УДК 519.21

О. И. КЛЕСОВ, асп.
Киевский университет

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ СЛАГАЕМЫХ

Пусть N^r — r-мерное арифметическое пространство, для элементов $\bar{m}$, $\bar{n}$ которого положено $\bar{m} \leqslant \bar{n}$, если $m_1 \leqslant n_1, \ldots, m_r \leqslant n_r$ и $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_r)$, $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_r)$.

Предположим, что $\{X(\bar{m}), \bar{m} \in N^r\}$ — независимые случайные величины, заданные на вероятностном пространстве (Ω, F, P) и распределенные по симметрическому устойчивому закону $G_\gamma(x)$ с параметром $\gamma\,(0 < \gamma \leqslant 2)$, т. е. $M \exp(itX(\bar{m})) = \exp(-|t|^\gamma)$, $0<\gamma<2$ и $M\exp(itX(\bar{m})) = \exp(-t^2/2)$. Известно, что существует константа $K_\gamma > 0$, $0 < \gamma < 2$, $K_\gamma = 0$, $\gamma = 2$, такая, что

$$x^\gamma (G_\gamma(x) + 1 - G_\gamma(-x)) \to K_\gamma, \quad x \to \infty. \tag{1}$$

Если $\gamma = 2$, т. е. если случайные величины $X(\bar{m})$ распределены по нормальному закону с параметрами 0 и 1, то, как следует из результатов работы [1], $\overline{\lim\limits_{|\bar{n}| \to \infty}} |S(\bar{n})|/(|\bar{n}| \log\log|\bar{n}|)^{1/2} = (2r)^{1/2}$ п. н. (почти наверное), где $S(\bar{n}) = \sum\limits_{\bar{m} \leqslant \bar{n}} X(\bar{m})$, $|\bar{n}| = n_1 \ldots n_r$.

В этой заметке рассматривается случай $0 < \gamma < 2$.

Теорема 1.

$$\overline{\lim_{|\bar{n}| \to \infty}} \, \big|\, |\bar{n}|^{-\gamma^{-1}} S(\bar{n}) \big|^{(\log\log|\bar{n}|)^{-1}} = \exp(r\gamma^{-1}) \text{ п. н.}$$

Доказательство. Так же как в случае $r = 1$, рассмотренном в статье [2], достаточно установить, что для всех $\varepsilon > 0$ п. н. справедливы следующие утверждения:

1) неравенство $|\bar{n}|^{-\gamma^{-1}} |S(\bar{n})| > (\log|\bar{n}|)^{(1+\varepsilon)r\gamma^{-1}}$ выполняется конечное число раз;

2) неравенство $|\bar{n}|^{-\gamma^{-1}} |S(\bar{n})| > (\log|\bar{n}|)^{(1-\varepsilon)r\gamma^{-1}}$ выполняется бесконечное число (б. ч.) раз.

Для $b > 1$ положим $\bar{b}(\bar{n}) = ([b^{n_1}], \ldots, [b^{n_r}])$, где $[x]$ — целая часть x, и определим события

$$A(\bar{n}) = \{\omega : S(\bar{n})| > |\bar{n}|^{\gamma^{-1}} (\log|\bar{n}|)^{(1+\varepsilon)r\gamma^{-1}}\};$$

$$B(\bar{n}) = \{\omega : \max_{\bar{b}(\bar{n}) \leqslant \bar{k} \leqslant \bar{b}(\bar{n}+\bar{1})} |S(\bar{k})| > |\bar{b}(\bar{n})|^{\gamma^{-1}} (\log|\bar{b}(\bar{n})|)^{(1+\varepsilon)r\gamma^{-1}}\};$$

$$C(\bar{n}) = \{\omega : |S(\bar{b}(\bar{n}+\bar{1})| > |\bar{b}(\bar{n})|^{\gamma^{-1}} (\log|\bar{b}(\bar{n})|)^{(1+\varepsilon)r\gamma^{-1}}\},$$

где $\bar{n}+\bar{1}=(n_1+1, \ldots, n_r+1)$. Легко показать, что случайные величины $|\bar{b}(\bar{n})|^{-\gamma^{-1}} S(\bar{b}(\bar{n}))$ имеют функцию распределения $G_\gamma(x)$. Поэтому из (1) находим

$$P(C(\bar{n})) \leqslant L_\gamma (n_1+\ldots+n_r)^{-(1+\varepsilon)r} \tag{2}$$

для некоторой константы $L_\gamma \geqslant K_\gamma$ и всех $\bar{n} \in N^r$. Так как $X(\bar{m})$ симметрично распределены, то [3]

$$P(B(\bar{n})) \leqslant 2^r P(C(\bar{n})). \tag{3}$$

Из (2), (3) вытекает, что $\Sigma P(B(\bar{n})) < \infty$, значит, $P(B(n)$ б. ч.$)=0$. Понятно, что $P(A(\bar{n})$ б. ч.$) \leqslant P(B(\bar{n})$ б. ч.$)$, следовательно, справедливо 1).

Доказательство утверждения 2) проведем методом от противного. Если утверждение 2) не выполнено, то найдутся ε: $0<\varepsilon<1$ и событие $M: P(M)>0$, для которых справедливо неравенство

$$|\bar{n}|^{-\gamma^{-1}} |S(\bar{n}, \omega)| \leqslant (\log|\bar{n}|)^{(1-\varepsilon)r\gamma^{-1}} \tag{4}$$

при $\omega \in M$ и $|\bar{n}| \geqslant n_0(\omega)$. Положим $T(\bar{n}) = \sum\limits_{\bar{b}(\bar{n})+\bar{1} \leqslant \bar{m} \leqslant \bar{b}(\bar{n}+\bar{1})} X(\bar{m})$. Используя соотношение (1), несложно показать, что

$$\sum_{\bar{n}\in N^r} P(|T(\bar{n})| \geqslant |\bar{b}(\bar{n}+\bar{1})|^{\gamma^{-1}} (\log|\bar{b}(\bar{n}+\bar{1})|)^{(1-\varepsilon/2)r\gamma^{-1}}) = \infty.$$

Следовательно, п. н. бесконечное число раз выполнено неравенство

$$|T(\bar{n})| \geqslant |\bar{b}(\bar{n}+\bar{1})|^{\gamma^{-1}} (\log|\bar{b}(\bar{n}+\bar{1})|)^{(1-\varepsilon/2)r\gamma^{-1}}. \tag{5}$$

Так как каждую сумму $S(\bar{b}(\bar{n}))$ можно представить в виде линейной комбинации $T(\bar{n})$ и не более чем 2^r-1 сумм $S(\bar{b}(\bar{k}))$, то в силу (4), (5) имеем

$$|\bar{b}(\bar{n})|^{-\gamma^{-1}} |S(\bar{b}(\bar{n}), \omega)| \geqslant (\log|\bar{b}(\bar{n})|)^{(1-\varepsilon/2)r\gamma^{-1}} - (2^r-1) \times$$

$$\times (\log|\bar{b}(\bar{n})|)^{(1-\varepsilon)r\gamma^{-1}} > (\log|\bar{b}(\bar{n})|)^{(1-\varepsilon)r\gamma^{-1}}$$

для $\omega \in M$ и $|\bar{n}| \geqslant n_1(\omega) \geqslant n_0(\omega)$. Последнее неравенство противоречит допущению (4). Теорема доказана.

Будем писать $\bar{n} \to \infty$, если независимым образом к бесконечности стремятся все координаты вектора $\bar{n}$.

Следствие.

$$\overline{\lim_{|\bar{n}|\to\infty}} \left| |\bar{n}|^{-\gamma^{-1}} S(\bar{n}) \right|^{(\log\log|\bar{n}|)^{-1}} = \exp(r\gamma^{-1}) \text{ п. н.}$$

Действительно, положив

$$\alpha(\bar{n}, \omega) = \left| |\bar{n}|^{-\gamma^{-1}} S(\bar{n}, \omega) \right|^{(\log\log|\bar{n}|)^{-1}},$$

получим

$$\overline{\lim_{\bar{n}\to\infty}} \alpha(\bar{n}, \omega) \leqslant \overline{\lim_{|\bar{n}|\to\infty}} \alpha(\bar{n}, \omega). \tag{6}$$

Пусть $s: 1 \leqslant s < r$, $1 \leqslant t_1 \leqslant r, \ldots, 1 \leqslant t_s \leqslant r$ и $|\bar{n}_s| = n_{t_1} \ldots n_{t_s}$. Согласно теореме 1

$$\overline{\lim_{|\bar{n}|_s\to\infty}} \alpha(\bar{n}, \omega) = \exp(s\gamma^{-1}) < \exp(r\gamma^{-1}). \tag{7}$$

Вследствие произвольности s и $t_1, \ldots, t_s$, неравенства (6), (7) доказывают следствие.

В следующей теореме мы ограничимся случаем $r = 2$. Определим D_q, $q \geqslant 1$ как множество пар действительных чисел (x, y), для которых выполнено $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \geqslant x^q$.

Теорема 2. Пусть независимые случайные величины $X(\bar{m})$ распределены по закону $G_\gamma (0 < \gamma \leqslant 2)$. Если $0 < \gamma < 2$, то

$$\overline{\lim_{\substack{mn\to\infty \\ (m,n)\in D_q}}} \left| (mn)^{-\gamma^{-1}} S(m, n) \right|^{(\log\log mn)^{-1}} = \exp\left((1 + 1/q)\gamma^{-1}\right) \text{ п. н.} \tag{8}$$

Если же $\gamma = 2$, то

$$\overline{\lim_{\substack{mn\to\infty \\ (m,n)\in D_q}}} \left| S(m, n)/(mn \log\log mn)^{1/2} \right| = (2(1 + 1/q))^{1/2} \text{ п. н.} \tag{9}$$

Доказательство. Для $b > 1$ и $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ положим

$$A_q(m, n) = \{\omega : |S(m, n)| > (mn)^{\gamma^{-1}} (\log mn)^{(1+\varepsilon)(1+1/q)\gamma^{-1}}\};$$

$$B_q(m, n) = \{\omega : \max_{\substack{[b^m]\leqslant k\leqslant[b^{m+1}] \\ [b^n]\leqslant l\leqslant[b^{n+1}]}} |S(k, l)| > b^{(m+n)\gamma^{-1}} \times$$

$$\times (\log b^{m+n})^{(1+\varepsilon)(1+1/q)\gamma^{-1}}\};$$

$$C_q(m, n) = \{\omega : |S([b^{m+1}], [b^{n+1}])| > ([b^m][b^n])^{\gamma^{-1}} \times$$

$$\times (\log [b^m][b^n])^{(1+\varepsilon)(1+1/q)\gamma^{-1}}\}.$$

Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, заключаем, что $P(A_q(m, n)) \leqslant P(B_q(m, n)) \leqslant 4P(C_q(m, n))$, $\sum_{(m,n)\in D_q} P(C_q(m, n)) < \infty$. Отсюда вытекает, что левая часть (8) не больше правой. Доказательство обратного неравенства проводится аналогично тому, как в теореме 1 устанавливается истинность утверждения 2). Равенство (9) можно получить таким же образом.

Замечание. Пусть $\alpha_\gamma(m,n) = |(mn)^{-\gamma^{-1}} S(m,n)|^{(\log\log mn)^{-1}}$, $0 < \gamma < 2$. В статье [2] показано, что множество предельных точек последовательности $\{\alpha_\gamma(m,1); m \geqslant 1\}$ совпадает с отрезком $[0, \exp(\gamma^{-1})]$. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что множество предельных точек последовательности $\{\alpha_\gamma(m,n);\ m \geqslant 1,\ n \geqslant 1\}$ совпадает с отрезком $[0, \exp(2\gamma^{-1})]$. Из теоремы 2 также следует, что множество предельных точек последовательности $\{|S(m,n)|/(mn \log\log mn)^{1/2};\ m \geqslant 1,\ n \geqslant 1\}$ совпадает с отрезком $[0, 2]$, если случайные величины $\{X(m,n); m \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ распределены по гауссовскому закону с параметрами 0 и 1. Для гауссовских случайных величин более общие результаты можно получить из теорем работы [1].

1. *Wichura M.* Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments.— Ann. Probab., 1973, 1, 2. 2. *Chover J.* A law of the iterated logarithm for stable summands.— Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 47, 3. 3. *Paranjape S. R.*, *Parc C.* Laws of iterated logarithm of multiparameter Wiener processes.— J. of Multivariate Analysis, 1973, N 3.

Поступила в редколлегию 30.11.79

O. I. Klesov

ON THE LAW OF ITERATED LOGARITHM FOR STABLE SUMMANDS

The law of iterated logarithm for stable summands is proved.

УДК 519.21

В. И. КОЛЧИНСКИЙ, асп.
Киевский университет

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР

1. Пусть задано измеримое пространство $(X, \mathbf{B})$, $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — независимые случайные элементы, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, принимающие значения в $(X, \mathbf{B})$ и имеющие распределение μ, $\mathbf{F}$ — класс $\mathbf{B}$-измеримых действительных функций. Обозначим μ_n^* эмпирическую меру, построенную по выборке $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$,

$$\mu_n^*(A) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \chi_A(\xi_j), \quad A \in \mathbf{B}.$$

Положим $Z_n(f) = \sqrt{n}\left[\int\limits_X f d\mu_n^* - \int\limits_X f d\mu\right]$, $f \in \mathbf{F}$. Если предположить, что $\mathbf{F} \subseteq L_2(X, d\mu)$, то конечномерные распределения последовательности случайных функций $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ слабо сходятся при $n \to \infty$ к