ble space, $\mu_n^*$ — empirical measure which corresponds to the sample $(\xi_1, ..., \xi_n)$ of independent random elements taking values in space $(X, \mathbf{B})$ with distribution $\mu$, $\mathbf{F}$ — the class of measurable functions on $X$.

The results are applied for obtaining the conditions of the central limit theorem in space $C(S)$, $S$ — metric compact.

УДК 519.21

В. С. КОРОЛЮК, акад. АН УССР,
Ю. В. БОРОВСКИХ, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

## О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ СИММЕТРИИ

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые наблюдения над случайной величиной с непрерывной функцией распределения $F(x)$. На основании данной выборки требуется проверить нулевую гипотезу $H_0$ о том, что $F(x)$ симметрична относительно нуля, т. е. $H_0$: $F(-x) = 1 - F(x)$ для всех $-\infty < x < \infty$. Эта задача решалась в работах [1—3]. В частности, в статье [3] предложен критерий, статистика которого определяется как

$$\varepsilon_n^2 = \frac{n}{4}\int_0^\infty \left(\frac{h_x^+ - h_x^-}{n}\right)^2 d_x\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{n}\right), \tag{1}$$

где $h_x^+$ — число наблюдений в исходной выборке, попавших в промежуток $(0, x)$, $h_x^-$ — число наблюдений в промежутке $(-x, 0)$. Положим $\Delta_n = \sup_\lambda |P(n^{-2}\varepsilon_n^2 < \lambda) - \Phi(\lambda)|$, где $\Phi(\lambda) = P\left(\int_0^{1/2}\omega^2(t)\,dt < \lambda\right)$, $\omega(t)$ — винеровский процесс на $[0, 1/2]$.

Относительно $\varepsilon_n^2$ в работе [3] установлено, что при $n \to \infty$ величина $\Delta_n \to 0$, если справедлива нулевая гипотеза $H_0$. Естественным является вопрос об оценке скорости убывания к нулю $\Delta_n$ и асимптотическом разложении.

**Теорема.** При гипотезе $H_0$ и $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\Delta_n = O(\ln n/\sqrt{n}). \tag{2}$$

Доказательство. Расположим абсолютные значения $|X_1|$, $|X_2|, \ldots, |X_n|$ исходных величин в порядке возрастания

$$Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_n. \tag{3}$$

Пусть $R_i^+$ — номер $|X_i|$ в ряду (3), т. е. $R_i^+$ — ранг $|X_i|$. Стало быть, можно написать

$$R_i^+ = \sum_{j=1}^n \delta(|X_i| - |X_j|), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Пусть $(D_1^+, D_2^+, \ldots, D_n^+)$ — вектор антирангов [4], т. е. перестановка чисел $(1, 2, \ldots, n)$, обратная по отношению к $(R_1^+, R_2^+, \ldots, R_n^+)$. Определим случайные величины $v_1, v_2, \ldots, v_n$ по формуле

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{если } X_{D_j^+} > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственное интегрирование в (1) показывает, что

$$\varepsilon_n^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_k - k/2)^2, \tag{4}$$

где $P_k$ обозначает число положительных $X_i$, которые удовлетворяют неравенству $|X_i| \leqslant Z_k$. Далее, по определению $P_k$ и очевидному соотношению $Z_j = |X_{D_j^+}|$ имеем цепочку равенств

$$P_k = \sum_{j=1}^{n} \delta(X_j)\, \delta(Z_k - |X_j|) = \sum_{j=1}^{n} \delta(X_{D_j^+})\, \delta(Z_k - |X_{D_j^+}|) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \delta(X_{D_j^+})\, \delta(Z_k - Z_j) = \sum_{j=1}^{k} \delta(X_{D_j^+}) = \sum_{j=1}^{k} v_j.$$

Отсюда и из (4) находим

$$\varepsilon_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{k} [v_j - 1/2] \right\}^2.$$

Положим $\eta_j = 2v_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При гипотезе $H_0$ $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $P(\eta_j = -1) = P(\eta_j = 1) = 1/2$.

Таким образом, имеет место представление (ср. с [2])

$$\varepsilon_n^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} S_k^2, \tag{5}$$

где $\{S_k; S_k = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k,\ k \geqslant 1\}$ — простейшее случайное блуждание. Формула (5) показывает, что в случае справедливости нулевой гипотезы $H_0$ распределение статистики $\varepsilon_n^2$ может быть связано с распределением определенного функционала интегрального типа [5]. Воспользовавшись этим обстоятельством и оценкой (3) [5, с. 296], при $a = 1$, $s = 6$, получим (2). Теорема доказана.

Для распределений интегральных случайных величин $S_n^{(a)}$ и $R_n^{(a)}$, введенных в работе [2], оценка (2) также имеет место, если справедлива нулевая гипотеза $H_0$, поскольку в этом случае распределение статистики $\varepsilon_n^2$ также можно связать с простейшим случайным блужданием $\{S_k\}$.

Идея представления среднеквадратических статистик типа (1) в виде функционалов от простейшего случайного блуждания $\{S_k\}$ особенно полезна в теории сравнения критериев по методу Бахадура [6]. Насколько нам известно, эффективность по Бахадуру для данного класса критериев мало изучена.

1. *Srivasan R., Godio L. B.* A Cramer — von Mises type statistic for testing symmetry.— Biometrika, 1974, **61**, N 1. 2. *Gregory G. G.* Cramervon Mises type tests for symmetry.— South African Statist. J., 1977, 11. 3. *Hill D. L., Rao P. V.* Tests of symmetry on Cramer — von Mises statistics.— Biometrika, 1977, **64**, 3. 4. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. М., 1971. 5. *Борисов И. С.* О скорости сходимости распределений функционалов интегрального вида.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, **21**, вып. 2. 6. *Bahadur R. R.* Some limit theorems in statistics.— SIAM J. Appl. Math., 1971, **20**, N 1.

Поступила в редколлегию 28.12.79

*V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskih*

ON MEAN SQUARE TESTS OF SYMMETRY

Asymptotical bounds for distributions of some statistics are obtained.

УДК 519.21

Ю. Г. КУРИЦЫН, канд. физ.-мат. наук
Воронежский университет

## О СИНГУЛЯРНОСТИ НАИЛУЧШЕЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим стационарный, непрерывный в среднем квадратическом процесс $X_t(\omega)$ $(\omega \in \Omega,\ t \in [0, T])$ с неизвестным средним значением и известной на отрезке $[-T, T]$ ковариационной функцией $B(\tau)$, $(B(0) = 1)$. Обозначим через $m_T^*(\omega)$ наилучшую линейную несмещенную оценку (н. л. н. о.) среднего значения, построенную по отрезку наблюдения $[0, T]$, и через $m_n^*(\omega)$ — н. л. н. о. среднего значения, построенную по наблюдениям $\{X_{t_k}(\omega)\}_{k=0}^n$, $t_0 = 0$, $t_k \in [0, T]$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Назовем н. л. н. о. среднего значения $m_T^*(\omega)$ ($m_n^*(\omega)$ сингулярной, если ее дисперсия $\sigma_T^2 = 0$ $(\sigma_n^2 = 0)$, в противном случае будем называть н. л. н. о. регулярной.

В статье [1] автор указывал на возможность существования связи между сингулярностью оценки и однозначным продолжением ковариационной функции $B(\tau)$ с отрезка $[-T, T]$ на всю числовую ось с сохранением неотрицательной определенности. В настоящей работе, основываясь на экстремальных свойствах ортогональных полиномов (см., например, [2]), удалось доказать существование отмеченной связи.

**Теорема 1.** Оценка $m_T^*(\omega)$ сингулярна тогда и только тогда, когда ковариационная функция $B(\tau)$ однозначно продолжима с от-