилучшей линейной оценкой для $\vec{\theta}$ по наблюдению z. Оценка $\vec{\theta}(z)$ имеет следующую матрицу ковариаций: $M\{[\vec{\theta}(z) - \vec{\theta}][\vec{\theta}(z) - \vec{\theta}]'\} = \Phi^{-1}$.

Доказательство. По построению $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset K^{\perp}$. Второе из соотношений (4) также выполнено. Действительно,

$$(f_i, g_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_{i\nu}^{-} (D^{-1}g_\nu, g_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_{i\nu}^{-}\Phi_{\nu j} = \delta_{ij},$$

где $(\Phi_{ij}^{-})_{ij=1}^n = \Phi^{-1}$.

Пусть теперь $\vec{\alpha}(z) = \langle \vec{h}, z\rangle$ — произвольная оценка, определяемая вектором $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)'$, $\{h_1, \ldots, h_n\} \subset K^{\perp}$ и удовлетворяющая условию несмещенности (3). Заметим, что для любых $1 \leqslant i$,

$j \leqslant n$

$$(Bf_i, f_j) = (Df_i, f_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_{\overline{i\nu}} (g_\nu, f_j) = \Phi_{\overline{ij}},$$

аналогично $(Bf_i, h_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_{\overline{i\nu}} (g_\nu, h_j) = \Phi_{\overline{ij}}$ в силу условия несмещенности. Поэтому $(Bf_i, h_j - f_j) = 0$. Положив $\vec{\beta}(z) = \vec{\alpha}(z) - \vec{\theta}(z)$, находим

$$M[\vec{\alpha}(z)\vec{\alpha}(z)'] = M[\vec{\theta}(z)\vec{\theta}(z)'] + M[\vec{\beta}(z)\vec{\beta}(z)'],$$

поскольку $M[\vec{\theta}(z)\vec{\beta}(z)'] = M[\vec{\beta}(z)\vec{\theta}(z)'] = 0$.

Действительно, учитывая условие несмещенности оценок $\vec{\alpha}$, $\vec{\theta}$, получаем

$$M[\vec{\theta}(z)\vec{\beta}(z)'] =$$

$$= \left(M \left[\left(f_i, \sum_{\nu=1}^{n} \theta_\nu P g_\nu + P_\xi \right) \left(h_j - f_j, \sum_{\mu=1}^{n} \theta_\mu P g_\mu + P\xi \right) \right] \right)_{i,j=1}^{n} =$$

$$= (M[(f_i, P\xi)(h_j - f_j, P\xi)])_{i,j=1}^{n} = ((Bf_i, h_j - f_j))_{i,j=1}^{n} = 0.$$

Теорема 2 доказана.

Пусть $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n)' \in R^n$ — фиксированный заданный вектор, а $\theta = \vec{c}'\vec{\theta}$ — линейная функция неизвестных параметров. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. В классе оценок вида $\alpha(z) = (f, z)_\varphi$ $f \in H$, удовлетворяющих условию несмещенности $M\alpha(z) = \theta$ для всех $\vec{\theta} \in R^n$, $\varphi \in K$, оценка $\theta(z) = \vec{c}'\vec{\theta}(z)$ является оценкой с минимальной дисперсией для параметра θ и имеет дисперсию $D\theta(z) = \vec{c}'\Phi^{-1}\vec{c}$.

Нетривиальным примером применения теорем 1—3 может служить модель статьи [1]. Реальная трудность при фактическом применении этих теорем состоит в определении в явном виде оператора P и обратного оператора для оператора D.

1. *Дороговцев А. Я.* Об одной задаче определения линейной несмещенной оценки с минимальной дисперсией.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1980, вып. 22.

Поступила в редколлегию 21.06.79

A. Ya. Dorogovtsev, A. A. Kurchenko

APPLICATION OF A PROBLEM OF MINIMIZATION IN THE HILBERT SPACE TO DETERMINATION OF THE BEST LINEAR ESTIMATIONS

The model of the type

$$z = \sum_{k=1}^{n} \theta_k g_k + \varphi + \xi, \ \overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in R^n$$

in the Hilbert space H is considered. Here φ is preventing parameter, $g_1, \ldots, g_n$ are known elements from H, ξ — random variable in H. The unbiased linear estimation with the minimal variance of the $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ by observation of the random element z is proposed.