утверждения 2). Равенство (9) можно получить таким же образом.

Замечание. Пусть $\alpha_\gamma(m,n)=|(mn)^{-\gamma^{-1}}S(m,n)|^{(\log\log mn)^{-1}}$, $0<\gamma<2$. В статье [2] показано, что множество предельных точек последовательности $\{\alpha_\gamma(m,1);\ m\geqslant 1\}$ совпадает с отрезком $[0,\exp(\gamma^{-1})]$. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что множество предельных точек последовательности $\{\alpha_\gamma(m,n);\ m\geqslant 1,\ n\geqslant 1\}$ совпадает с отрезком $[0,\exp(2\gamma^{-1})]$. Из теоремы 2 также следует, что множество предельных точек последовательности $\{|S(m,n)|/(mn\log\log mn)^{1/2};\ m\geqslant 1,\ n\geqslant 1\}$ совпадает с отрезком $[0,2]$, если случайные величины $\{X(m,n);\ m\geqslant 1, n\geqslant 1\}$ распределены по гауссовскому закону с параметрами 0 и 1. Для гауссовских случайных величин более общие результаты можно получить из теорем работы [1].

1. *Wichura M.* Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments.— Ann. Probab., 1973, 1, 2. 2. *Chover J.* A law of the iterated logarithm for stable summands.— Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 47, 3. 3. *Paranjape S. R.*, *Parc C.* Laws of iterated logarithm of multiparameter Wiener processes.— J. of Multivariate Analysis, 1973, N 3.

Поступила в редколлегию 30.11.79

O. I. Klesov

ON THE LAW OF ITERATED LOGARITHM FOR STABLE SUMMANDS

The law of iterated logarithm for stable summands is proved.

УДК 519.21

В. И. КОЛЧИНСКИЙ, асп.
Киевский университет

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР

1. Пусть задано измеримое пространство $(X,\mathbf{B})$, $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — независимые случайные элементы, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, принимающие значения в $(X,\mathbf{B})$ и имеющие распределение μ, $\mathbf{F}$ — класс $\mathbf{B}$-измеримых действительных функций. Обозначим μ_n^* эмпирическую меру, построенную по выборке $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$,

$$\mu_n^*(A)=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\chi_A(\xi_j),\qquad A\in\mathbf{B}.$$

Положим $Z_n(f)=\sqrt{n}\left[\int\limits_X f d\mu_n^*-\int\limits_X f d\mu\right]$, $f\in\mathbf{F}$. Если предположить, что $\mathbf{F}\subseteq L_2(X,d\mu)$, то конечномерные распределения последовательности случайных функций $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ слабо сходятся при $n\to\infty$ к конечномерным распределениям гауссовской случайной функции G_μ, $MG_\mu(f)=0$, $MG_\mu(f)G_\mu(g)=\int\limits_X fg\,d\mu-\int\limits_X f\,d\mu\int\limits_X g\,d\mu$, $f, g\in\mathbf{F}$.

В дальнейшем будем предполагать, что класс $\mathbf{F}$ равномерно ограничен. Обозначим $\|\cdot\|$ норму $L_2(X, d\mu)$, $l^\infty(\mathbf{F})$ — пространство ограниченных действительных функций на $\mathbf{F}$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$, $\|Y\|_\infty=\sup\limits_{f\in F}|Y(f)|$, $Y\in l^\infty(\mathbf{F})$, $C_b(\mathbf{F})$ — пространство действительных ограниченных непрерывных относительно $\|\cdot\|$ функций на $\mathbf{F}$, $D_0(\mathbf{F})$ — пространство функций на $\mathbf{F}$, представимых в виде $Y_0+\sum\limits_{j=1}^n c_j\delta_{x_j}$, $Y_0\in C_b(\mathbf{F})$, $c_j\in R^1$, $x_j\in X$, $j=1,\dots,n$, $n\geqslant 1$, $\delta_x(f)=f(x)$, $f\in\mathbf{F}$, $x\in X$. Пусть $\boldsymbol{G}(\mathbf{F})$ класс функционалов $\Phi: D_0(\mathbf{F})\to R^1$, непрерывных относительно $\|\cdot\|_\infty$ и таких, что для любых $Y_0\in C_b(\mathbf{F})$, $n\geqslant 1$, $c_1,\dots,c_n\in R^1$ функция $\Phi\left(Y_0+\sum\limits_{j=1}^n c_j\delta_{x_j}\right)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathbf{B}_*^{(n)}$ (пополнение σ-алгебры $\mathbf{B}^{(n)}=\mathbf{B}\times\underset{n}{\dots}\times\mathbf{B}$ по мере $\mu^{(n)}=\mu\times\underset{n}{\dots}\times\mu$).

Класс $\mathbf{F}$ называется μ-эмпирически измеримым, если $\|\cdot\|_\infty\in\boldsymbol{G}(\mathbf{F})$. Для μ-эмпирически измеримого класса $\mathbf{F}$ класс $\mathbf{G}(\mathbf{F})$ содержит все ограниченные, непрерывные относительно $\|\cdot\|_\infty$ и $\mathfrak{B}_b$-измеримые функционалы ($\mathfrak{B}_b$ — σ-алгебра, порожденная шарами в $l^\infty(\mathbf{F})$).

Последовательность эмпирических мер $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет центральной предельной теореме (ц. п. т.) на $\mathbf{F}$, если существует равномерно ограниченная и равномерно непрерывная относительно $\|\cdot\|$ на $\mathbf{F}$ модификация случайной функции G_μ и для любого функционала $\Phi\in\mathbf{G}(\mathbf{F})$ последовательность распределений случайных величин $\Phi(Z_n)$ слабо сходится при $n\to\infty$ к распределению $\Phi(G_\mu)$.

Пример. Пусть $X=C(S)$, S — метрический компакт, $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — независимые одинаково распределенные ограниченные неслучайной постоянной случайные элементы в $C(S)$, $M\xi_1=0$, $\mathbf{F}=\{\delta_t: t\in S\}$. Тогда класс $\mathbf{G}(\mathbf{F})$ включает все непрерывные ограниченные функционалы на $C(S)$ ($D_0(\mathbf{F})$ в этом случае можно отождествить с $C(S)$). Последовательность $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. на $\mathbf{F}$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. в $C(S)$.

Пусть X — некоторое пространство функций на S с σ-алгеброй подмножеств $\mathbf{B}$, тогда $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. в X, если $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. на классе $\mathbf{F}=\{\delta_t: t\in S\}$.

В данной статье будут получены (в терминах определенных энтропийных характеристик класса $\mathbf{F}$) достаточные условия выполнения ц. п. т. на классе $\mathbf{F}$ и, как следствие этих результатов, достаточные условия ц. п. т. в функциональных пространствах.

В случае $\mathbf{F}=\{\chi_A: A\in\mathfrak{B}\}$, $\mathfrak{B}\subseteq\mathbf{B}$ наиболее интересные достаточные условия ц. п. т. на $\mathbf{F}$ установлены Р. Дадли [1].

Центральная предельная теорема в $C(S)$ рассматривалась многими авторами (см. например, [2 — 4]).

2. Обозначим $\mathbf{F}_{k,\delta}=\{(f-g)^k:\|f-g\|<\delta;\ f,g\in\mathbf{F}\}$, $\delta>0$, $k\geqslant 1$. μ-Эмпирически измеримый класс $\mathbf{F}$ называется допустимым, если для любых $\delta>0$, $k\geqslant 1$ класс $\mathbf{F}_{k,\delta}$ — μ-эмпирически измерим.

Напомним, что подмножество метрического пространства называется суслинским, если оно является непрерывным образом полного сепарабельного метрического пространства. Измеримое пространство $(R,\mathfrak{R})$ называется суслинским, если R с некоторой метрикой является суслинским множеством, а $\mathfrak{R}$ — σ-алгеброй его борелевских подмножеств.

Пусть класс $\mathbf{F}$ сепарабелен относительно $\|\cdot\|$.

Теорема 1. Пусть измеримые пространства $(X,\mathbf{B})$ и $(R,\mathfrak{R})$ суслинские, открытые относительно $\|\cdot\|$ подмножества $\mathbf{F}$ принадлежат $\mathfrak{R}$ и для любого $t\in R^1$ $\{(x,f):x\in X,\ f\in\mathbf{F},\ f(x)>t\}\in\mathbf{B}\times\mathfrak{R}$.

Тогда $\mathbf{F}$ — допустимый класс.

Доказательство. В силу условий теоремы любая функция $Y\in D_0(\mathbf{F})$ — $\mathfrak{R}$-измерима. Если $n\geqslant 1$, $b_1,\dots,b_n\in R^1$, $\mathfrak{R}(k)$ обозначает $1/k$-сеть в пространстве R^n (счетную), $k\geqslant 1$, то для любых $t\in R^1$ и $\mathfrak{R}$-измеримой функции Y

$$E_t=\left\{(x,f):\left|\sum_{i=1}^n b_i f(x_i)-Y(f)\right|>t\right\}=$$

$$=\bigcup_{m\geqslant 1}\bigcup_{l\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant l}\bigcup_{z\in\mathfrak{R}(k)}\left\{(x,f):\left|\sum_{i=1}^n b_i z_i-Y(f)\right|>t+\frac{1}{m}\right\}\cap$$

$$\cap\left\{(x,f):\max_{1\leqslant i\leqslant n}|z_i-f(x_i)|\leqslant\frac{1}{k}\right\}\in\mathbf{B}^{(n)}\times\mathfrak{R},$$

и, следовательно, является суслинским множеством*). Но тогда проекция E_t на пространство $X^{(n)}$, равная $\left\{x\in X^{(n)}:\left\|\sum_{i=1}^n b_i\delta_{x_i}-Y\right\|_\infty>t\right\}$, — суслинское множество, значит, оно $\mathbf{B}_*^{(n)}$-измеримо. Отсюда следует, что $\mathbf{F}$ — μ-эмпирически измеримый класс.

Аналогично можно установить, что множество $F_t=\left\{(x,f,g):\right.$ $\left.:\left|\sum_{i=1}^n b_i(f-g)^k(x_i)-Y(f,g)\right|>t\right\}\in\mathbf{B}^{(n)}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ для $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$-измеримой Y, $t\in R^1$. Кроме того, очевидно, $\{(x,f,g):\|f-g\|<\delta\}\in\mathbf{B}^{(n)}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ и, следовательно, $F_t\cap\{(x,f,g):\|f-g\|<\delta\}\in\mathbf{B}^{(n)}\times\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$, значит, является суслинским множеством. Но тогда суслинской будет и проекция последнего множества на $X^{(n)}$, т. е. множе-

*) Свойства суслинских множеств см. в работе [1].

ство $\left\{x: \sup_{\|f-g\|<\delta}\left|\sum_{i=1}^{n} b_i (f-g)^k (x_i) - Y(f,g)\right| > t\right\}$. Отсюда следует, что это множество $\mathbf{B}_*^{(n)}$-измеримо, т. е. $\mathbf{F}_{k,\delta}$ — μ-эмпирически измеримый класс. Теорема доказана.

Следующая теорема, которую мы приведем без доказательства, дает критерий выполнения ц. п. т. на $\mathbf{F}$. Будем предполагать, что $\mathbf{F}$ — вполне ограниченный относительно $\|\cdot\|$ допустимый класс. Для $Y \in l^\infty(\mathbf{F})$ обозначим $\omega(Y;\delta) = \sup_{\|f-g\|<\delta} |Y(f) - Y(g)|$ модуль непрерывности функции Y.

Теорема 2. $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. на $\mathbf{F}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{n}} P\{\omega(Z_n;\delta) \geqslant \varepsilon\} = 0, \ \ \varepsilon > 0.$$

3. Пусть $p \in [1, +\infty)$; для $n \geqslant 1$ определим в R^n норму

$$\|y\|_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n.$$

Для $p = +\infty$ $\|y\|_{n,\infty} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k|$, $y \in R^n$. Для $p \in [1, +\infty]$, $n \geqslant 1$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $\varepsilon > 0$ обозначим $N_\varepsilon^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$ минимальное число элементов в ε-сети относительно $\|\cdot\|_{n,p}$ для множества $\{(f(x_1), \dots, f(x_n)) : f \in \mathbf{F}\} \subseteq R^n$. Если $x_1, \dots, x_n \in X$, то $N_\varepsilon^{(p)}(x_1, \dots, x_n) < +\infty$. Будем считать, что $N_\varepsilon^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$ — $\mathbf{B}^{(n)}$-измерима для любых $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, $p \in [1, +\infty]$. Если это условие не выполнено, то во всех последующих утверждениях $N_\varepsilon^{(p)}$ можно заменить любой мажорирующей ее измеримой функцией.

Положим $N^{(p)}(\varepsilon; n) = N_\varepsilon^{(p)}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbf{H}_\varepsilon^{(p)}(x_1, \dots, x_n) = \ln N_\varepsilon^{(p)}(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{H}^{(p)}(\varepsilon; n) = \mathbf{H}_\varepsilon^{(p)}(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Очевидно, $N^{(p)}(\varepsilon; n)$ и $\mathbf{H}^{(p)}(\varepsilon; n)$ — п. н. конечные случайные величины, монотонно возрастающие с ростом p. Обозначим ε-энтропию класса $\mathbf{F}$ относительно $\|\cdot\|$ через $H(\varepsilon)$. Предположим, что $\mathbf{F}$ — равномерно ограниченный допустимый класс.

Следующая теорема является основным результатом данной статьи.

Теорема 3. Если

$$\int_0 H^{1/2}(u)\, du < +\infty \tag{1}$$

и для любого $\sigma > 0$

$$P\{u\sqrt{\ln 1/u}\,\mathbf{H}^{(1)}(\sigma u; [u^{-2}]) \geqslant \sigma\} \to 0, \ \ u \to 0, \tag{2}$$

то последовательность $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. на $\mathbf{F}$.

Замечание. Условие (2) можно заменить любым из следующих двух:

$$\ln \frac{1}{u} P\{u\mathbf{H}^{(1)}(u; [u^{-2}]) \geqslant 1\} \to 0, \ u \to 0; \tag{3}$$

$$u^2 M [\mathbf{H}^{(1)}(u; [u^{-2}])]^2 \to 0, \ u \to 0. \tag{4}$$

Приведем некоторые следствия теоремы. Пусть $\mathbf{F} = \{\chi_A : A \in \mathfrak{B}\}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{B}$. В этом случае $N_\varepsilon^{(\infty)}(x_1, \ldots, x_n)$ не зависит от ε, $\varepsilon \in (0, 1)$; индекс ε можно опустить: $\mathbf{H}^{(\infty)}(n) = \mathbf{H}^{(\infty)}(\varepsilon; n)$.

Следствие 1. Если выполнено условие (1) и

$$\mathbf{H}^{(\infty)}(n)\, n^{-1/2} (\ln n)^{1/2p} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2'}$$

то последовательность $\{\mu_n^*\}_{n \geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. на $\mathfrak{B}$. В этом случае класс $\mathfrak{B}$ — μ-донскеровский в смысле определения Р. Дадли [1].

Условие (2′) можно заменить любым из условий:

$$\ln nP\{n^{-1/2}\mathbf{H}^{(\infty)}(n) \geqslant 1\} \to 0, \quad n \to \infty; \tag{3'}$$

$$n^{-1} M [\mathbf{H}^{(\infty)}(n)]^2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4'}$$

В силу теоремы Вапника — Червоненкиса [5] для равномерной по классу $\mathfrak{B}$ сходимости последовательности $\{\mu_n^*\}_{n \geqslant 1}$ к μ необходимо и достаточно, чтобы $n^{-1} M\mathbf{H}^{(\infty)}(n) \to 0$, $n \to \infty$. Условия следствия 1 выполняются, в частности, для так называемых классов Вапника — Червоненкиса (определение см. в работе [1]), для которых $\max\limits_{x_1, \ldots, x_n} \mathbf{H}^{(\infty)}(x_1, \ldots, x_n) = O(\ln n)$, $n \to \infty$, $H(\varepsilon) = O(\ln 1/\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. μ-Донскеровость классов Вапника — Червоненкиса для любой меры μ установлена Р. Дадли [1].

Вернемся к случаю произвольного равномерно ограниченного допустимого класса $\mathbf{F}$.

Рангом системы точек $\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства X относительно класса $\mathbf{F}$ называется ранг системы элементов $\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$ линейного пространства $D_0(\mathbf{F})$. Обозначим через $r_\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$ ранг системы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ относительно класса $\mathbf{F}$ и будем считать, что это измеримая функция (в противном случае в последующих рассуждениях $r_\mathbf{F}$ можно заменить мажорирующей измеримой функцией).

Легко убедиться, что $N_\varepsilon^{(\infty)}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant C(\sqrt{n}/\varepsilon)^{r_\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)}$. Обозначим $r_\mathbf{F}(n) = r_\mathbf{F}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Следствие 2. Если выполнено условие (1) и $r_\mathbf{F}(n)\, n^{-1/2} (\ln n)^{3/2} \to 0$, $n \to \infty$, то $\{\mu_n^*\}_{n \geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. на $\mathbf{F}$.

Если X — линейное пространство, $\mathbf{F}$ — единичный шар в сопряженном пространстве, то $r_\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$ — ранг системы векторов $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Обозначим $H_\rho(\varepsilon)$ ε-энтропию класса $\mathbf{F}$ относительно некоторо[й] метрики ρ. Пусть $|f(x)-g(x)|\leqslant L(x)\rho(f,g)$, $f,g\in\mathbf{F}$, $x\in X$, г[де] $L:X\to R^1$ — $\mathbf{B}$-измерима. Очевидна оценка

$$\mathbf{H}_\varepsilon^{(p)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant H_\rho\left(\frac{\varepsilon}{\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}L^p(x_k)\right)^{1/p}}\right),$$

используя которую нетрудно получить такие утверждения.

Следствие 3. Если выполнено условие (1), для некоторог[о] $1>\mu>0$, $H_\rho(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-\mu})$, $\varepsilon\to 0$, и для некоторого $p>2\mu(1-\mu)^{-1}$ $ML^p(\xi_1)<+\infty$, то на $\mathbf{F}$ выполняется ц. п. т. для $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$.

Следствие 4. Если выполнено условие (1), $H_\rho(\varepsilon)=o(\varepsilon^{-\mu})$, $\varepsilon\to 0$ для любого $\mu>0$ и для некоторого $p>2$

$$MH_\rho^p(1/L(\xi_1))<+\infty,$$

то на $\mathbf{F}$ выполняется ц. п. т. для $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$.

Заметим, что при $p>3\mu(1-\mu)^{-1}$ в следствии 3 и $p>3$ [в] следствии 4 можно показать, что условие (1) выполняется.

Из следствий 3 и 4 очевидным образом вытекают два варианта ц. п. т. в $C(S)$ при различных предположениях об ε-энтропии компакта S.

Пусть $X=C([0,1])$. Обозначим $v(x)$ вариацию функции $x\in X$. Легко убедиться в справедливости оценки

$$N_\varepsilon^{(1)}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\frac{C}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}v(x_j).$$

Следствие 5. Если для некоторого $p>2$

$$M\ln_+^p v(\xi_1)<+\infty,\ \int\limits_0 H_\tau^{1/2}(u)\,du<+\infty,$$

где H_τ — энтропия относительно метрики τ отрезка $[0,1]$, $\tau^2(s,t)=M(\xi_1(s)-\xi_1(t))^2$, $s,t\in[0,1]$, то последовательность $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. в $C([0,1])$.

Следствие 6. Если

$$\int\limits_0 H_\tau^{1/2}(u)\,du<+\infty,\ M|\xi_1(t)-\xi_1(s)|^\alpha<C|t-s|^{1+\beta},\ t,s\in[0,1]$$

для некоторых C, α, $\beta>0$, то последовательность $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ц. п. т. в $C([0,1])$.

4. В этом разделе будут получены некоторые оценки, нужные для доказательства теоремы 3. Будем считать, что $\mathbf{F}$ — μ-эмпири-

чески измеримый класс. Обозначим

$$A=\left\{\omega:\sup_{f\in\mathbf{F}}\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)-Mf(\xi_1)\right|\geqslant 2\varepsilon\right\},$$

$$B=\left\{\omega:\sup_{f\in\mathbf{F}}\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)-n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}f(\xi_k)\right|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

Лемма 1. Для произвольного события $C\in\mathfrak{A}(\xi_n:n\geqslant 1)$ (наименьшая σ-алгебра, порожденная $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$) справедлива оценка

$$P(A\cap C)\leqslant\frac{C(\mathbf{F})}{n\varepsilon^2}P(A)+P(B\cap C),$$

где $C(\mathbf{F})=\sup\limits_{f\in\mathbf{F}}Df(\xi_1)$.

Доказательство. Очевидно,

$$P(B\cap C)=\int_{\Omega}P(B\cap C\mid\xi_1,\ldots,\xi_n)\,dP\geqslant\int_{A}P(B\cap C\mid\xi_1,\ldots,\xi_n)\,dP.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$P(B\cap C\mid\xi_1,\ldots,\xi_n)\geqslant 1-\frac{C(\mathbf{F})}{n\varepsilon^2}-P(\bar{C}\mid\xi_1,\ldots,\xi_n),$$

если $\omega\in A$.

Очевидно, для $D\in\mathfrak{A}(\xi_n:n\geqslant 1)$ найдется $D'\in\mathbf{B}^{(\infty)}$ такое, что $D=\{\omega:\{\xi_n(\omega)\}_{n\geqslant 1}\in D'\}$. Пусть для $D'\in\mathbf{B}^{(\infty)}$ $D'_{x_1,\ldots,x_n}=\{\{x_k\}_{k\geqslant n+1}:\{x_k\}_{k\geqslant 1}\in D'\}$ — сечение множества D'.

Ясно, что для $D\in\mathfrak{A}(\xi_n:n\geqslant 1)$ существует измеримая функция q_D такая, что

$$P(D\mid\xi_1,\ldots,\xi_n)=q_D(\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

Поскольку элементы ξ_n независимы,

$$q_D(x_1,\ldots,x_n)=P\{\omega:\{\xi_k(\omega)\}_{k\geqslant n+1}\in D'_{x_1,\ldots,x_n}\}.$$

Далее, если $\{x_k\}_{k\geqslant 1}\in A'$, то существует $\hat{f}\in\mathbf{F}$ (зависящая от $x_1,\ldots,x_n$) такая, что $\left|n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{f}(x_k)-M\hat{f}(\xi_1)\right|\geqslant 2\varepsilon$. Положим

$$\hat{B}=\left\{\omega:\left|n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}\hat{f}(\xi_k)-M\hat{f}(\xi_1)\right|\leqslant\varepsilon\right\}.$$

Если $\{x_k\}_{k\geqslant 1}\in A'$, то

$$\hat{B}\subseteq\left\{\omega:\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\hat{f}(x_k)-n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}\hat{f}(\xi_k)\right|\geqslant\varepsilon\right\}\subseteq$$

$$\subseteq \{\omega : \{\xi_k(\omega)\}_{k\geqslant n+1} \in B'_{x_1,\ldots,x_n}\}.$$

Из этих замечаний следует, что

$$q_{B\cap C}(x_1, \ldots, x_n) = P\{\omega : \{\xi_k(\omega)\}_{k\geqslant n+1} \in B'_{x_1,\ldots,x_n} \cap C'_{x_1,\ldots,x_n}\} \geqslant$$

$$\geqslant P(\hat{B} \cap \{\omega : \{\xi_k(\omega)\}_{k\geqslant n+1} \in C'_{x_1,\ldots,x_n}\}) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - P\left\{\omega : \left| n^{-1} \sum_{k=n+1}^{2n} \hat{f}(\xi_k) - M\hat{f}(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right\} -$$

$$- P\{\omega : \{\xi_k(\omega)\}_{k\geqslant n+1} \in \overline{C}'_{x_1,\ldots,x_n}\} \geqslant 1 - \frac{C(\mathbf{F})}{n\varepsilon^2} - q_{\overline{C}}(x_1, \ldots, x_n),$$

если $\{x_k\}_{k\geqslant 1} \in A'$. Лемма доказана.

Пусть S_{2n} — симметрическая группа на множестве $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Для любой ее подгруппы G обозначим $\mathbf{B}(G)$ σ-алгебру событий, порожденных системой случайных элементов $\{\xi_1, \ldots, \xi_{2n}\}$ и инвариантных относительно принадлежащих группе G перестановок этой системы. Пусть G_{2n} — подгруппа S_{2n}, порожденная транспозициями вида $(k\ \ k+n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Очевидно, порядок группы G_{2n} равен 2^n.

Лемма 2.

$$P\left\{\sup_{f\in\mathbf{F}} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - n^{-1} \sum_{k=n+1}^{2n} f(\xi_k)\right| \geqslant 3\varepsilon \mid \mathbf{B}(G_{2n})\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2N_\varepsilon^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}) \exp\left\{-\frac{1}{8} \frac{n\varepsilon^2}{\sup\limits_{f\in\mathbf{F}} (2n)^{-1} \sum\limits_{k=1}^{2n} f^2(\xi_k)}\right\},$$

$$\varepsilon > 0, \ n \geqslant 1. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно,

$$P\left\{\sup_{f\in\mathbf{F}} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - n^{-1} \sum_{k=n+1}^{2n} f(\xi_k)\right| \geqslant 3\varepsilon \mid \mathbf{B}(G_{2n})\right\} =$$

$$= 2^{-n} \sum_{\pi\in G_{2n}} \chi\left\{\sup_{f\in\mathbf{F}} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{\pi k}) - n^{-1} \sum_{k=n+1}^{2n} f(\xi_{\pi k})\right| \geqslant 3\varepsilon\right\}. \tag{6}$$

Пусть $\mathbf{F}' \subseteq \mathbf{F}$ — множество функций, содержащее $N_\varepsilon^{(1)}(x_1, \ldots, x_{2n})$ элементов и такое, что для любой $f \in \mathbf{F}$ существует $\hat{f} \in \mathbf{F}$, для которой $2n^{-1} \sum_{k=1}^{2n} |f(x_k) - \hat{f}(x_k)| \leqslant \varepsilon$ ($x_1, \ldots, x_{2n} \in X$ — фиксированные).

Тогда

$$2^{-n}\sum_{\pi\in G_{2n}}\chi\left\{\sup_{f\in\mathbf{F}}\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f(x_{\pi k})-n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}f(x_{\pi k})\right|\geqslant 3\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{f\in\mathbf{F}'}2^{-n}\sum_{\pi\in G_{2n}}\chi\left\{\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f(x_{\pi k})-n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}f(x_{\pi k})\right|\geqslant\varepsilon\right\}. \qquad (7)$$

Легко показать, что для любой $f\in\mathbf{F}$

$$2^{-n}\sum_{\pi\in G_{2n}}\chi\left\{\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f(x_{\pi k})-n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}f(x_{\pi k})\right|\geqslant\varepsilon\right\}=$$

$$=P\left\{\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left[f(x_k)-f(x_{k+n})\right]\right|\geqslant\varepsilon\right\},$$

где $\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant 1}$ — последовательность Радемахера. Воспользовавшись неравенством Хефдинга (см. [6, с. 76]), получим

$$P\left\{\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left[f(x_k)-f(x_{k+n})\right]\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{n^2\varepsilon^2}{2\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f(x_k)-f(x_{k+n})\right]^2}\right\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{8}\frac{n\varepsilon^2}{(2n)^{-1}\sum\limits_{k=1}^{2n}f^2(x_k)}\right\}.$$

Используя последние оценки и (7), находим

$$2^{-n}\sum_{\pi\in G_{2n}}\chi\left\{\sup_{f\in\mathbf{F}}\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f(x_{\pi k})-n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}f(x_{\pi k})\right|\geqslant 3\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2N_\varepsilon^{(1)}(x_1,\ldots,x_{2n})\exp\left\{-\frac{1}{8}\frac{n\varepsilon^2}{\sup\limits_{f\in\mathbf{F}}(2n)^{-1}\sum\limits_{k=1}^{2n}f^2(x_k)}\right\}.$$

Отсюда с учетом (6) следует доказательство леммы.

5. Докажем теперь две леммы, которые позволят применить к последовательности $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ критерий выполнения ц. п. т. Обозначим

$$Q_\sigma(u)=P\{u\sqrt{\ln 1/u}\,\mathbf{H}^{(1)}(\sigma u;[u^{-2}])\geqslant\sigma\},\quad u>0,\ \sigma>0.$$

Лемма 3. Для любого $\varepsilon>0$ найдутся $C>0$ и $\sigma>0$ такие, что при достаточно больших n

$$P\left\{\omega\left(Z_n;\sqrt[4]{\frac{\ln n}{n}}\right)\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C\left[\sqrt{\frac{\ln n}{n}}+Q_\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{2n\ln n}}\right)+Q_\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right].$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать что $|f(x)| \leqslant 1/4$, $x \in X$, $f \in \mathbf{F}$. Положим

$$\pi_{p,n}(\delta) = \sup_{\|f-g\|<\delta} \left| (pn)^{-1} \sum_{j=1}^{pn} (f-g)^p(\xi_j) - \right.$$

$$\left. - (pn)^{-1} \sum_{j=pn+1}^{2pn} (f-g)^p(\xi_j) \right|,$$

$$\rho_{p,n}(\delta) = \sup_{\|f-g\|<\delta} \left| (pn)^{-1} \sum_{j=1}^{pn} (f-g)^p(\xi_j) - M(f-g)^p(\xi_1) \right|,$$

где $\delta > 0$, $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, $\delta_n = \sqrt[4]{\frac{\ln n}{n}}$, $k_n = \left[\frac{\ln \ln n}{\ln 2}\right]$, $n \geqslant 1$. Так как $|f(x) - g(x)| \leqslant 1/2$, $x \in X$, $f, g \in \mathbf{F}$, легко показать, что при $k > k_n$ $\rho_{2^k,n}(\delta_n) < 6\delta_n^2$, т. е.

$$P\{\rho_{2^k,n}(\delta_n) \geqslant 6\delta_n^2\} = 0. \tag{8}$$

К классу $\mathbf{F}_{2^k,\delta_n}$ можно применить оценку леммы 2 и получить неравенство

$$P\{\pi_{2^k,n}(\delta_n) \geqslant 3\delta_n^2 \mid \mathbf{B}(G_{2n})\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{8}\frac{\delta_n^4 2^k n}{\rho_{2^{k+1},n}(\delta_n) + \delta_n^2} + 2\mathbf{H}^{(1)}\left(\frac{\delta_n^2}{4}\cdot\frac{2^{2^k}}{2^k};\, 2^{k+1}n\right)\right\}. \tag{9}$$

При $1 \leqslant k \leqslant k_n$

$$\mathbf{H}^{(1)}\left(\frac{\delta_n^2}{4}\cdot\frac{2^{2^k}}{2^k};\, 2^{k+1}n\right) \leqslant \mathbf{H}^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2n\ln n}};\, [2n\ln n]\right).$$

Обозначим $A_{n,k} = \{\omega : \rho_{2^k,n}(\delta_n) \geqslant 6\delta_n^2\}$, $B_{n,k} = \{\omega : \pi_{2^k,n}(\delta_n) \geqslant 3\delta_n^2\}$, $C_n = \left\{\omega : 2\mathbf{H}^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2n\ln n}};\, [2n\ln n]\right) \leqslant \sigma\sqrt{n\ln n}\right\}$, где $\sigma > 0$ — достаточно малое. Очевидно,

$$P(A_{n,k} \cap C_n) \leqslant P(A_{n,k} \cap \bar{A}_{n,k+1} \cap C_n) + P(A_{n,k+1} \cap C_n). \tag{10}$$

Воспользуемся теперь оценкой леммы 1, положив $A = A_{n,k}$, $B = B_{n,k}$, $C = A_{n,k+1} \cap C_n$. Имеем

$$P(A_{n,k} \cap \bar{A}_{n,k+1} \cap C_n) \leqslant \frac{4}{9}\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \times$$

$$\times \frac{1}{2^{2^{k+1}} \cdot 2^k} + P(B_{n,k} \cap \bar{A}_{n,k+1} \cap C_n), \tag{11}$$

учитывая, что для класса $\mathbf{F}_{2k,\delta}$ $C(\mathbf{F}_{2k,\delta}) \leqslant 4\delta^2/2^{2^{k+1}}$, так как $|f(x) - g(x)| \leqslant 1/2$, $x \in X$, f, $g \in \mathbf{F}$. Используя оценку (9), легко получить $P(B_{n,k} \cap A_{n,k+1} \cap C_n) \leqslant 2\exp\{-\beta \cdot 2^k \sqrt{n \ln n}\}$ с некоторым $\beta > 0$.

Объединяя последнюю оценку с (10) и (11), находим

$$P(A_{n,k} \cap C_n) \leqslant \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \frac{1}{2^{2^{k+1}} \cdot 2^k} + 2\exp\{-\beta \cdot 2^k \sqrt{n \ln n}\} + + P(A_{n,k+1} \cap C_n).$$

Применяя это неравенство последовательно при $k = 1, 2, \ldots, k_n$ и учитывая (8), получаем

$$P(A_{n,1} \cap C_n) \leqslant \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{2^{2^{k+1}} \cdot 2^k} + 2 \sum_{k=1}^{k_n} \exp\{-\beta \times \times 2^k \sqrt{n \ln n}\} \leqslant \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} + \frac{2\exp\{-\beta \sqrt{n \ln n}\}}{1 - \exp\{-\beta \sqrt{n \ln n}\}},$$

т. е. при больших n

$$P(A_{n,1} \cap C_n) \leqslant \sqrt{\frac{\ln n}{n}} + 3\exp\{-\beta \sqrt{n \ln n}\}. \tag{12}$$

Положив теперь $A = \{\omega : \rho_{1,n}(\delta_n) \geqslant 6\varepsilon/\sqrt{n}\}$, $B = \{\omega : \pi_{1,n}(\delta_n) \geqslant \geqslant 3\varepsilon/\sqrt{n}\}$, $C = \left\{\omega : \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\, \mathbf{H}^{(1)}(\varepsilon/\sqrt{n}, 2n) \leqslant \sigma\right\} \cap \bar{A}_{n,1}$ (σ — достаточно малое) и применив оценки лемм 1 и 2, аналогичным образом можно получить

$$P(A \cap C) \leqslant \frac{1}{9\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} + P(B \cap C) \leqslant \leqslant \frac{1}{9\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} + 2\exp\left\{-\beta \frac{\varepsilon^2}{\delta_n^2}\right\},$$

где $\beta > 0$ — постоянная. Следовательно,

$$P(A) \leqslant P(A \cap C) + P(\bar{C}) \leqslant \leqslant \frac{1}{9\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} + 2\exp\left\{-\beta\varepsilon^2 \sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right\} + P(\bar{C})$$

или

$$P\left\{\omega\left(Z_n; \sqrt[4]{\frac{\ln n}{n}}\right) \geqslant 6\varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{9\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} + 2\exp\left\{-\beta\varepsilon^2 \sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right\} + + P(A_{n,1}) + P\left\{\omega : \mathbf{H}^{(1)}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}; 2n\right) \geqslant \sigma \sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right\}.$$

Учитывая последнюю оценку и соотношение (12), легко завершить доказательство.

Лемма 4. При условиях теоремы 3

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\overline{\lim_{n}}\, P\{\omega(Z_n;\delta)\geqslant\varepsilon\}=0,\quad \varepsilon>0.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}(\delta)$ — минимальная δ-сеть для $\mathbf{F}$ относительно $\|\cdot\|$. Очевидно,

$$\omega(Z_n;\delta)\leqslant\sum_{j=r-1}^{m_n}\eta_j+2\omega\left(Z_n;\sqrt[4]{\frac{\ln n}{n}}\right),$$

где

$$\delta\in\left(\frac{1}{2^{r+1}},\ \frac{1}{2^r}\right],\quad 2^{m_n}=C\sqrt[4]{\frac{n}{\ln n}},\quad n\geqslant 1,$$

C — достаточно велико,

$$\eta_{r-1}=\max\{|Z_n(f)-Z_n(g)|:f,\ g\in\mathfrak{N}(2^{-r}),$$

$$\|f-g\|<3\cdot 2^{-r}\},$$

$$\eta_j=\max\{|Z_n(f)-Z_n(g)|:f\in\mathfrak{N}(2^{-j}),$$

$$g\in\mathfrak{N}(2^{-j-1}),\quad \|f-g\|<3\cdot 2^{-j-1}\},\quad j\geqslant r.$$

Учитывая утверждение леммы 3 и применяя к оценке вероятности $P\left\{\sum_{j=1}^{m_n}\eta_j\geqslant\varepsilon\right\}$ стандартные методы [1 — 4], нетрудно завершить доказательство леммы 4.

В силу леммы 4 и критерия выполнения ц.п.т. теорема 3 доказана.

1. *Dudley R. M.* Central limit theorems for empirical measures.—Ann. Probab., 1978. **6**, 6. 2. *Gine E.* On the central limit theorem for sample continuous processes.— Ann. Probab., 1974, **2**, 4. 3. *Dudley R. M.* Metric entropy and the central limit theorem in C(S).— Annales de l'Institut Fourier, 1974, **24**, 2. 4. *Jain N. C., Marcus M. B.* Central limit theorem for C(S)-valued random variables.— J. Functional Analysis, 1975, **19**, 3. 5. *Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.* О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям.— Теория вероятностей и ее применения, 1971, **16**, вып. 2. 6. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., 1972.

Поступила в редколлегию 30.06.79

V. I. Kolchinsky

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR EMPIRICAL MEASURES

The weak convergence of the distributions of random functions $Z_n(f)=\sqrt{n}\left[\int_X fd\mu_n^*-\int_X fd\mu\right]$, $f\in\mathbf{F}$ to the limiting Gaussian law in a certain functional space is proved under some sufficient conditions, $(X, \mathbf{B})$ being the measura-

ble space, μ_n^* — empirical measure which corresponds to the sample $(\xi_1, ..., \xi_n)$ of independent random elements taking values in space $(X, \mathbf{B})$ with distribution μ, $\mathbf{F}$ — the class of measurable functions on X.

The results are applied for obtaining the conditions of the central limit theorem in space $C(S)$, S — metric compact.

УДК 519.21

В. С. КОРОЛЮК, акад. АН УССР,
Ю. В. БОРОВСКИХ, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ СИММЕТРИИ

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые наблюдения над случайной величиной с непрерывной функцией распределения $F(x)$. На основании данной выборки требуется проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что $F(x)$ симметрична относительно нуля, т. е. H_0 : $F(-x) = 1 - F(x)$ для всех $-\infty < x < \infty$. Эта задача решалась в работах [1—3]. В частности, в статье [3] предложен критерий, статистика которого определяется как

$$\varepsilon_n^2 = \frac{n}{4}\int\limits_0^\infty \left(\frac{h_x^+ - h_x^-}{n}\right)^2 d_x\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{n}\right), \tag{1}$$

где h_x^+ — число наблюдений в исходной выборке, попавших в промежуток $(0, x)$, h_x^- — число наблюдений в промежутке $(-x, 0)$. Положим $\Delta_n = \sup\limits_\lambda |P(n^{-2}\varepsilon_n^2 < \lambda) - \Phi(\lambda)|$, где $\Phi(\lambda) = P\left(\int\limits_0^{1/2} \omega^2(t)\,dt < \lambda\right)$, $\omega(t)$ — винеровский процесс на $[0, 1/2]$.

Относительно ε_n^2 в работе [3] установлено, что при $n \to \infty$ величина $\Delta_n \to 0$, если справедлива нулевая гипотеза H_0. Естественным является вопрос об оценке скорости убывания к нулю Δ_n и асимптотическом разложении.

Теорема. При гипотезе H_0 и $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\Delta_n = O(\ln n/\sqrt{n}). \tag{2}$$

Доказательство. Расположим абсолютные значения $|X_1|$, $|X_2|, \ldots, |X_n|$ исходных величин в порядке возрастания

$$Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_n. \tag{3}$$

Пусть R_i^+ — номер $|X_i|$ в ряду (3), т. е. R_i^+ — ранг $|X_i|$. Стало быть, можно написать

$$R_i^+ = \sum_{j=1}^n \delta(|X_i| - |X_j|), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$