$\times [\alpha(x) x^2 - 2vx]\}$, где d выбирается из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi'(x)\,dx = 1$.

Замечание 3. С помощью результатов книги [16] можно находить плотность распределения $\mu(\cdot)$ в многомерном случае.

1. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. М., 1976. 2. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание. М., 1972. 3. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968. 4. *Ермольев Ю. М., Каниовский Ю. М.* Асимптотические свойства некоторых методов стохастического программирования с постоянным шагом.— Журн. вычислит. мат. и мат. физики, 1979, № 2. 5. *Поляк Б. Т.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. I. Общий случай.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 12. 6. *Анисимова З. П.* О сходимости рекуррентных процедур типа Роббинса — Монро в схеме серий.— ДАН УССР. Сер. А, 1978, № 9. 7. *Кнопов П. С.* О рекуррентном оценивании параметра нелинейной функции регрессии.— Кибернетика, 1977, № 4. 8. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., 1972. 9. *Гирсанов И. В.* О стохастическом интегральном уравнении Ито.— ДАН СССР, 1961, 138, № 1. 10. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1972. 11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971. 12. *Каниовская И. Ю.* Сходимость случайных процессов, порожденных процедурой стохастической аппроксимации для случайных процессов.— В кн.: Методы исследования операций и теории надежности в анализе систем. Киев, 1979. 13. *Каниовская И. Ю.* Предельные теоремы для рекуррентных алгоритмов адаптации с негладкими функциями регрессии.— В кн.: Вероятностные методы в кибернетике. Киев, 1979. 14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., 1975. 15. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., 1962. 16. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969. 17. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.

Поступила в редколлегию 28.12.79

I. Yu. Kaniovskaya

INVESTIGATION OF RECURRENT STOCHASTIC ALGORITHMS WITH NONSMOOTH REGRESSION FUNCTIONS

The weak convergence is proved for measures which correspond to prosseses generated by Markovian stochastic approximation type recurrent algorithms in R^N. The limit prosses is stationary and Markovian. The density of limit normalizing iterations distribution is found for one-dimensional case.

УДК 519.21

Н. В. КАРТАШОВ, ассист.
Киевский университет

ОЦЕНКА ЭРГОДИЧНОСТИ В СИСТЕМЕ M/M/1

1. Рассматривается однолинейная система массового обслуживания $M/M/1$ с пуассоновским потоком интенсивности λ, показательными временами обслуживания со средним μ^{-1} и неограниченной очередью. Предполагается выполненным условие эргодичности $\lambda < \mu$. В работе получена количественная оценка уклонения рас-

пределений в момент времени t регенерирующих процессов в системе от соответствующих стационарных распределений. Этими процессами могут быть, в частности, процессы величины очереди, виртуального времени ожидания, индикатор занятости системы. Приведенная оценка точна по экспоненциальному порядку убывания. Аналогичные результаты для более общих систем типа $GI/G/1$ получены автором в работе [1], однако их применение приводит в данном случае к несколько огрубленным оценкам. Доказательства, как и в статье [1], основаны на методах оценки асимптотики решений уравнения восстановления [2].

2. Пусть $(T_n, n \geqslant 0)$ — последовательные моменты регенерации в системе (моменты прихода требований, застающих систему свободной). Предполагается, что $T_0 = 0$. Случайные величины $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geqslant 1$ независимы, распределение τ_n есть свертка показательного распределения с параметром λ и распределения n-го периода занятости θ_n.

Пусть ξ_t — измеримый процесс со значениями в некотором евклидовом пространстве X, заданный на том же вероятностном пространстве, что и рассматриваемая система. Предположим, что ξ_t имеет точки регенерации $(T_n, n \geqslant 0)$ и $\xi_t = 0$ на каждом периоде незанятости $[T_{n-1} + \theta_n, T_n)$. Процессы величины очереди и виртуального времени ожидания, очевидно, удовлетворяют этим условиям.

Теорема 1. Для каждого измеримого $A \subset X$ и каждого $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{P}(\xi_t \in A) - \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\xi_t \in A)| \leqslant 2\gamma \exp(\beta - \alpha t), \tag{1}$$

где $\alpha = \mu(1-\rho)^2$, $\beta = \rho(1-\rho)^{-1}$, $\gamma = (1+\rho^2)(1+\rho)^{-1}$, $\rho = (\lambda/\mu)^{1/2}$.

В случае $0 \notin A$ или $A = \{0\}$ правую часть (1) можно уменьшить в два раза.

Замечание 1. Если ξ_t — процесс величины очереди и $A = \{0\}$, постоянную α в правой части (1) нельзя увеличить ни при каком β, поэтому оценка (1) точна по экспоненциальному порядку убывания.

Замечание 2. Пользуясь известными результатами об асимптотике решений уравнения восстановления (см., например, теорему 3 [3]), можно показать, что левая часть (1) для произвольного регенерирующего процесса ξ_t убывает как $O(\exp(-\varepsilon t))$ для каждого $\varepsilon > 0$ такого, что $M\exp(\varepsilon\tau_1) < \infty$. Как нетрудно убедиться, для выполнения последнего условия необходимо $\varepsilon \leqslant \min(\lambda, \alpha)$. Приведенный ниже пример показывает, что экспоненциальный порядок убывания левой части (1) для произвольного регенерирующего процесса ξ_t в системе, вообще говоря, не превышает $\min(\lambda, \alpha)$. Однако в соответствии с (1) для рассматриваемых процессов этот порядок не меньше α. Заметим, что $\lambda < \alpha$ при $\mu > 4\lambda$. Такая «сверхвысокая» скорость убывания в (1) существенно связана с условием $\xi_t = 0$ для $t \in [T_{n-1} + \theta_n, T_n)$. Об этом свидетельствует, в частности, такой пример. Пусть $\lambda < \alpha$ и $\varepsilon \in (\lambda, \alpha)$. Определим регенерирующий процесс ξ_t равенством $\xi_t = \chi(\theta_n \leqslant t - T_{n-1} < \theta_n + \lambda\varepsilon^{-1}(\tau_n - \theta_n))$

для $t \in [T_{n-1}, T_n)$, где $\chi(C)$ — индикатор события C. Положим $A = \{1\}$. Как показано ниже, левая часть (1) в данном случае не меньше $\delta \exp(-\varepsilon t)$ для $t \geqslant t_0$ при некоторых $\delta > 0$, t_0, а ε может быть выбрано сколь угодно близким к λ.

3. Как известно (см. [4, с. 239]), при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ справедливо равенство

$$\mathbf{M} \exp(z\theta_1) = (2\lambda)^{-1} [\lambda + \mu - z - ((\lambda + \mu - z)^2 - 4\lambda\mu)^{1/2}]. \quad (2)$$

Из представления (2) нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. Случайная величина θ_1 имеет плотность l, равную

$$l(t) = \int_{\alpha}^{\nu} \exp(-ut) k(u) \, du, \quad (3)$$

где $\alpha = \mu(1-\rho)^2$, $\nu = \lambda + \mu$, $\rho = (\lambda/\mu)^{1/2}$, $k(u) = 2\mu\pi^{-1} \times \sin^2(\arccos(\nu - u)(\nu - \alpha)^{-1})((\nu - \alpha)^2 - (\nu - u)^2)^{-1/2}$.

Следствие 1. Представление (2) справедливо при $\operatorname{Re} z \leqslant \alpha$.

Следствие 2. Левая часть (2) не допускает аналитического продолжения в область $\operatorname{Re} z < \alpha'$, если $\alpha < \alpha'$.

Доказательство леммы основано на применении формулы обращения преобразования Лапласа, согласно которой θ_1 имеет плотность $l(t) = (\rho t)^{-1} \exp(-\nu t) I_1((\nu - \alpha) t)$, где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя. Используя интегральное представление Пуассона для функции Бесселя $I(x) = iI_1(-ix)$, приходим к равенству

$$l(t) = 2\mu\pi^{-1} \exp(-\nu t) \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}((\nu - \alpha) t \cos u) \sin^2 u \, du =$$

$$= 2\mu\pi^{-1} \exp(-\nu t) \int_0^{\pi} \exp((\nu - \alpha) t \cos u) \sin^2 u \, du = 2\mu\pi^{-1} \exp(-\nu t) \times$$

$$\times \int_{\alpha-\nu}^{\nu-\alpha} \exp(wt) \sin^2(\arccos(\nu - \alpha)^{-1} w) \, ((\nu - \alpha)^2 - w^2)^{-1/2} dw.$$

После замены переменной в последнем интеграле $u = \nu - w$ получаем (3).

Заметим, что $k(u) \sim (u - \alpha)^{1/2}$ при $u \to \alpha$. Следовательно, функция $(u - \alpha)^{-1} k(u)$ интегрируема в правой окрестности α и по теореме Фубини конечен интеграл

$$\int_0^{\infty} \exp(\alpha t) \, l(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\nu} (u - \alpha)^{-1} k(u) \, du < \infty.$$

Поэтому левая часть (2) аналитична в области $\operatorname{Re} z < \alpha$ и непрерывна на ее границе. Этим же свойством обладает и правая часть (2). Применяя теорему о единственности аналитического продолжения, убеждаемся в справедливости следствия 1.

Следствие 2 получается из очевидной оценки при $\alpha < \alpha'$:

$$l(t) \geqslant \exp(-\alpha' t) \int_{\alpha}^{\alpha'} k(u)\, du, \text{ откуда } \mathbf{M} e^{\alpha'\theta_1} = \infty.$$

4. Доказательство теоремы 1. Для измеримого $A \subset X$ обозначим $x(t) = \mathbf{P}(\xi_t \in A)$, $y(t) = \mathbf{P}(\xi_t \in A, \tau_1 > t)$. Функции x, y измеримы в силу измеримости процесса ξ_t и ограничены. Функция x удовлетворяет уравнению восстановления $x = y + x * F$, где $F(t) = \mathbf{P}(\tau_1 \leqslant t)$. Здесь и в дальнейшем $x * F$ означает свертку функции x с функцией распределения F, доопределенных на $(-\infty, 0)$ нулем. Аналогичный смысл имеет обозначение $x * z$ для свертки двух функций x и z.

Из теоремы восстановления вытекает существование предела $x(\infty) = (\mathbf{M}\tau_1)^{-1} \int_0^\infty y(t)\, dt$. Как отмечено выше, $F = E * L$, где $E(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$, $t \geqslant 0$, $L(t) = \mathbf{P}(\theta_1 \leqslant t)$. Из замечания 3[2] следует, что функция распределения F удовлетворяет условию B теоремы 1[2], где $R(t) = \lambda(1 - L(t))$. Поэтому (см. уравнение (3) [2]), функция $x_0(t) = x(t) - x(\infty)$ удовлетворяет уравнению

$$x_0 = z + x_0 * a, \tag{4}$$

где функция $a = \psi + \psi * R - R$ неотрицательна, а $\psi(t) = R(t) \times \exp\left(-\int_0^t R(s)\, r(s)\, ds\right)$, $r(t) = \inf_{s \geqslant 0} R(s)/R(s+t)$, $z = y_0 + y_0 * \lambda - y_0 * \psi - y_0 * \psi * \lambda$, $y_0(t) = y(t) - x(\infty)(1 - F(t))$. Обозначив $x_\alpha(t) = x_0(t)\exp(\alpha t)$, получим из (4)

$$x_\alpha = z_\alpha + x_\alpha * a_\alpha, \tag{5}$$

где $z_\alpha(t) = z(t)\exp(\alpha t)$, $a_\alpha(t) = a(t)\exp(\alpha t)$.

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$\hat{a}_\alpha = \int_0^\infty a_\alpha(t)\, dt \leqslant 1 - (1 + \beta)\exp(-\beta), \tag{6}$$

где $\beta = \lambda(1 - \rho)(\alpha\rho)^{-1}$.

Положим для каждой неотрицательной функции $b(t)$ $\hat{b}(\varepsilon) = \int_0^\infty b(t)\exp(\varepsilon t)\, dt$. Вычислим левую часть (6), используя определение $a(t)$:

$$\hat{a}_\alpha = \hat{a}(\alpha) = \hat{\psi}(\alpha) + \hat{\psi}(\alpha)\hat{R}(\alpha) - \hat{R}(\alpha). \tag{7}$$

Заметим, что $\hat{R}(\alpha) = \lambda \int_0^\infty \exp(\alpha t)(1 - L(t))\, dt = \lambda\alpha^{-1}[\mathbf{M}\exp(\alpha\theta_1) -$

$-1] = \beta$. Последнее равенство получается из (2) при $z = \alpha$ в соответствии со следствием 1.

Докажем, что функция r в определении ψ удовлетворяет неравенству $r(t) \geqslant \exp(\alpha t)$. Действительно, из представления (3) находим

$$R(t) = \lambda(1 - L(t)) = \lambda \int_{\alpha}^{\nu} u^{-1} \exp(-ut)\, k(u)\, du,$$

откуда $\exp(\alpha(t+s)) R(t+s) \leqslant \exp(\alpha t) R(t)$ при $t, s \geqslant 0$. Следовательно, $r(t) = \inf_{s \geqslant 0} R(s)/R(t+s) \geqslant \exp(\alpha t)$ и требуемое неравенство доказано. На основании этого неравенства оценим

$$\psi(t) \leqslant R(t) \exp\left(-\int_0^t \exp(\alpha s) R(s)\, ds\right),$$

откуда

$$\hat{\psi}(\alpha) \leqslant \int_0^{\infty} \exp(\alpha t) R(t) \exp\left(-\int_0^t \exp(\alpha s) R(s)\, ds\right) dt = 1 - e^{-\hat{R}(\alpha)}.$$

Из этой оценки и (7) следует (6). Лемма 2 доказана.

Применим лемму сравнения для решений $x_\alpha(t)$ и $\pm(1 - \hat{a}_\alpha)^{-1} \times \sup|z_\alpha|$ уравнения восстановления (5) (см. лемму 1 [5]). Поскольку $|x_\alpha - x_\alpha * a_\alpha| = |z_\alpha| \leqslant \sup|z_\alpha| (1 - \hat{a}_\alpha)^{-1} (1 - 1 * a_\alpha)$ для всех значений аргумента, из этой леммы получаем при $t \geqslant 0$ неравенство $x_\alpha(t)| \leqslant (1 - \hat{a}_\alpha)^{-1} \sup|z_\alpha(t)|$. Оценивая здесь первый сомножитель из неравенства (6), находим

$$|x_0(t)| \leqslant (1 + \beta)^{-1} \exp(\beta - \alpha t) \sup_{t \geqslant 0} \exp(\alpha t) |z(t)|. \tag{8}$$

Оценим последний сомножитель в (8). Для этого заметим, что $z = z_0 - z_0 * \psi$, где $z_0 = y_0 + \lambda * y_0$. Обозначим $m_+ = \sup \exp(\alpha t) \times z_0(t)$, $m_- = \inf \exp(\alpha t) z_0(t)$. В силу определения $x(\infty)$ справедливо тождество

$$\int_0^{\infty} y_0(t)\, dt = \int_0^{\infty} y(t)\, dt - x(\infty)\, \mathbf{M}\tau_1 = 0.$$

Поэтому $z_0(\infty) = 0$ и $m_- \leqslant z_0(\infty) = 0 \leqslant z_0(0) \leqslant m_+$. Подставив неравенства $z_0(t) \leqslant m_+ \exp(-\alpha t)$ и $z_0(t) \geqslant m_- \exp(-\alpha t)$ в определение z, получим оценку $m_- - m_+ \hat{\psi}(\alpha) \leqslant \exp(\alpha t) z(t) \leqslant m_+ - m_- \hat{\psi}(\alpha)$. Так как $\hat{\psi}(\alpha) \leqslant 1 - \exp(-\beta) < 1$, то из этой оценки следует неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} \exp(\alpha t) |z(t)| \leqslant m_+ - m_-. \tag{9}$$

Для оценки правой части (9) представим функцию

$$z_0(t) = y_0(t) + \lambda \int_0^t y_0(s)\,ds = y_0(t) - \lambda \int_t^\infty y_0(s)\,ds,$$

где $y_0(t) = y(t) - x(\infty)(1 - F(t))$, в виде

$$z_0(t) = y(t) - \lambda \int_t^\infty y(s)\,ds + x(\infty) \int_t^\infty R(s)\,ds. \tag{10}$$

Предположим, что множество A в условии теоремы таково, что $0 \notin A$. Тогда $y(t) = \mathbf{P}(\xi_t \in A,\ \tau_1 > t) = \mathbf{P}(\xi_t \in A,\ \theta_1 > t) + \mathbf{P}(\xi_t \in A,\ \theta_1 \leqslant t < \tau_1) = \mathbf{P}(\xi_t \in A,\ \theta_1 > t) \leqslant \mathbf{P}(\theta_1 > t) = \lambda^{-1} R(t)$. Отсюда согласно (10)

$$\begin{gathered} \exp(\alpha t)\, z_0(t) \leqslant \exp(\alpha t) \left(\lambda^{-1} R(t) + \int_t^\infty R(s)\,ds \right), \\ -\exp(\alpha t)\, z_0(t) \leqslant \exp(\alpha t) \int_t^\infty R(s)\,ds. \end{gathered} \tag{11}$$

Как отмечалось выше, функция $\exp(\alpha t) R(t)$ не возрастает. Отсюда нетрудно вывести, что функции в правых частях неравенств (11) не возрастают. Следовательно, справедливы оценки $m_+ \leqslant \leqslant \lambda^{-1} R(0) + \int_0^\infty R(s)\,ds = 1 + \lambda \mathbf{M}\theta_1$, $m_- \geqslant -\lambda \mathbf{M}\theta_1$. Подставляя эти оценки в (9), а (9) в (8) и вычисляя $\mathbf{M}\theta_1$ из (2), приходим к утверждению теоремы в случае $0 \notin A$.

Поскольку это утверждение выполнено для $A = X \setminus \{0\}$, а $\mathbf{P}(\xi_t \in \{0\}) = 1 - \mathbf{P}(\xi_t \in X \setminus \{0\})$, то аналогичное утверждение справедливо и для $A = \{0\}$. В общем случае измеримого $A \subset X$ неравенство (1) получается из соответствующих оценок для $\mathbf{P}(\xi_t \in \{0\})$ и $\mathbf{P}(\xi_t \in A \setminus \{0\})$. Теорема доказана.

5. Для обоснования замечания 1 отметим, что в рассматриваемом случае производящую функцию моментов для функции $\mathbf{P}(\xi_t = 0) - \lim \mathbf{P}(\xi_t = 0)$ нетрудно получить из соответствующего уравнения восстановления. Эта функция равна $z^{-1}(1 + \lambda \mathbf{M}\theta_1)^{-1} + \hat{l}(z)(\lambda - z - \lambda \hat{l}(z))^{-1} = \pi(z)$. Как вытекает из следствия 2, $\pi(z)$ не допускает аналитического продолжения в область $\operatorname{Re} z < \alpha'$ при $\alpha < \alpha'$. Однако из справедливости (1) при некотором $\alpha' > \alpha$ следовала бы аналитичность функции $\pi(z)$ в области $\operatorname{Re} z < \alpha'$. Утверждение замечания 1 доказано.

Пусть теперь ξ_t определяется в соответствии с замечанием 2. Производящая функция моментов для $u(t) = \mathbf{P}(\xi_t = 1) - \lim \mathbf{P}(\xi_t = 1)$ равна $(\lambda - z)(\varepsilon - z)^{-1} \hat{l}(z)(\lambda - z - \lambda \hat{l}(z))^{-1} + C z^{-1}$, где $C = \lambda \varepsilon^{-1} \times$

$\times (1+\lambda \mathbf{M}\theta_1)^{-1}$. Эта функция аналитична в области $\operatorname{Re} z < \varepsilon$ и имеет простую особенность в точке $z=\varepsilon$. Применяя теорему 2 приложения [3], заключаем, что $u(t) = d \exp(-\varepsilon t)(1+o(1))$ при $t \to \infty$. Тем самым сформулированное в замечании 2 утверждение доказано.

Отметим в заключение, что в п. 4, по существу, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть ξ_t — измеримый процесс со значениями в некотором евклидовом пространстве X и последовательностью точек регенерации $(T_n,\ n \geqslant 0)$, $T_0 = 0$.

Пусть выполняются условия:

A) случайные величины $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ представимы в виде $\tau_n = \theta_n + \xi_n$, где (θ_n, ξ_n) независимы в совокупности, ξ_n имеет показательное распределение с параметром λ, величины θ_n одинаково распределены и для некоторого $\alpha > 0$ и всех t, s выполняется неравенство $\mathbf{P}(\theta_n > t+s) \leqslant \exp(-\alpha t)\, \mathbf{P}(\theta_n > s)$;

B) $\xi_t = 0$ для всех $t \in [T_{n-1} + \theta_n, T_n)$, $n \geqslant 1$.

Тогда для каждого измеримого $A \subset X$ и всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство (1), где $\beta = \lambda(1-\rho)(\alpha\rho)^{-1}$, $\gamma = (1+2\lambda \mathbf{M}\theta_1) \times (1+\beta)^{-1}$, $\rho^{-1} = \mathbf{M} \exp(\alpha\theta_1)$.

В случае $A = \{0\}$ или $0 \notin A$ правую часть (1) можно уменьшить в два раза.

1. *Карташов Н. В.* Количественные оценки эргодичности в системе $GI/GI/1$.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1979, вып. 21. 2. *Карташов Н. В.* О явных оценках скорости сходимости в теореме восстановления.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 18. 3. *Teugels J. L.* Exponential decay in renewal theorems.— Bull. Soc. Math. Belg., 1967, **19**, 3. 4. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., 1971. 5. *Карташов Н. В.* Степенные оценки скорости сходимости в теореме восстановления.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, **24**, вып. 3.

Поступила в редколлегию 23.10.79

N. V. Kartashov

AN ERGODICITY ESTIMATE IN QUEUEING SYSTEM M/M/1

The queueing system $M/M/1$ with Poisson input of intensity λ and mean service time μ^{-1} is considered. It is assumed that $\lambda < \mu$ and initial moment in a system there is one customer.

Let ξ_t be regenerative process in the system taking values in some Euclidian space such that $\xi_t = 0$ on idle periods. For all measurable A and $t \geqslant 0$ following inequality

$$|\mathbf{P}(\xi)_t \in A) - \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\xi_t \in A) \leqslant 2\gamma \exp(\beta - \alpha t)$$

is obtained where $\alpha = \mu(1-\rho)^2$, $\beta = \rho(1-\rho)^{-1}$, $\gamma = (1+\rho^2)(1+\rho)^{-1}$, $\rho = (\lambda/\mu)^{-1/2}$. The question about the accuracy of this estimate is discussed.