Идея представления среднеквадратических статистик типа (1) в виде функционалов от простейшего случайного блуждания $\{S_k\}$ особенно полезна в теории сравнения критериев по методу Бахадура [6]. Насколько нам известно, эффективность по Бахадуру для данного класса критериев мало изучена.

1. *Srivasan R., Godio L. B.* A Cramer — von Mises type statistic for testing symmetry.— Biometrika, 1974, **61**, N 1. 2. *Gregory G. G.* Cramervon Mises type tests for symmetry.— South African Statist. J., 1977, 11. 3. *Hill D. L., Rao P. V.* Tests of symmetry on Cramer — von Mises statistics.— Biometrika, 1977, **64**, 3. 4. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. М., 1971. 5. *Борисов И. С.* О скорости сходимости распределений функционалов интегрального вида.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, **21**, вып. 2. 6. *Bahadur R. R.* Some limit theorems in statistics.— SIAM J. Appl. Math., 1971, **20**, N 1.

Поступила в редколлегию 28.12.79

V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskih

ON MEAN SQUARE TESTS OF SYMMETRY

Asymptotical bounds for distributions of some statistics are obtained.

УДК 519.21

Ю. Г. КУРИЦЫН, канд. физ.-мат. наук
Воронежский университет

О СИНГУЛЯРНОСТИ НАИЛУЧШЕЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим стационарный, непрерывный в среднем квадратическом процесс $X_t(\omega)$ ($\omega \in \Omega$, $t \in [0, T]$) с неизвестным средним значением и известной на отрезке $[-T, T]$ ковариационной функцией $B(\tau)$, ($B(0) = 1$). Обозначим через $m_T^*(\omega)$ наилучшую линейную несмещенную оценку (н. л. н. о.) среднего значения, построенную по отрезку наблюдения $[0, T]$, и через $m_n^*(\omega)$ — н. л. н. о. среднего значения, построенную по наблюдениям $\{X_{t_k}(\omega)\}_{k=0}^n$, $t_0 = 0$, $t_k \in [0, T]$ ($k = 1, 2, ..., n$).

Назовем н. л. н. о. среднего значения $m_T^*(\omega)$ ($m_n^*(\omega)$ сингулярной, если ее дисперсия $\sigma_T^2 = 0$ ($\sigma_n^2 = 0$), в противном случае будем называть н. л. н. о. регулярной.

В статье [1] автор указывал на возможность существования связи между сингулярностью оценки и однозначным продолжением ковариационной функции $B(\tau)$ с отрезка $[-T, T]$ на всю числовую ось с сохранением неотрицательной определенности. В настоящей работе, основываясь на экстремальных свойствах ортогональных полиномов (см., например, [2]), удалось доказать существование отмеченной связи.

Теорема 1. Оценка $m_T^*(\omega)$ сингулярна тогда и только тогда, когда ковариационная функция $B(\tau)$ однозначно продолжима с отрезка $[-T, T]$ на всю ось и спектральная функция $F(\lambda)$ этого продолжения непрерывна в нуле.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай неоднозначного продолжения ковариационной функции $B(\tau)$ с отрезка $[-T, T]$ на всю ось. Пусть последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, $t_0=0$, $t_k \in [0, T]$ $(k=1, 2, \ldots)$ всюду плотна в отрезке $[0, T]$. Обозначим $L_n = \{m(\omega);\ m(\omega) = \sum_{k=0}^{n} c_k X_{t_k}(\omega),\ \sum_{k=0}^{n} c_k = 1\}$ совокупность линейных несмещенных оценок среднего значения, построенных по наблюдениям в точках $\{t_k\}_{k=0}^{n}$. Удобно от множества L_n перейти к изометрическому множеству $\widetilde{L}_n \rightleftharpoons \{\varphi(\lambda);\ \varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{it_k\lambda},\ \varphi(0)=1\}$ в пространстве $L^2(dF)$ комплекснозначных функций, где $F(\lambda)$ — спектральная функция некоторого продолжения ковариационной функции $B(\tau)$ с отрезка $[-T, T]$ на всю ось (см. [3, гл. XIX, § 8]). В силу теоремы 3.8 [4, гл. VIII] дисперсия $\sigma_n^2 > 0$ для любого n и любой последовательности точек наблюдения $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ из отрезка $[0, T]$.

Построим по функциям $\{e^{it_k\lambda}\}_{k=0}^{n}$ систему ортонормированных в $L^2(dF)$ полиномов $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{n}$, $P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_{jk} e^{it_j\lambda}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$. Тогда дисперсия σ_n^2 н. л. н. о. $m_n^*(\omega)$ может быть найдена следующим образом:

$$\sigma_n^2 = \min_{\varphi(\lambda)\in\widetilde{L}_n} \|\varphi(\lambda)\|^2 = \min_{\varphi(\lambda)\in\widetilde{L}_n} \Big\|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(\lambda)\Big\|^2 = \min_{\varphi(\lambda)\in\widetilde{L}_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2.$$

Воспользуемся неравенством Коши — Буняковского для произвольной функции $\varphi(\lambda) \in \widetilde{L}_n$.

$$1 = |\varphi(0)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k=0}^2 \sum_{k=0}^{n} |P_k(0)|^2.$$

Отсюда вытекает оценка снизу для дисперсии

$$\sigma_n^2 \geqslant \Big[\sum_{k=0}^{n} |P_k(0)|^2\Big]^{-1}. \tag{1}$$

Нетрудно показать, что в (1) выполняется только равенство и функция $\varphi_n^*(\lambda)$, соответствующая н. л. н. о. $m_n^*(\omega)$, имеет вид

$$\varphi_n^*(\lambda) = \Big[\sum_{k=0}^{n} |P_k(0)|^2\Big]^{-1} \sum_{k=0}^{n} P_k(0)\overline{P}_k(\lambda).$$

Отсюда в силу плотности последовательности $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ в отрезке $[0, T]$ вытекает

$$\sigma_T^2 = \Big[\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(0)|^2\Big]^{-1}. \tag{2}$$

Остается воспользоваться леммой 3.9 [4, гл. VIII].

Рассмотрим случай однозначного продолжения функции $B(\tau)$ с отрезка $[-T, T]$ на всю ось. Из теоремы 3.12 [4] вытекает, что в случае единственного продолжения $B(\tau)$ с отрезка $[-T, T]$ на всю ось пространство $L^2(X_t(\omega), t \in (-\infty, \infty))$, натянутое на множество значений случайного процесса $X_t(\omega)$ $(t \in (-\infty, \infty))$, совпадает со своим подпространством $L^2(X(\omega), t \in [0, T])$.

Пусть спектральная функция $F(\lambda)$ имеет скачок величиной $p > 0$ в нуле, тогда процесс $X_t(\omega)$ может быть представлен в виде $X_t(\omega) = z(\omega) + Y_t(\omega)$, где $z(\omega) \perp Y_t(\omega)$ и $\sigma_z^2 = p > 0$, и для любых n и $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, T]$ $\sigma_z^2 \geqslant p > 0$, т. е. оценка m_T^* регулярна.

Пусть спектральная функция $F(\lambda)$ непрерывна в нуле. Рассмотрим последовательность линейных несмещенных оценок $\left\{(1/N) \times \times \int_0^N X_t(\omega)\, dt\right\}_{N=1}^{\infty}$. Согласно «эргодической теореме в среднем» последовательность дисперсий этих оценок стремится к нулю и, следовательно, оценка $m_T^*(\omega)$ сингулярна. Теорема доказана.

Следствие 1. Если процесс $X_t(\omega)$ $(t \in (-\infty, \infty))$ имеет ковариационную функцию $B(\tau) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln f(\lambda)| (1 + \lambda^2)^{-1} d\lambda < \infty,$$

где $f(\lambda)$ — плотность абсолютно непрерывной составляющей функции $F(\lambda)$, то для любого $T > 0$ оценка $m_T^*(\omega)$ регулярна.

Это следствие основано на известном факте (см., например, [4, гл. VIII, п. 3.8]) неоднозначной продолжимости ковариационных функций $B(\tau)$ указанного вида с интервала $[-T, T]$ для любого $T > 0$.

Теорема 2. Пусть процесс $X_t(\omega)$ $(t \in [0, T])$ имеет ковариационную функцию $B(\tau)$, $2T$-периодически продолжаемую с отрезка $[-T, T]$ на всю ось с сохранением неотрицательной определенности. Тогда имеет место неравенство

$$\sigma_T^2 \geqslant (1/T) \int_0^T B(t)\, dt. \tag{3}$$

Доказательство. Если воспользоваться изометрией между $L^2(X_t(\omega), t \in (-\infty, \infty))$ и $L^2(dF)$, то нетрудно доказать, что в нашем случае существует периодическое продолжение с периодом $2T$ процесса $X_t(\omega)$ с отрезка $[0, T]$ на всю ось. Поэтому $m_{2T}^*(\omega) = (1/2T) \int_0^{2T} X_t(\omega)\, dt$. Эта н. л. н. о. имеет дисперсию $\sigma_{2T}^2 = (1/2T) \times \int_0^T B(t)\, dt$. Следовательно, $\sigma_T^2 \geqslant \sigma_{2T}^2$ и теорема доказана.

Следствие 2. Если ковариационная функция $B(\tau) - c$ для некоторого c может быть продолжена с интервала $[-T; T]$ нулем на всю ось с сохранением неотрицательной определенности, то имеет место неравенство (3).

Справедливость следствия 2 вытекает из теоремы Шеннона—Найквиста (см., например, [3, гл. XIX, § 5]), гарантирующей возможность $2T$-периодического продолжения ковариационной функции требуемого вида с отрезка $[-T, T]$ на всю числовую ось.

Следствие 3. Пусть ковариационная функция $B(\tau)$ такова, что для некоторого $n \geqslant 0$ ковариационная функция $(-1)^n B^{(2n)}(\tau)$ выпукла вниз и монотонна на интервале $(0, T)$, тогда имеет место неравенство (3).

Известно (см. [3, гл. XIX, § 5]), что ковариационная функция $(-1)^n B^{(2n)}(\tau)$ разлагается в ряд Фурье по системе функций $\{\cos k\pi/T\tau\}_{k=0}^{\infty}$ на интервале $[-T, T]$ с неотрицательными коэффициентами. Нетрудно проверить, что будут неотрицательными коэффициенты Фурье соответствующих разложений для функций $(-1)^k B^{(2k)}(\tau)$ $(k = 0, 1, 2, ..., n)$. Следовательно, функция $B(\tau)$ допускает $2T$-периодическое продолжение на всю числовую ось с сохранением неотрицательной определенности и применима теорема 2.

Следствие 3 позволяет сравнить интегральную оценку (3) с дифференциальными оценками.

$$\sigma_T^2 \geqslant (1 + T\,|B'(+0)|)^{-1}; \qquad (4)$$

$$\sigma_T^2 \geqslant (1 - B(T)[1 - B(T) + T\,|B'(+0)|]^{-1} + B(T), \qquad (5)$$

предложенными соответственно в работах [5, 6] для процессов с выпуклыми, неотрицательными и монотонными на отрезке $[0, T]$ ковариационными функциями $B(\tau)$. Очевидно, что оценка (3) имеет более широкую область применения, чем оценки (4), (5). Кроме того, для процессов, ковариационные функции которых имеют острый пик в нуле, интегральная оценка (3) лучше оценки (4), (5).

Оценка вида (3) может быть построена и в дискретном случае для наблюдений, отстоящих от соседних на одинаковых расстояниях. Точнее, рассмотрим наблюдения $\{X_{t_k}(\omega)\}_{k=0}^{n}$, где $t_k = (k/n)\,T$, и соответствующую им н. л. н. о. $m_n^*(\omega)$.

Теорема 3. Пусть набор чисел $1, B(T/n), ..., B(T)$, порождающий ковариационную матрицу наблюдений $\{X_{t_k}(\omega)\}_{k=0}^{n}$, допускает расширение до набора

$$1,\ B(T/n),\ ...,\ B(T),\ B((n - 1/n)T),\ ...,\ B(T/n), \qquad (6)$$

порождающего неотрицательно-определенную теплицеву матрицу, тогда

$$\sigma_n^2 \geqslant 1 + B(T)/2n + (1/n)\sum\nolimits_{k=1}^{n} B((k/n)\,T). \qquad (7)$$

Замечание. Теплицева матрица, порожденная набором (6), очевидно, является циркулянтом. Чтобы была справедлива теорема 3, достаточно проверить неотрицательную определенность полученного циркулянта. Это сделать довольно просто, если учесть, что характеристическими числами циркулянта являются числа $\Psi(\varepsilon^k)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, где $\varepsilon = e^{i\pi/n}$, а $\Psi(\lambda) = 1 + B(T/n)\lambda + \ldots + B(T)\lambda^n + B((n - 1/n)T)\lambda^{n+1} + \ldots + B(T/n)\lambda^{2n-1}$ (см. [7, ч. 1, п. 4. 9]). Итак, если числа $\Psi(\varepsilon^k)$, $k = 1. 2, \ldots, 2n$ неотрицательны, то имеет место оценка (7).

1. *Курицын Ю. Г.* О дисперсии наилучшей линейной несмещенной оценки математического ожидания случайного процесса.— Труды мат. фак. Воронежского ун-та, 1972, вып. 3. 2. *Гренандер У.*, *Сеге Г.* Теплицевы формы и их приложения. М., 1961. 3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., 1967; 4. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965. 5. *Гаек Я.* Линейная оценка средней стационарного случайного процесса с выпуклой корреляционной функцией.— Чех. мат. журнал, 1956, 6(81). 6. *Кук Ю. В.*, *Петунин Ю. И.* Наблюдаемые линейные оценки математического ожидания случайного процесса. — ДАН СССР, 1973, **209**, № 1. 7. *Маркус М.*, *Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., 1972.

Поступила в редколлегию 12.06.79

Yu. G. Kuritsin

ON A SINGULARITY OF THE BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATE OF THE MEAN VALUE OF STATIONARY PROCESS

The necessary and sufficient conditions for dispersion of the best linear unbiased estimate of the mean value of stationary process to be equal zero are formulated.

УДК 519.21

Н. Н. ЛЕОНЕНКО, Ю. С. МИШУРА, кандидаты физ.-мат. наук
Киевский университет

О ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАРТИНГАЛОВ

В этой статье рассматриваются утверждения типа принципа инвариантности для случайных полей, родственных случайным последовательностям, являющимся мартингал-разностями. Такие последовательности впервые были введены С. Н. Бернштейном [1, с. 331]. Центральная предельная теорема для эргодических мартингал-разностей разными способами была доказана П. Биллингсли [2], И. А. Ибрагимовым [3] и Б. Розеном [4]. Обобщение этих результатов до теорем о сходимости вероятностных мер содержится в работах многих авторов. Укажем лишь статьи [5, 6], имеющие непосредственное отношение к данной работе. Некоторые предельные теоремы для эргодических случайных полей, являющихся мартингал-разностями, получены в работах [7, 8].

1. Пусть R^r — r-мерное евклидово пространство, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r) \in R^r$, $q_i \in R^1$, $i = \overline{1, r}$; $R^r_+ = \{q \in R^r : q_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, r}\}$ — неот-