и $\lim\limits_{\delta\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P^x \{\Delta(\delta, Y_{\alpha,n}) \geqslant \varepsilon\} = 0$ в силу теоремы 1, то из теоремы 15.4 [5] и теоремы 2 следует, что справедлива теорема 3.

Теорема 3. Если $\psi(\lambda)$ в правой окрестности нуля допускает разложение (1), то для любого $x > 0$ $P_n^x (Y_{\alpha,n}^+)^{-1} \Rightarrow P_\alpha$ при $n \to \infty$.

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., 1964. 2. *Iglehart D. L.* Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive.— Ann. Probab, 1974, 2, N 4. 3. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, вып. 2. 4. *Belkin B.* An ivariance principle for conditioned random walk attracted to stable law.— Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 1972, 21, N 1. 5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редколлегию 23.12.79

M. E. Zyukov

LIMIT THEOREM FOR RANDOM PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS CONDITIONED TO STAY POSITIVE

The process with stationary independent increments without negative jumps is considered. It is assumed that its cumulant in right neighbourhood of zero is represented as $\psi(\lambda) = a\lambda + 0{,}5\, c\lambda^\alpha + o(\lambda^\alpha)$, $1 < \alpha \leqslant 2$, $a > 0$, $c \neq 0$. It is shown that conditional (with the condition of positivity) and unconditional weak limits of this process are the same, namely, the stable process without negative jumps with the cumulant $0{,}5\lambda^\alpha$.

УДК 519.21

И. Ю. КАНИОВСКАЯ, асп.
Киевский университет

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ С НЕГЛАДКИМИ ФУНКЦИЯМИ РЕГРЕССИИ

Рассмотрим последовательность в R^N, заданную рекуррентно

$$x^{s+1} = \pi_X (x^s + \beta_s u(s, x^s)\xi^s),\ s \geqslant 1,\ x^1 \in X,\ \mathbf{M}\|x^1\|^2 < \infty, \tag{1}$$

где $\pi_X(\cdot)$ — проектор на выпуклое замкнутое множество $X \subseteq R^N$, β_s — шаговый множитель, $u(s, x)$ — нормирующий множитель, $u(s, x) \geqslant u(r) > 0$ при $\|x\| \leqslant r$, ξ^s — случайное направление в R^N. Как неоднократно отмечалось [1—3], последовательностями (1) описываются разнообразные процессы автоматического регулирования, адаптации, рекуррентного оценивания, негладкой оптимизации. Будем предполагать, что $\forall s \geqslant 1$ $\xi^s = \xi(s, \beta_s, x^s)$, x^1 не зависит от $\xi(s, \cdot, \cdot)$, $s \geqslant 1$ и

$$\xi(s, \beta_s, x) = c_s f_s(x) + \alpha(\beta_s) w(s, \beta_s, x) + \psi(\beta_s) z(s, \beta_s, x), \tag{2}$$

где $\{c_s\}$ — последовательность неотрицательных чисел, $\alpha(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ — неотрицательные числовые функции, $\{f_s(\cdot)\}$, $\{w(s., \cdot, \cdot)\}$ — последовательности неслучайных вектор-функций, $\{z(s, \cdot, \cdot)\}$ — последовательность независимых случайных векторов с нулевым средним.

Все функции, входящие в (1), являются борелевскими по x. Предполагается, что $f_s(x)=0$ в единственной точке $x^* \in \operatorname{Int} X$. Представление (1) предназначено для нахождения точки x^*. В работе используется обычная евклидова норма векторов $\|\cdot\|$ в R^N, соответствующая скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и норма матриц $\|\cdot\|$. Будем рассматривать вектор-столбцы и через $[x]_i$ обозначать i-ю координату вектора x.

В работе рассматриваются две ситуации: 1) β_s зависит от s, $\beta_s = b[1+o_s(1)]s^{-1}$, $b>0$, $o_s(1)\to 0$ при $s\to\infty$, (1) — алгоритмы с переменным шагом;

2) $\beta_s=\beta>0$ не зависит от s, (1) — алгоритмы с постоянным шагом, причем обязательно $X=R^N$, $u(s,x)=1$.

Условия сходимости этих последовательностей могут быть получены без предположения гладкости вектор-функций $f_s(x)$ [1, 2, 4, 5]. Однако при доказательстве асимптотической нормальности [2, 4, 6, 7] существенно используется гладкость функций $f_s(x)$. Здесь будут доказаны предельные теоремы для алгоритмов с негладкими функциями. Актуальность постановки такой задачи обусловлена тем, что негладкость является специфической чертой многих задач, встречающихся на практике [1].

Опишем класс функций $f_s(x)$, исследуемых в работе. Пусть пространство R^N разбито гиперплоскостями, проходящими через точку x^* на K многогранных конусов Γ_j и $\bigcup\limits_{j=1}^{K}\Gamma_j=R^N$, $\Gamma_i\cap\Gamma_j = \partial\Gamma_i\cap\partial\Gamma_j$ при $i\neq j$, где $\partial\Gamma_i$ — граница Γ_i. Предположим, что имеет место разложение $f_s(x)=A(x-x^*)(x-x^*)+\delta(s,x-x^*)$, где $A(x-x^*)=A_j$ при $x-x^*\in\operatorname{Int}\Gamma_j$, A_j, $j=\overline{1,K}$ — устойчивые матрицы [2], $\min\limits_{\substack{j=\overline{1,N}\\ i=\overline{1,K}}}|\operatorname{Re}\lambda_j(A_i)|=\omega>0$, $\lambda_j(A_i)$, $j=\overline{1,N}$ — собственные числа матрицы A_i, $\|\delta(s,x-x^*)\|=o(\|x-x^*\|)$ равномерно по s при $x\to x^*$, $A(0)=\frac{1}{K}\sum\limits_{i=1}^{K}A_i$, $A(x-x^*)=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}A_{j_i}$, $2\leqslant m\leqslant K$, $j_i\in\{1,2,\dots,K\}$ при $x-x^*\in\bigcap\limits_{i=1}^{m}\partial\Gamma_{j_i}\setminus\{x^*\}$, $A_j(x-x^*)=A_i(x-x^*)$ при $x-x^*\in\partial\Gamma_i\cap\partial\Gamma_j$.

В силу сделанных предположений функция $A(x)x$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. $\|A(x)x-A(y)y\|\leqslant k\|x-y\|$.

Замечание 1. Примером одномерной функции, удовлетворяющей перечисленным условиям, является следующая:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha_1 x,\ \alpha_1<0 & \text{при } x<0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ \alpha_2 x,\ \alpha_2<0,\ \alpha_1\neq\alpha_2 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Здесь, очевидно, $x^*=0$. Произвольная одномерная функция, совпадающая в окрестности 0 с $f(x)$ с точностью до малых более высокого порядка, чем x, также будет удовлетворять этим условиям.

Сделаем предположения о других величинах, входящих в соотношение (2). Пусть:

1) $c_s \to c > 0$ при $s \to \infty$;

2) $u(s,x)^2 [\| f_s(x) \|^2 + \| w(s,\cdot,x) \|^2 + \mathbf{M} \| z(s,\cdot,x) \|^2 \leqslant k(1+\| x \|^2)$, где k — положительные постоянные, не обязательно одинаковые;

3) $\lim\limits_{\max(s^{-1},\gamma,\|x-x^*\|)\to 0} D(s,\gamma,x) = D$, $\det D \neq 0$, $\operatorname{Sp} D < \infty$, где $D(s,\gamma,x) = \mathbf{M} z(s,\gamma,x) z(s,\gamma,x)'$, штрихом обозначено транспонирование;

4) $\psi(\gamma) = r[1+o_\gamma(1)]\gamma^\varkappa$, $\varkappa > -1/2$, $o_\gamma(1) \to 0$ при $\gamma \to +0$;

5) $\lim\limits_{\gamma\to+0} \psi(\gamma)^{-1}\gamma^{-1/2}\alpha(\gamma) = 0$

или

5′) $\lim\limits_{\gamma\to+0} \psi(\gamma)^{-1}\gamma^{-1/2}\alpha(\gamma) = a \neq 0$, $\lim\limits_{\max(s^{-1},\gamma,\|x-x^*\|)\to 0} w(s,\gamma,x) = w$, $w \neq 0$, $\| w \| < \infty$;

6) $\lim\limits_{\max(s^{-1},\|x-x^*\|)\to 0} u(s,x) = u^* > 0$;

7) $x^s \xrightarrow{\text{п.н.}} x^*$ при $s \to \infty$ в случае переменного шага;

8) $\lim\limits_{R\to\infty} \lim\limits_{s\to\infty} \lim\limits_{\gamma\to+0} \varphi(s,\gamma,R) = 0$, где $\varphi(s,\gamma,R) = \lim\limits_{x\to x^*} \varphi(s,\gamma,R,x)$ в случае переменного шага, а в случае постоянного шага $\varphi(s,\gamma,R) = \sup\limits_{x\in R^N} \varphi(s,\gamma,R,x)$, $\varphi(s,\gamma,R,x) = \int\limits_{\{\|z(s,\gamma,x)\|\geqslant R\}} \| y \|^2 dP(y)$, $P(y)$ — функция распределения $z(s,\gamma,x)$;

9) существует симметричная положительно-определенная матрица C такая, что $\langle CA(x-x^*)(x-x^*), x-x^* \rangle \leqslant -\lambda \langle C(x-x^*), x-x^* \rangle$, $u^*b\lambda > 1/2+\varkappa$, в случае переменного шага, $\langle Cf_s(x), x-x^* \rangle \leqslant -\lambda \langle C(x-x^*), x-x^* \rangle$, $\lambda > 0$ в случае постоянного шага.

Замечание 2. Если матрица A устойчива и нормальна, то $\max\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle < 0$ [8], т. е. A отрицательно определена. Поэтому если матрицы A_i, $i=\overline{1,K}$ нормальны, то можно взять $C=E$, где E — единичная матрица в R^N.

Лемма. Пусть $\zeta(t)$ случайный процесс вида

$$d\zeta(t) = [A(\zeta(t))\zeta(t) + v]\,dt + S\,dw(t), \quad t > 0,$$

$\zeta(0)=\zeta_0$, ζ_0 не зависит от $w(t)$, $t>0$, где $\det S \neq 0$, в функции $A(x)$ $x^*=0$, v — постоянный вектор. Если матрицы A_i, $i=\overline{1,K}$ коммутируют, то случайный процесс $\zeta(t)$ стохастически эквивалентен следующему:

$$x(t) = \exp\left\{\int\limits_0^t A(x(s))\,ds\right\}\left\{\zeta_0 + \int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_0^s A(x(\tau))\,d\tau\right\} S\,dw(s) + \right.$$

$$+\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s A(x(\tau))\,d\tau\right\} v\,ds\Bigg\}.$$

Здесь $w(\cdot)$ — стандартный N-мерный винеровский процесс.

Доказательство. Поскольку функция $A(x)x$ удовлетворяет условию Липшица, то решение рассматриваемого уравнения существует, единственно и является непрерывным с вероятностью 1 случайным процессом. Рассмотрим

$$\tilde{\zeta}(t) = \exp\left\{-\int_0^t A(\zeta(s))\,ds\right\}\zeta(t). \tag{3}$$

Экспонента является корректно определенной в силу того, что $A_iA_j = A_jA_i$ при $i \neq j$. Вектор-функция $f(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t A(\zeta(s)) \times \times ds\right\} x$ линейна по x и является липшицевой по t. При $\zeta(t) \notin \bigcup_{i=1}^{K} \partial\Gamma_i$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -A(\zeta(t))\, f(x, t). \tag{4}$$

По условию функция $A(x)$ терпит разрывы на множествах $\partial\Gamma_i$, $i = \overline{1, K}$, состоящих из кусков гиперплоскостей размерности не выше $N-1$. Поэтому для всякого N-мерного шара $S_R = \{x : \|x\| \leqslant \leqslant R\}$ $\mu_N\left(S_R \cap \left(\bigcup_{i=1}^{K} \partial\Gamma_i\right)\right) = 0$, где $\mu_N(\cdot)$ — лебегова мера в R^N. Отсюда в силу леммы 1 [9] вытекает, что лебегова мера в R^1 тех $t \in [0, T]$, $T \in (0, \infty)$, для которых $\zeta(t) \in \bigcup_{i=1}^{K} \partial\Gamma_i$, есть 0 с вероятностью 1. Таким образом, почти для всех $t \in (0, \infty)$ с вероятностью 1 справедливо соотношение (4). Теперь, применив покоординатно к $f(\zeta(t), t)$ формулу Ито с обобщенными производными [10], получим из (4)

$$d\tilde{\zeta}(t) \overset{\text{п.н.}}{=} \exp\left\{-\int_0^t A(\zeta(s))\,ds\right\}[v\,dt + S\,dw(t)].$$

Из последнего соотношения и (3) следует требуемый результат. Лемма доказана.

Теорема. При выполнении перечисленных выше условий меры, соответствующие случайным процессам:

а) $x_n(t) = \psi(\beta_s)^{-1}\beta_s^{-1/2}(x^s - x^*)$ при $n \leqslant s \leqslant ne^t < s+1 \leqslant [ne^T]$, $n \geqslant 1$, $[a]$ — целая часть числа a, в случае переменного шага;

б) $x_{n\beta}(t) = \psi(\beta)^{-1}\beta^{-1/2}(x^s - x^*)$ при $n \leqslant s \leqslant n + t/\beta < s + 1 \leqslant \leqslant n + [T/\beta]$, $n \geqslant 1$, $\beta \leqslant \beta_0 \in (0, 1)$, в случае постоянного шага —

слабо сходятся в $D^N\ [0, T]$ — пространстве N-мерных действительных вектор-функций без разрывов второго рода, заданных на $[0, T]$, $T \in (0, \infty)$ с метрикой А. В. Скорохода [11]. Причем сходимость рассматривается при $n \to \infty$ в случае переменного шага и при повторном стремлении $\beta \to 0$, $n \to \infty$ в случае постоянного шага. Предельный процесс $x(\cdot)$ является стационарным и марковским и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx(t) = [\tilde{A}(x(t))\, x(t) + v]\, dt + S dw(t), \quad t > 0,$$

$$x(0) = x_0.$$

Если $A_i A_j = A_j A_i$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, K}$, то

$$x(t) \overset{\text{п.н.}}{=} \exp\left\{\int_0^t \tilde{A}(x(s))\, ds\right\} \left\{x(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s \tilde{A}(x(\tau))\, d\tau\right\} [v ds + S dw(s)]\right\},$$

а $x(0)$ имеет такое же распределение, как предел в смысле слабой сходимости случайных векторов

$$\int_0^t \exp\left\{\int_s^t \tilde{A}(x(\tau))\, d\tau\right\} [v ds + S dw(s)].$$

Здесь в случае переменного шага $\tilde{A}(x) = u^* c b A(x) + (\varkappa + 1/2) E$, $S = u^* b^{1/2} D^{1/2}$, $v = 0$ при выполнении условия 5) и $v = u^* a b r^{-2} \tilde{w}$ при выполнении условия 5′); в случае постоянного шага $\tilde{A}(x) = cA(x)$, $S = D^{1/2}$, $v = 0$ при выполнении условия 5) и $v = a r^{-2} \tilde{w}$ при выполнении условия 5′), где $D^{1/2}$ — «неотрицательно-определенный квадратный корень» из D, являющийся симметричной матрицей, $x(0)$ не зависит от $w(t)$, $t > 0$.

Доказательство. Рассмотрим подробно случай постоянного шага. Исследование алгоритмов с переменным шагом может быть выполнено с помощью результатов работ [12, 13]. Предположим, что $x^* = 0$ и выполнено условие 5); аналогично исследуется случай, когда выполнено условие 5′).

Из результатов работ [4, 5] вытекает, что при сделанных предположениях

$$\lim_{s \to \infty} \sup_{n \geq s} \mathbf{M} \| \beta^{-(1/2+\varkappa)} x^n \|^2 \leq k. \tag{5}$$

Положим для $n \geq 1$, $0 \leq s \leq [T/\beta]$, $0 \leq j \leq [T/\beta] - 1$ $\xi_{ns} = \beta^{-(1/2+\varkappa)} x^{n+s}$, $\Delta t_{nj} = \beta$. Тогда согласно (5)

$$\overline{\lim_{\beta \to 0}}\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \mathbf{M} \| \xi_{n0} \|^2 \leq k. \tag{6}$$

Пусть задано число $L>0$. Положим

$$\varepsilon_L(s,\beta,x)=\begin{cases}\delta(s,x), & \|x\|\leqslant L\beta^{1/2+\varkappa},\\ 0, & \|x\|>L\beta^{1/2+\varkappa},\end{cases}$$

$$z_L(s,\beta,x)=\begin{cases}z(s,\beta,x), & \|x\|\leqslant L\beta^{1/2+\varkappa},\\ z(s,\beta,0), & \|x\|>L\beta^{1/2+\varkappa},\end{cases}$$

$\zeta_{n0}=\xi_{n0}$ и для $0\leqslant s\leqslant[T/\beta]-1$

$$\zeta_{ns+1}=\zeta_{ns}+c\beta A(\zeta_{ns})\zeta_{ns}+cr^{-1}\beta^{1/2-\varkappa}\varepsilon_L(n+s,\beta,\beta^{1/2+\varkappa}\zeta_{ns})+$$
$$+r^{-1}\alpha(\beta)\beta^{1/2-\varkappa}w(s,\beta,\beta^{1/2+\varkappa}\zeta_{ns})+\beta^{1/2}z_L(n+s,\beta,\beta^{1/2}\zeta_{ns}).$$

В силу леммы 1 [14, с. 252] и оценки (6)

$$P\{\max_{n\geqslant n(\beta)}\|\xi_{ns}\|>L\}\leqslant kL^{-2}, \tag{7}$$

где $n(\beta)\to\infty$ при $\beta\to 0$. Из способа построения случайных векторов ξ_{ns}, ζ_{ns} и неравенства (7) вытекает, что

$$P\{\xi_{ns}\neq\zeta_{ns},\ n\geqslant n(\beta),\ 0\leqslant s\leqslant[T/\beta]\}\leqslant kL^{-2}. \tag{8}$$

Следовательно, полагая $\zeta_{n\beta}(v)=\zeta_{ns}$ при $n\leqslant n+s\leqslant n+v/\beta<n+s+1\leqslant n+[T/\beta]$, находим

$$P\{x_{n\beta}(\cdot)=\zeta_{n\beta}(\cdot),\ n\geqslant n(\beta)\}\leqslant kL^{-2}.$$

Вследствие того, что L может быть выбрано произвольно большим, это неравенство означает, что при $\beta\to 0$, $n\to\infty$ случайные процессы $x_{n\beta}(\cdot)$ и $\zeta_{n\beta}(\cdot)$ слабо сходятся к одному и тому же пределу. Исследуем процессы $\zeta_{n\beta}(\cdot)$.

В обозначениях теоремы 13 [14, с. 276]

$$a_{ns}(x)=\bar{A}(x)x+cr^{-1}\beta^{1/2-\varkappa}\varepsilon_L(n+s,\beta,\beta^{1/2+\varkappa}x)+$$
$$+r^{-1}\alpha(\beta)\beta^{1/2-\varkappa}w(n+s,\beta,\beta^{1/2+\varkappa}x); \tag{9}$$

$$b^2_{ns}(x)=\mathbf{M}z_L(n+s,\beta,\beta^{1/2+\varkappa}x)z_L(n+s,\beta,\beta^{1/2+\varkappa}x)'; \tag{10}$$

$$\Delta\varphi_{ns}=\beta^{1/2}z_L(n+s,\beta,\beta^{1/2+\varkappa}\zeta_{ns}). \tag{11}$$

Пусть $\chi^{\varepsilon}_{\Delta\varphi_{ns}}$ — индикатор события $\{\|\Delta\varphi_{ns}\|>\varepsilon\}$, тогда из условия 8)

$$\sum_{s=0}^{[T/\beta]-1}\mathbf{M}\|\Delta\varphi_{ns}\|^2\chi^{\varepsilon}_{\Delta\varphi_{ns}}\leqslant\beta\sum_{s=0}^{[T/\beta]-1}\psi(n+s,\beta,\beta^{1/2}\varepsilon)\leqslant$$
$$\leqslant\beta([T/\beta]-1)\max_{s\geqslant n(\beta)}\psi(s,\beta,\beta^{1/2}\varepsilon)\xrightarrow[\beta\to 0,\,n\to\infty]{}0. \tag{12}$$

Из неравенства (6) вытекает стохастическая ограниченность ξ_{n0} при $\beta \to 0$, $n \to \infty$, следовательно, и ζ_{n0}. Поэтому существует некоторое число предельных в смысле слабой сходимости точек $\zeta(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbf{A}$ у ζ_{n0} при $\beta \to 0$, $n \to \infty$. Пусть

$$\zeta_{n_\alpha 0} \xrightarrow{\text{сл.}} \zeta(\alpha, 0) \quad \text{при} \quad \beta_\alpha \to 0,\ n_\alpha \to \infty. \tag{13}$$

Тогда в силу теоремы о сходимости моментов [15, с. 197] и оценки (6)

$$\sup_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbf{M} \| \zeta(\alpha, 0) \|^\delta \leqslant k^{\delta/2} \quad \forall \delta \in (0, 2). \tag{14}$$

Соотношения (9) — (13) и теорема 13 [14, с. 276] показывают, что $\zeta_{n_\alpha \beta_\alpha}$ слабо сходятся в $D^N[0, T]$ при $\beta_\alpha \to 0$, $n_\alpha \to \infty$ к случайному процессу $\zeta_\alpha(\cdot)$ вида

$$d\zeta_\alpha(t) = \tilde{A}(\zeta_\alpha(t))\, \zeta_\alpha(t)\, dt + D^{1/2} dw(t),$$

$$\zeta_\alpha(0) = \zeta(\alpha, 0),$$

где $\zeta_\alpha(0)$ не зависит от $w(t)$, $t > 0$. Заметим, что в силу теоремы 7.1 [16, с. 130], следствия 1 [16, с. 131], условия 9 и невырожденности матрицы D выполнены условия $(\boldsymbol{B})$ [16, с. 153]. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию Ляпунова $V(x) = \langle Cx, x \rangle$, где C — матрица такая, как в условии 9. В качестве области U, фигурирующей в условиях $(\boldsymbol{B})$, может быть взят шар S_R, $R > R_0$, R_0 — некоторое положительное число. Из теоремы 4.1 [16, с. 155] вытекает, что существует единственное стационарное распределение $\mu(\cdot)$ такое, что при фиксированных x, α и $h \geqslant 0$

$$\mathbf{M}\{\exp\{i \langle \zeta_\alpha(h + t), u \rangle\} / \zeta_\alpha(h) = x\} \to R(u) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{15}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $u \in R^N$, $\mathrm{R}(u) = \int_{R_N} \exp\{i \langle x, u \rangle\}\, \mu(dx)$. В силу леммы 6.2 [16, с. 162] сходимость в (15) равномерна по $x \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — произвольный компакт в R^N. Поэтому по заданным $\varepsilon > 0$ и $u \in R^N$ можно, используя неравенство Маркова, найти $t_1 = t(\varepsilon, u)$ так, чтобы $\forall \alpha \in \mathbf{A}$ при $t \geqslant t_1$

$$|\mathbf{M} \exp\{i \langle \zeta_\alpha(t), u \rangle - R(u)| < \varepsilon. \tag{16}$$

В силу отмеченного выше случайные процессы $x_{n_\alpha \beta_\alpha}(\cdot)$ слабо сходятся в $D^N[0, T]$ к $\zeta_\alpha(\cdot)$ при $\beta_\alpha \to 0$, $n_\alpha \to \infty$. Из оценки (6) вытекает, что случайные векторы $x_{n_\alpha - [t_1/\beta_\alpha]\beta_\alpha}(0)$ стохастически ограничены при $\beta_\alpha \to 0$, $n_\alpha \to \infty$. Поэтому существует хотя бы один случайный вектор $\zeta(\alpha_1, 0)$, $\alpha_1 \in \mathbf{A}$ такой, что при повторном стремлении $\beta_\alpha \to 0$, $n_\alpha \to \infty$ $(\beta_\alpha \in \mathbf{B}_\alpha,\ n_\alpha \in N_\alpha)$

$$x_{n_\alpha[-t_1/\beta_\alpha]\beta_\alpha}(0) \xrightarrow{\text{сл.}} \zeta(\alpha_1, 0), \qquad (17)$$

где $\mathbf{B}_\alpha$ и N_α — множества тех β_α и n_α, по которым $x_{n_\alpha-[t_1/\beta_\alpha]\beta_\alpha}(0)$ слабо сходится к $\zeta(\alpha_1, 0)$. В силу определения процессов $x_{n\beta}(\cdot)$ $x_{n_\alpha\beta_\alpha}(0) = x_{n_\alpha-[t_1/\beta_\alpha]\beta_\alpha}(t_1)$, поэтому, переходя к пределу при $\beta_\alpha \to 0$, $n_\alpha \to \infty$ $(\beta_\alpha \in \mathbf{B}_\alpha,\ n_\alpha \in N_\alpha)$ и учитывая (17), устанавливаем, что $\zeta(\alpha, 0)$ и $\zeta(\alpha_1, 0)$ распределены одинаково. Поэтому из (16) вытекает неравенство $|\mathbf{M}\exp\{i\langle\zeta(\alpha, 0), u\rangle - \mathrm{R}(u)| < \varepsilon$. Оно в силу произвольности $\varepsilon > 0$ означает, что все $\zeta(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbf{A}$ имеют одинаковое распределение, совпадающее с $\mu(\cdot)$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение следует из леммы. Теорема доказана.

Следствие. Функция $A(x)\cdot x$ — липшицева. Следовательно, процесс $x(\cdot)$ непрерывен с вероятностью 1. Поэтому в силу доказанной теоремы распределение $\varphi(x_n(\cdot))\,(\varphi(x_{n\beta}(\cdot)))$ при $n \to \infty$ $(\beta \to 0$, $n \to \infty)$ сходится к распределению $\varphi(x(\cdot))$ для любого измеримого на $D^N[0, T]$ и непрерывного на $C^N[0, T]$ функционала $\varphi(\cdot)$ со значениями в R^q. Здесь $C^N[0, T]$ — пространство заданных на $[0, T]$ непрерывных N-мерных вектор-функций с равномерной метрикой.

Рассмотрим одномерные процедуры. Пусть $D = \sigma^2$, $\sigma > 0$ и

$$-\tilde{A}(x) = \alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1, & x > 0, \\ 0{,}5(\alpha_1 + \alpha_2), & x = 0, \\ \alpha_2, & x < 0, \end{cases}$$

где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Положим $\Psi(x) = \mu((-\infty, x))$ и

$$f(x) = \int_0^x \exp\left\{\frac{\alpha(z)\,z^2 - 2vz}{\sigma^2}\right\} dz.$$

Нетрудно проверить, что $f(\cdot)$ монотонно возрастает, существует $f^{-1}(\cdot)$ и

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} [f'(f^{-1}(x))]^{-2}\, dx < \infty,$$

где $f'(\cdot)$ — производная $f(\cdot)$. Отсюда, поскольку доказанная теорема гарантирует существование $\Psi(x)$, получаем с помощью леммы 3 [17, с. 138]

$$\Psi(x) = D^{-1} \int_{-\infty}^{f(x)} [f'(f^{-1}(x))]^{-2}\, dx.$$

Проведя соответствующие выкладки, найдем $\Psi'(x) = d^{-1}\exp\{-\sigma^{-2} \times$

$\times [\alpha(x) x^2 - 2vx]\}$, где d выбирается из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi'(x)\, dx = 1$.

Замечание 3. С помощью результатов книги [16] можно находить плотность распределения $\mu(\cdot)$ в многомерном случае.

1. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. М., 1976. 2. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание. М., 1972. 3. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968. 4. *Ермольев Ю. М., Каниовский Ю. М.* Асимптотические свойства некоторых методов стохастического программирования с постоянным шагом.— Журн. вычислит. мат. и мат. физики, 1979, № 2. 5. *Поляк Б. Т.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. I. Общий случай.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 12. 6. *Анисимова З. П.* О сходимости рекуррентных процедур типа Роббинса — Монро в схеме серий.— ДАН УССР. Сер. А, 1978, № 9. 7. *Кнопов П. С.* О рекуррентном оценивании параметра нелинейной функции регрессии.— Кибернетика, 1977, № 4. 8. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., 1972. 9. *Гирсанов И. В.* О стохастическом интегральном уравнении Ито.— ДАН СССР, 1961, 138, № 1. 10. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1972. 11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971. 12. *Каниовская И. Ю.* Сходимость случайных процессов, порожденных процедурой стохастической аппроксимации для случайных процессов.— В кн.: Методы исследования операций и теории надежности в анализе систем. Киев, 1979. 13. *Каниовская И. Ю.* Предельные теоремы для рекуррентных алгоритмов адаптации с негладкими функциями регрессии.— В кн.: Вероятностные методы в кибернетике. Киев, 1979. 14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., 1975. 15. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., 1962. 16. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969. 17. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.

Поступила в редколлегию 28.12.79

I. Yu. Kaniovskaya

INVESTIGATION OF RECURRENT STOCHASTIC ALGORITHMS WITH NONSMOOTH REGRESSION FUNCTIONS

The weak convergence is proved for measures which correspond to prosseses generated by Markovian stochastic approximation type recurrent algorithms in R^N. The limit prosses is stationary and Markovian. The density of limit normalizing iterations distribution is found for one-dimensional case.

УДК 519.21

Н. В. КАРТАШОВ, ассист.
Киевский университет

ОЦЕНКА ЭРГОДИЧНОСТИ В СИСТЕМЕ M/M/1

1. Рассматривается однолинейная система массового обслуживания $M/M/1$ с пуассоновским потоком интенсивности λ, показательными временами обслуживания со средним μ^{-1} и неограниченной очередью. Предполагается выполненным условие эргодичности $\lambda < \mu$. В работе получена количественная оценка уклонения рас-