достаточно проверить неотрицательную определенность полученного циркулянта. Это сделать довольно просто, если учесть, что характеристическими числами циркулянта являются числа $\Psi(\varepsilon^k)$, $k = 1, 2, ..., 2n$, где $\varepsilon = e^{i\pi/n}$, а $\Psi(\lambda) = 1 + B(T/n)\lambda + ... + B(T)\lambda^n + B((n - 1/n)T)\lambda^{n+1} + \ldots + B(T/n)\lambda^{2n-1}$ (см. [7, ч. 1, п. 4. 9]). Итак, если числа $\Psi(\varepsilon^k)$, $k = 1. 2, ..., 2n$ неотрицательны, то имеет место оценка (7).

1. *Курицын Ю. Г.* О дисперсии наилучшей линейной несмещенной оценки математического ожидания случайного процесса.— Труды мат. фак. Воронежского ун-та, 1972, вып. 3. 2. *Гренандер У., Сеге Г.* Теплицевы формы и их приложения. М., 1961. 3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., 1967; 4. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965. 5. *Гаек Я.* Линейная оценка средней стационарного случайного процесса с выпуклой корреляционной функцией.— Чех. мат. журнал, 1956, 6(81). 6. *Кук Ю. В., Петунин Ю. И.* Наблюдаемые линейные оценки математического ожидания случайного процесса. — ДАН СССР, 1973, **209**, № 1. 7. *Маркус М., Минк X.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., 1972.

Поступила в редколлегию 12.06.79

Yu. G. Kuritsin

ON A SINGULARITY OF THE BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATE OF THE MEAN VALUE OF STATIONARY PROCESS

The necessary and sufficient conditions for dispersion of the best linear unbiased estimate of the mean value of stationary process to be equal zero are formulated.

УДК 519.21

Н. Н. ЛЕОНЕНКО, Ю. С. МИШУРА, кандидаты физ.-мат. наук
Киевский университет

О ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАРТИНГАЛОВ

В этой статье рассматриваются утверждения типа принципа инвариантности для случайных полей, родственных случайным последовательностям, являющимся мартингал-разностями. Такие последовательности впервые были введены С. Н. Бернштейном [1, с. 331]. Центральная предельная теорема для эргодических мартингал-разностей разными способами была доказана П. Биллингсли [2], И. А. Ибрагимовым [3] и Б. Розеном [4]. Обобщение этих результатов до теорем о сходимости вероятностных мер содержится в работах многих авторов. Укажем лишь статьи [5, 6], имеющие непосредственное отношение к данной работе. Некоторые предельные теоремы для эргодических случайных полей, являющихся мартингал-разностями, получены в работах [7, 8].

1. Пусть R^r — r-мерное евклидово пространство, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r) \in R^r$, $q_i \in R^1$, $i = \overline{1, r}$; $R^r_+ = \{q \in R^r : q_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, r}\}$ — неот-

рицательный октант пространства R^r; Z^r — целочисленная r-мерная **решетка**, $Z_+^r = R_+^r \cap Z^r$. Для точек $q, q' \in Z_+^r$ положим $q' \leqslant q$, если $q_i' \leqslant q_i$ для всех $i = \overline{1, r}$. Введем параллелепипеды $\pi(q) = \{q' \in Z_+^r : q' \leqslant q\}$. Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, P). Пусть для каждого $n > 0$ задан поток σ-алгебр $\{F_q^n, q \in \pi(k_n)\}$, где $k_n \in Z_+^r$, $F_q^n \subset F$ и $F_q^n = F_0^n$, если хотя бы одна координата точки q равна нулю. Введем σ-алгебры $G_q^n = \bigvee_{q \bar{\in} \pi(q')} F_{q'}^n$. Рассмотрим случайные поля $X_{q,\omega}^n : \pi(k_n) \times \Omega \to R^1$ (в дальнейшем индекс ω опускаем).

Совокупность случайных величин $\{X_q^n, q \in \pi(k_n)\}$, где X_q^n F_q^n-измерима, $X_q^n = 0$, если хотя бы одна координата точки q равна нулю и $M\{X_q^n / G_q^n\} = 0$, назовем мартингал-разностью. Пусть $S_k^n = \Sigma_{q \in \pi(k_n)} X_q^n$. Тогда тройка (S_k^n, F_k^n, k_n) образует сильный многопараметрический мартингал в смысле определения, данного, например, в работе [9].

Пусть $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ — любая перестановка индексов 1, 2, ..., r. Введем обозначения

$$A_1^q = \{q' \in \pi(k_n) : q'_{j_1} = q_{j_1}\},$$

$$B_k^q = \{q' \in \pi(k_n) : q'_{j_\nu} = q_{j_{\nu+1}},\ \nu = \overline{1, k-1},\ q'_{j_k} = q_{j_k}\}, \quad k = \overline{2, r};$$

$$H_{q,J}^n = \left(\bigvee_{A_1^q} F_{q'}\right) \vee \left(\bigvee_{k=\overline{2,r}} \left(\bigvee_{B_k^q} F_{q'}\right)\right).$$

Для любой перестановки J $H_{q,J}^n \subseteq G_{q+1}^n$. Кроме того, σ-алгебры $\{H_{q,J}^n, q \in \pi(k_n)\}$ при фиксированных n и J образуют поток, причем для любых $p \neq q$, $p, q \in \pi(k_n)$ выполняется одно из соотношений

$$H_{p,J}^n \subseteq H_{q,J}^n, \quad H_{q,J}^n \subseteq H_{p,J}^n. \tag{1}$$

Пусть совокупность случайных величин $\{X_q^n, q \in \pi(k_n)\}$ образует мартингал-разность, и выполняется условие

$$\text{(A)} \quad V_{k_n,n} = M(S_{k_n}^n)^2 \to 1, \quad n \to \infty.$$

Введем также обозначения $\sigma_{q,n,J} = M\{(X_q^n)^2 / H_{q-1,J}^n\}$, $v_{q,n,J} = M\sigma_{q,n,J}$. Тогда $V_{k_n,n} = \Sigma_{q \in \pi(k_n)} v_{q,n,J}$.

Лемма. Пусть выполнено условие (A). Тогда для любой фиксированной перестановки J следующие группы условий эквивалентны:

$$\text{(B)}: 1)\ \Sigma_{q \in \pi(k_n)} (X_q^n)^2 \xrightarrow{P} 1, \quad n \to \infty,$$

$$2)\ \Sigma_{q \in \pi(k_n)} (X_q^n)^2 I(|X_q^n| > \varepsilon) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty,\ \varepsilon \to 0;$$

$$(C): 1)\ \Sigma_{q\in\pi(k_n)}\sigma_{q,n,J} \xrightarrow{P} 1, \quad n\to\infty,$$

$$2)\ \Sigma_{q\in\pi(k_n)} M\{(X_q^n)^2 I(|X_q^n|>\varepsilon)/H_{q-1}^n\} \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty, \quad \varepsilon>0;$$

(D): 1) условие (B), 1),

$$2)\ \gamma_n = \sup_{q\in\pi(k_n)} (X_q^n)^2 \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty;$$

(E): 1) условие (B), 1),

$$2)\ \Sigma_{q\in\pi(k_n)} (X_q^n)^2 U(|X_q^n|\varepsilon^{-1}) \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty,\ \varepsilon>0;$$

(F): 1) условие (C), 1),

$$2)\ \Sigma_{q\in\pi(k_n)} M\{(X_q^n)^2 U(|X_q^n|\varepsilon^{-1})/H_{q-1,J}^n\} \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty, \quad \varepsilon>0,$$

где $U(x)$ — непрерывная функция ограниченной вариации на $[0,\infty)$, $U(x)\geqslant 0$, $U(x)\to C$ при $x\to\infty$, C — положительная константа.

Замечание 1. Условия (B), (D) и (E) не зависят от выбора перестановки J. Поэтому условия (C) и (F) эквивалентны между собой при различных J.

Пусть $K = \times_{i=1}^r [0,1]_i \subset R^r$ — r-мерный куб. Рассмотрим пространство $C(K)$ непрерывных функций $x_t: K\to R^1$ с равномерной топологией $\mathfrak{U}$. Свяжем со случайными полями, являющимися мартингал-разностями, случайные элементы в топологическом пространстве $(C(K),\mathfrak{U})$. Пусть $k_{n,i}$ — i-я координата точки k_n, $k_n(p_i) = (k_{n,1},\ldots,k_{n,i-1},p_i,k_{n,i+1},\ldots,k_{n,r})$, $i=\overline{1,r}$. Если $f(p): Z_+^r\to R^1$ — произвольная функция, то $\delta_j f(p) = f(p_1,\ldots,p_j+1,\ldots,p_r) - f(p_1,\ldots,p_j,\ldots,p_r)$ Для каждого $i=\overline{1,r}$ рассмотрим разбиение грани $[0,1]_i$ куба K на полусегменты $C_{p,i} = [V_{k_n(p_i),n}, V_{k_n(p_i+1,n)})$, $1\leqslant p_i\leqslant k_{n,i}$. Это разбиение индуцирует разбиение всего куба K на дизъюнктивные параллелепипеды $E_p = \times_{i=1}^r C_{p,i}$. Образуем случайные поля $X_n(t): K\times\Omega\to R^1$, реализации которых принадлежат $(C(K),\mathfrak{U})$, при $t\in E_p$ положив $X_n(t) = S_p^n + \Sigma_{l=1}^r \Sigma_{J_l\in N_l}\delta_{J_l}S_p^n \Pi_{m\in J_l}(t_m - V_{k_n(p_m),n})$, где N_l — множество всех выборок по l элементов из $\{1,2,\ldots,r\}$, $J_l=\{j_1,j_2,\ldots,j_l\}$, $\delta_{J_l}S_p^n = \Pi_{v=1}^l \delta_{j_l}$. Аналогичное построение при дополнительных предположениях относительно $V_{k,n}$ описано в работе [10].

Рассмотрим еще пространство $D(K)$ функций $y(t): K\to R^1$ без разрывов II рода с топологией Скорохода $\mathfrak{D}$. Образуем случайные поля $Y_n(t): K\times\Omega\to R^1$, реализации которых принадлежат пространству $(D(K),\mathfrak{D})$, положив $Y_n(t_p) = S_p^n$, если $t_p = (V_{k_n(p_i),n}, i=\overline{1,r})$, и $Y_n(t)$ равным произвольному числу, заключенному между величинами $Y_n(t_p)$ и $Y_n(t_{p+1})$, если $t\in E_p$. Через P_{X_n} и

P_{Y_n} обозначим меры, порожденные полями $X_n(t)$, $t\in K$ и $Y_n(t)$, $t\in K$ в пространствах $(C(K),\mathfrak{U})$ и $(D(K),\mathfrak{D})$ соответственно.

Пусть, далее, $w_\sigma(t,\omega): K\times\Omega\to R^1$ — винеровское случайно поле с параметрами $(0,\sigma^2)$, заданное на основном вероятностно пространстве (Ω,F,P), т. е. такое поле $w_\sigma(t)$, $t\in K$, для которог выполнены следующие аксиомы: 1) $w_\sigma(t)=0$, если $t_i=0$ хотя б для одного $i=\overline{1,r}$; 2) смешанные разности

$$\delta_\omega[s,t]=\Sigma_\nu(-1)^{r-|\nu|}w_\sigma(t_1-\nu_1(t_1-s_1),\ldots,t_r-\nu_r(t_r-s_r)) \qquad (2$$

распределены по гауссовскому закону с нулевым средним и дис- персией $\sigma^2\Pi_{i=1}^{r}|t_i-s_i|$ (запись $\Sigma_\nu\ldots$ в (2) означает, что сумми- рование распространяется на все возможные значения булевог вектора $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_r)$, $|\nu|=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r$); 3) смешанны разности вида (2), подсчитанные по непересекающимся параллелепи- педам из K — независимые случайные величины.

Обозначим символом W_σ меру в пространствах $(C(K),\mathfrak{U})$ ил $(D(K),\mathfrak{D})$, порожденную винеровским полем $w_\sigma(t)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A), любое из усло- вий (B), (C), (D), (E) или (F), а также условие

$$(G):\quad \lim_{n\to\infty,\; p_i\to\infty,\; i=\overline{1,r}} V_{p,n}\left(\Pi_{i=1}^{r}V_{k_n(p_i),n}\right)^{-1}=1.$$

Тогда имеет место слабая сходимость вероятностных ме $P_{X_n}\Rightarrow W_1$ в $(C(K),\mathfrak{U})$ и $P_{Y_n}\Rightarrow W_1$ в $(D(K),\mathfrak{D})$ при $n\to\infty$.

II. Пусть Δ — некоторое конечное множество в Z_+^r. При $q\in\Delta$ наблюдается случайное поле $\xi_q=a\theta_q+X_q$, где a — неизвестны коэффициент регрессии, который необходимо оценить на основани результатов наблюдения $\{\xi_q,\ q\in\Delta\}$, а известная функция $\theta_q: Z_+^r\to R^1$ и действительное случайное поле $X_q: Z_+^r\times\Omega\to R^1$, заданно на вероятностном пространстве (Ω,F,P) с $MX_q=0$, подчинен ограничениям, указанным ниже.

Пусть $Q_\Delta=\Sigma_{q\in\Delta}\theta_q^2$, $S_\Delta=\Sigma_{q\in\Delta}\theta_q\xi_q$. Тогда оценка наименьши квадратов $\hat{a}_\Delta$ параметра a имеет вид [11]: $\hat{a}_\Delta=S_\Delta/\theta_\Delta$. Обозначи $Q_{\pi(k)}=Q_k$, $S_{\pi(k)}=S_k$, $\hat{a}_{\pi(k)}=\hat{a}_k$.

Далее предполагаем, что поле X_q образует мартингал-разност относительно некоторого потока σ-алгебр $\{F_q,\ q\in\pi(k)\}$, т. е. X F_q-измеримо, $X_q=0$, если $q_i=0$ хотя бы для одного $i=\overline{1,r}$ $M\{X_q/G_q\}=0$, где G_q вводится так же, как в п. 1, $MX_q^2<\infty$.

Свяжем с оценками $\hat{a}_k$ случайные элементы в топологически пространствах $(C(K),\mathfrak{U})$ и $(D(K),\mathfrak{D})$. Пусть $T=(T_1,T_2,\ldots,T_r)$ $\in Z_+^r$. $\Delta=\pi(T)$, $k\in\Delta$, $S_T(k)=Q_kQ_T^{-1/2}(\hat{a}_k-a)=\Sigma_{q\in\pi(k)}\theta_qX_q\times$ $\times(\Sigma_{q\in\pi(T)}\theta_q^2)^{-1/2}$. Положим $X_T(t)=S_T(k)+\Sigma_{l=1}^{r}\Sigma_{J_l\in N_l}\delta_{J_l}S_T(k)\times$

$\times \Pi_{m\in J_l}(t_m - \tilde{t}_m^k)$, если $t_i \in [\tilde{t}_i^k, \tilde{t}_i^{k+1})$, $i = \overline{1, r}$, где $\tilde{t}_i^k = Q(T_1, \ldots$ $\ldots, T_{i-1}, k_i, \ldots, T_r) Q_T^{-1}$, $k_i = \overline{1, T_i}$. Тогда реализации случайного поля $X_T(t): K \times \Omega \to R^1$ будут принадлежать пространству $(C(K), \mathfrak{U})$. Образуем поле $Y_T(t): K \times \Omega \to R^1$, $Y_T(t) \in (D(K), \mathfrak{D})$, положив $Y_T(t) = S_T(k)$, если $t_k = (\tilde{t}_i^k, i = \overline{1, r})$, и $Y_T(t)$ равным произвольному числу, заключенному между величинами $Y_T(t_k)$ и $Y_T(t_{k+1})$, если $t_i \in [\tilde{t}_i^k, \tilde{t}_i^{k+1})$, $i = \overline{1, r}$.

Пусть P_{X_T} и P_{Y_T} — вероятностные меры, порожденные полями $X_T(t)$, $t \in K$ и $Y_T(t)$, $t \in K$, соответственно в пространствах $(C(K), \mathfrak{U})$ и $(D(K), \mathfrak{D})$, θ_q — действительная функция, такая, что $Q_T \to \infty$ при $\tilde{T} = \min(T_i, i = \overline{1, r}) \to \infty$, и существуют пределы

$$\lim_{\tilde{T}\to\infty} Q_T^{-1} \Sigma_{q \leqslant T} \theta_q^2 M X_q^2 = \sigma^2, \quad 0 < \sigma^2 < \infty; \tag{3}$$

$$\lim_{\tilde{T}\to\infty} Q_T^{-1} \Sigma_{q \leqslant T} \theta_q^2 M (X_q^2 I(|X_q| > \varepsilon Q_T^{1/2} \theta_q^{-1}) = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Замечание 2. Если предположить, что $\sup\limits_{q \leqslant T} \theta_q (Q_T)^{-1/2} \leqslant c T^{-r/2}$, c — положительная константа, и $\sup\limits_q M(X_q^2 I(|X_q| > \varepsilon T^{r/2}) \to 0$, то (3), (4) будут выполняться.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3), (4) и

$$\lim_{k\to\infty} Q_k^2 Q_T^{2(1-r)} (\Pi_{i=1}^r Q^2_{(T_1, \ldots, k_i, \ldots, T_r)})^{-1} = 1.$$

Тогда имеет место слабая сходимость вероятностных мер $P_{X_T} \Rightarrow W_\sigma$ в $(C(K), \mathfrak{U})$ и $P_{Y_T} \Rightarrow W_\sigma$ в $(D(K), \mathfrak{D})$ при $\tilde{T} \to \infty$, где параметр σ определяется условием (3).

III. В этом пункте $q = (q_1, q_2, \ldots, q_r) \in R^r$. Пусть $\tilde{K}_\Delta(\lambda)$ — образ измеримого замкнутого множества $\Delta \in R^r$ конечной лебеговой меры $\operatorname{mes}\{\Delta\}$ при преобразовании гомотетии с центром в некоторой точке $x_0 \bar{\in} R_+^r$ и коэффициентом $\lambda \neq 0$. Предполагаем, что Δ удовлетворяет условию: если $q' \in \tilde{K}_\Delta(\lambda_1)$, $q'' \in \tilde{K}_\Delta(\lambda_2) \setminus \tilde{K}_\Delta(\lambda_1)$, то $q'' \bar{\in} \pi(q')$. В точках $q \in K_\Delta(\lambda) = \tilde{K}_\Delta(\lambda) \cap R_+^r$ наблюдается случайное поле $\xi_q = a\theta_q + X_q$, где a — неизвестный коэффициент, подлежащий оценке, $\theta_q: R_+^r \to R^1$ — известная функция, $X_q: R_+^r \times \Omega \to R^1$ — F_q-измеримое случайное поле, $M X_q^2 < \infty$, $M\{X_q / F_\lambda\} = 0$ для всех $q \bar{\in} K_\Delta(\lambda)$ $(F_\lambda = \sigma\{X_q, q \in K_\Delta(\lambda)\})$.

Введем величины $Q_\Delta(\lambda) = \int\limits_{K_\Delta(\lambda)} \theta_q^2 dq$, $S_\Delta(\lambda) = \int\limits_{K_\Delta(\lambda)} \xi_q \theta_q dq$. Тогда оценка наименьших квадратов $\hat{a}_\Delta(\lambda) = S_\Delta(\lambda)/Q_\Delta(\lambda)$ при широки[х] предположениях будет несмещенной и состоятельной оценкой пара[-] метра a. Предположим, что $Q_\Delta(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$ и существую[т] пределы

$$\lim_{\lambda\to\infty} [Q_\Delta(\lambda)]^{-1} \int_{K_\Delta(\lambda)} \theta_q^2 M X_q^2 dq = \sigma_\Delta^2, \quad 0 < \sigma_\Delta^2 < \infty, \qquad (5)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} [Q_\Delta(\lambda)]^{-1} \int_{K_\Delta(\lambda)} \theta_q^2 M (X_q^2 I(|X_q| > \varepsilon (Q_\Delta(\lambda))^{1/2} |\theta_q|^{-1})) = 0 \qquad (6)$$

Замечание 3. Если предположить, что

$$\sup_{q\in K_\Delta(\lambda)} |\theta_q| (Q_\Delta(\lambda))^{-1/2} \leqslant c\lambda^{-r/2},$$

c — положительная константа, и

$$\sup_q M(X_q^2 I(|X_q| > \varepsilon\lambda^{r/2})) \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

то условия (5), (6) выполняются.

Через $C[0, 1]$ обозначим пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций с равномерной топологией $\mathfrak{U}$. При $t \in [0, 1]$ рассмотрим семейство случайных процессов $X_\lambda(t) = [\hat{a}_\Delta(Q_\Delta^{-1}(tQ_\Delta(\lambda))) - a]tQ_\Delta^{1/2}(\lambda)$, если обратное отображение $Q_\Delta^{-1}(\cdot)$ непрерывно. Пусть P_{X_λ} — вероятностные меры в $(C[0, 1], \mathfrak{U})$, индуцируемые процессами $X_\lambda(t)$, $t \in [0, 1]$, а W_{σ_Δ} — мера в $(C[0, 1], \mathfrak{U})$, индуцируемая процессом броуновского движения $w_\Delta(t)$, $t \in [0, 1]$ с $Mw_\Delta(t) = 0$ и $Mw_\Delta(t) \times \times w_\Delta(s) = \sigma_\Delta^2 \min\{t, s\}$, где σ_Δ^2 определяется условием (5).

Теорема 3. Пусть выполнены предположения (5), (6). Тогда имеет место слабая сходимость мер $P_{X_\lambda} \Rightarrow W_{\sigma_\Delta}$ в $(C[0, 1], \mathfrak{U})$ при $\lambda \to \infty$.

Замечание 4. Очевидно

$$X_\lambda(t) = (Q_\Delta(\lambda))^{-1/2} \int_{K_\Delta(Q_\Delta^{-1} tQ_\Delta(\lambda)))} \theta_q X_q dq.$$

Следовательно, теорему 3 можно сформулировать без статистической окраски в виде принципа инвариантности для взвешенного функцией θ_q случайного поля X_q, удовлетворяющего условиям (5), (6).

Замечание 5. Пусть $\theta_q = 1$ (задача априорной оценки неизвестного среднего a), $\tilde{K}_\Delta(\lambda) = v_0(\lambda) = \{x \in R^r : \|x\| \leqslant \lambda\}$ — шар радиуса λ с центром в начале координат. Тогда $Q_\Delta(\lambda) = k_r\lambda^r$, $k_r = = 2^{-r}\pi^{r/2}\Gamma^{-1}(r/2 + 1)$, $Q_\Delta^{-1}(u) = (u/k_r)^{1/r}$, $X_\lambda(t) = (\hat{a}_{v_0(1)}(t^{1/r}\lambda) - - a)t\lambda^{r/2}(k_r)^{1/2} = (k_r)^{-1/2}\lambda^{-r/2} \int_{v_0(t^{1/r}\lambda)\cap R_+^r} X_q dq$, $t \in [0, 1]$.

Таким образом, теорему 3 можно сформулировать в виде принципа инвариантности для оценки среднего относительно пересечения шаров с неотрицательным октантом пространства R^r.

IV. Доказательство леммы. Пусть выполняется условие (B). Импликации $(B) \Rightarrow (C)$, 2) и $(B) \Rightarrow (H)$, где

$$(H)\ M\Sigma_{q\in\pi(k_n)} (X_q^n)^4\, I(|X_q^n| < \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

доказываются так же, как в случае [6]. Далее, для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$P\{|\Sigma_{q\in\pi(k_n)} (X_q^n)^2 - \Sigma_{q\in\pi(k_n)} \sigma_{q,n,J}| > \delta\} \leqslant P\{\Sigma_{q\in\pi(k_n)} (X_q^n)^2 I(|X_q^n| > \varepsilon) >$$
$$> \delta/3\} + P\{\Sigma_{q\in\pi(k_n)} M((X_q^n)^2 I(|X_q^n| > \varepsilon)/H_{q-1,J}^n) > \delta/3\} +$$
$$+ \delta^{-2} M\{\Sigma_{q\in\pi(k_n)} ((X_q^n)^2 I(|X_q^n| < \varepsilon) - M((X_q^n)^2 I(|X_q^n| < \varepsilon)/H_{q-1,J}^n))\}^2. \tag{7}$$

В силу (1) для любых $p \neq q$, $p, q \in \pi(k_n)$

$$M((X_q^n)^2 I(|X_q^n| < \varepsilon) - M((X_q^n)^2 I(|X_q^n| < \varepsilon)/H_{q-1,J}^n))((X_p^n)^2 I(|X_p^n| < \varepsilon) -$$
$$- M((X_p^n)^2 I(|X_p^n| < \varepsilon)/H_{p-1,J}^n)) = 0.$$

Отсюда и из (H)

$$M\{\Sigma_{q\in\pi(k_n)} ((X_q^n)^2 I(|X_q^n| < \varepsilon) - M((X_q^n)^2 I(|X_q^n| < \varepsilon)/H_{q-1,J}^n))\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma_{q\in\pi(k_n)} M((X_q^n)^4 I(|X_q^n| < \varepsilon)) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) вытекает, что

$$\Sigma_{q\in\pi(k_n)} (X_q^n)^2 - \Sigma_{q\in\pi(k_n)} \sigma_{q,n,J} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty,$$

следовательно, $(B) \Rightarrow (C)$. Импликации $(C) \Rightarrow (D) \Rightarrow (A)$, а также эквивалентность условий (B) и (E), (C) и (F) доказываются так же, как соответствующие результаты для одномерного случая [6].

Доказательство теоремы 1 в основном повторяет схему [5]. Пусть, например, для фиксированной перестановки J выполняется условие (C). Выберем $c > 1$ и положим $\tilde{X}_q^n = X_q^n I(V_{k_n,n} < c)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap_{q\in\pi(k_n)} (\tilde{X}_q^n = X_q^n)) = 1$, случайные величины $\tilde{X}_q^n$ удовлетворяют условиям (A), (C) и (G). Поэтому достаточно проверить утверждение теоремы для случайных полей $\tilde{X}_n(t)$ и $\tilde{Y}_n(t)$, построенных по $\tilde{X}_q^n$ так же, как $X_n(t)$ и $Y_n(t)$ построены по X_q^n.

Пусть $0 < s_i^1 < \ldots < s_i^{k_i} < 1$, $i = \overline{1, r}$, $k = (k_i, i = \overline{1, r})$; t_p, $p \in \pi(k)$ — совокупность действительных чисел, не равных нулю,

$q_i(\alpha_i) = \max(l_i : V_{k_n(l_i),n}/V_{k_n,n} < \alpha_i)$, $q(\alpha) = (q_i(\alpha_i), \quad i = \overline{1, r})$. По-ложим $\rho_q = t_p$, если $q_i(s_i^{p_i}) \leqslant q_i < q_i(s_i^{p_i+1})$, $\check{X}_q^n = \rho_q \tilde{X}_q^n$, $T_k^n = \Sigma_{q\in\pi(k)}\check{X}_q^n$, $U_k^n = \Sigma_{q\in\pi(k)} M((\check{X}_q^n)^2/H_{q-1,J}^n)$. Следуя методу Крамера-Уолда, покажем, что

$$M\exp(iT_{k_n}^n) \to \exp(0{,}5\sigma^2), \tag{9}$$

$$\sigma^2 = \Sigma_{p\in\pi(k)} t_p^2 \prod_{i=1}^{r} (s_i^{p_i} - s_i^{p_i-1}).$$

Пусть $l \in Z_+^r$,

$$\check{S}_l^n = \Sigma_{q\in A_1^l} \check{X}_q^n + \Sigma_{i=2}^r \Sigma_{q\in B_i^l} \check{X}_q^n,$$

$$\check{U}_l^2 = \Sigma_{q\in A_1^l} M((\check{X}_q^n)^2/H_{q-1,J}^n) + \Sigma_{i=2}^r \Sigma_{q\in B_i^l} M((\check{X}_q^n)^2/H_{q-1,J}^n).$$

Точка l' выбирается следующим образом: если $l_{j_r} \neq 0$, то $l'_{j_r} = l_{j_r} - 1$, $l'_i = l_i$, $i \neq j_r$; если $l_{j_r} \neq 0$, $l_{j_{r-1}} \neq 0$, то $l'_{j_r} = k_{n,j_r}$, $l'_{j_{r-1}} = l_{j_{r-1}} - 1$, $l'_i = l_i$, $i \neq j_r$, $i \neq j_{r-1}$ и т. д. Положим

$$\begin{aligned}\check{Z}_l &= \exp\{i\check{S}_{l'}^n + 0{,}5\check{U}_{l'}^2\}(\exp\{i\check{X}_l^n\} - \exp\{-0{,}5\rho_l^2\sigma_{l,n,J}\}) = \\ &= \exp\{i\check{S}_{l'}^n + 0{,}5\check{U}_{l'}^2\}(i\check{X}_l^n - 0{,}5(\check{X}_q^n)^2(1 - L(\check{X}_l^n)) + \\ &\quad + 0{,}5\rho_l^2\sigma_{l,n,J} - \check{P}(0{,}5\rho_l^2\sigma_{l,n,J})),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\check{P}(x) = e^{-x} - 1 + x$, $L(x) = 2^{-2}\check{P}(ix)$.

Пусть также $\rho = \max|\rho_q|$, $N(x) = \min(x/3, 2)$. Тогда $|\check{P}(x)| \leqslant N(x)$. Заметим, что первый сомножитель в (10) измерим относительно σ-алгебры $H_{l-1,J}^n$, $M(\check{X}_l^n/H_{l-1,J}^n) = 0$. Поэтому, опуская некоторые выкладки, аналогичные приведенным в работе [5], получаем

$$M\{\check{Z}_l H_{l-1,J}^n\} \leqslant 0{,}5\rho^2 \exp\{0{,}5\rho^2 c\}\cdot\{M((\check{X}_l^n)^2 N(|\rho X_l^n|)/H_{l-1,J}^n\} + \\ + \rho^2\gamma_n\sigma_{l,n,J}/4\}.$$

Далее, в силу леммы 1

$$|M(\exp\{iT_{k_n}^n + 0{,}5U_{k_n}^n\} - 1)| = |M\Sigma_{l\in\pi(k_n)}\check{Z}_l| \leqslant$$

$$\leqslant 0{,}5\rho^2\exp\{0{,}5\rho^2 c\} M\Sigma_{l\in\pi(k_n)} M((\tilde{X}_q^n)^2\ N(\rho|\tilde{X}_q^n|)/H_{q-1,J}^n) +$$

$$+ 0{,}25\rho^2 M(\gamma_n \Sigma_{q\in\pi(k_n)}\sigma_{q,n,J})) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пусть $\delta_f[m', m]$ — смешанная разность r-го порядка значений функции $f(\cdot)$ между точками $m, m' \in Z_+^r$, $m' \in \pi(m)$. Из условия (G) и очевидного соотношения $\sup\limits_{q \in \pi(k_n)} M(\tilde{X}_q^n)^2 \to 0$, $n \to \infty$ вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{V\cdot,n}[m', m] = \Pi_{i=1}^r (s_i^{p_i} - s_i^{p_i-1}),$$

если $m = q(s_i^{p_i}, i = \overline{1, r})$, $m' = q(s_i^{p_i-1}, i = \overline{1, r})$.

Согласно (10) и условию (С), 1) $U_{k_n}^n \to \sigma^2$, $n \to \infty$, и, поскольку $U_{k_n}^n \leqslant \rho^2 c$, то

$$M\,|\exp\{0{,}5U_{k_n}^n\} - \exp\{0{,}5\sigma^2\}| \to 0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует (9). Нетрудно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sup_{t\in K} |\tilde{X}_n(t) - \tilde{Y}_n(t)| > \varepsilon\} = 0. \tag{12}$$

Из (9) и (12) вытекает слабая сходимость конечномерных распределений полей $\tilde{X}_n(t)$ и $\tilde{Y}_n(t)$ к соответствующим конечномерным распределениям поля $w_1(t)$.

Далее, пусть $t \in K$, $t'_{(i)} = (t_1, \ldots, t'_i, \ldots, t_r)$, $0 < c < 1$, $\delta > 0$. Тогда

$$p_{i,c,\delta}^n = P\{\sup_{\substack{|t_i - t'_i| < c \\ t, t'_{(i)} \in K}} |\tilde{Y}_n(t) - \tilde{Y}_n(t'_{(i)})| > \delta\} \leqslant \Sigma_{kc<1} P\{\sup_{\substack{kc \leqslant t_i < (k+1)c \\ t \in K}} |\tilde{Y}_n(t) -$$

$$- \tilde{Y}_n(t_1, \ldots, (kc)_i, \ldots, t_r)| > \delta/4\} \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma_{kc<1} P\{\max_{\substack{l_k^i \leqslant q_i < l_{k+1}^i \\ q \in \pi(k_n)}} |\Sigma_{\substack{l_k^i \leqslant p_i \leqslant q_i \\ 1 \leqslant p_j \leqslant q_j \\ j \neq i}} \tilde{X}_p^n| > \delta/8\},$$

где $l_k^i = \max(q_i : V_{k_n(q_i),n}/V_{k_n,n} < kc)$. Так как суммы S_q^n образуют сильный многопараметрический мартингал [9], то при любых фиксированных координатах $q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots q_r$ S_q^n является однопараметрическим мартингалом по i-й координате относительно потока σ-алгебр $\tilde{F}_{q_i}^n = \bigvee\limits_{\substack{q' \in \pi(k_n) \\ q'_i = q_i}} F_{q'}$, не зависящего от q_j, $j \neq i$. Поэтому случайный процесс $\tilde{S}_{q_i}^n = \max\limits_{q' \in \pi(k_n)} |S_{q'}^n|$ является субмартингалом относительно $F^n_{q_i}$. Последовательно применяя неравенство Дуба к координатам $q_r, q_{r-1}, \ldots, q_1$, устанавливаем в силу условия (A) существование константы $k_i > 1$ такой, что для всех $n > N_{k_i}$

$$M\{ \sup_{\substack{l^i_k \leqslant q_i \leqslant l^i_{k+1} \\ q \in \pi(k_n)}} | S^n_q - S^n_{q'} |\}^2 \leqslant 16^r M | S^n_{k_n(l^i_{k+1})} - S^n_{k_n(l^i_k)} |^2 \leqslant 16^r k_i,$$

$$q' = (q_1, \ldots, l^i_k, \ldots, q_r).$$

Теперь последовательно применим неравенство Броуна [5]:

$$P\{ \sup_{\substack{l^i_k \leqslant q_i \leqslant l^i_{k+1} \\ q \in \pi(k_n)}} | S^n_q - S^n_{q'} | > \delta/8\} \leqslant 16\delta^{-1} \int_{\Delta_n} B_{n,i} dP \leqslant$$

$$\leqslant 16\delta^{-1} M (| B_{n,i} | I (| B_{n,i} | > \delta/16)),$$

где

$$B_{n,i} = \sup_{\substack{l^i_k \leqslant q_i \leqslant l^i_{k+1} \\ q \in \pi(k_n)}} | S^n_{(q_1, \ldots, q_{r-1}, k_{n,r})} - S^n_{(q_1, \ldots, l^i_k, \ldots, q_{r-1}, k_{n,r})} |,$$

$$\Delta_n = \{B_{n,i} > \delta/16\}.$$

Далее,

$$16\delta^{-1} M (| B_{n,i} | I (| B_{n,i} | > \delta/16)) \leqslant 16\delta^{-1} (M B^2_{n,i} P (| B_{n,i} | > \delta/16))^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 4^{r+2} (k_i)^{1/2} \delta^{-1} (P (| B_{n,i} | > \delta/16))^{1/2} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant 4^{r^2+2} k_i \delta^{-r} (P (| S^n_{k_n(l^i_{k+1})} - S^n_{k_n(l^i_k)} | > 16^{-r}\delta)^{2^{-r}}.$$

Используя сходимость конечномерных распределений и (13), получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{|S^n_{k_n(l^i_{k+1})} - S^n_{kn(l^i_k)}| > 16^{-r}\delta\} \leqslant (2\pi)^{-1/2} \int_{|u| > 16^{-r} c^{-1/2} \delta} e^{-u^2/2} du,$$

следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} p^n_{i,c,\delta} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} K \left(\Sigma_{kc<1} \left(\int_{|u| > 16^{-r} c^{-1/2} \delta} e^{-u^2/2} du\right)^{2^{-r}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K' \left(c^{-2^r} \int_{|u| > 16^{-r} c^{-1/2} \delta} e^{-u^2/2} du\right)^{2^{-r}}.$$

Поскольку $c^{-2^r} \int_{|u| > 16^{-r} c^{-1/2} \delta} e^{-u^2/2} du \to 0$ при $c \to 0$, то $\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} p^n_{i,c,\delta} = 0$. Пусть $\Delta_{\mathfrak{U}}(x(\cdot), c) = \sup_{|t-t'|<c, t, t' \in K} | x(t) - x(t') |$ — модуль непрерывности топологии $\mathfrak{U}$. Тогда

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\Delta_{\mathfrak{U}} (\tilde{Y}_n(\cdot), c) > \delta\} \leqslant \Sigma^r_{i=1} \lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} p^n_{i,c,\delta/r} = 0,$$

т. е. последовательность случайных полей $\tilde{Y}_n(\cdot)$ компактна в топологии $\mathfrak{U}$, следовательно, и в $\mathfrak{D}$. Используя (12), легко получить аналогичное утверждение для $\tilde{X}_n(\cdot)$. Из сходимости конечномерных распределений и слабой компактности следует [12, 13] сходимость соответствующих вероятностных мер, чем и завершается доказательство.

Теорема 2 вытекает из теоремы 1, а теорема 3 доказывается так же, как в одномерном случае с использованием теоремы 19.4 [14] и соответствующих моментных неравенств для однопараметрических мартингалов $(S_\Delta(\lambda), F_\lambda, \lambda)$.

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений, т. 4. М., 1964. 2. *Billingsley P.* The Lindeberg-Levy theorem for martingals.— Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, 5. 3. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для одного класса зависимых величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1963, **8**, вып. 1. 4. *Rosen B.* On the central limit theorem for sums of dependent random variables.— Z. Wahr. und verw. Geb., 1967, **7**, N 2. 5. *Brown B. M.* Martingale central limit theorems.— Ann. Math. Statist., 1971, **42**, N 1. 6. *Scott D. J.* Central limit theorem for martingales and for processes with stationary increments.— Adv. Appl. Probab., 1973, **5**, 1. 7. *Леоненко Н. Н.* О центральной предельной теореме для одного класса случайных полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1977, вып. 17. 8. *Basu A. K., Dorea C. Y.* On functional central limit theorem for stationary martingale random fields.— Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1979, **33**, 3—4. 9. *Cairoli R., Walsh J.* Stochastic integrals in the plane.— Acta Math., 1975, **134**, 1—2. 10. *Городецкий В. В.* О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, **20**, вып. 3. 11. *Леоненко Н. Н.* Об оценках коэффициентов линейной регрессии однородного случайного поля.— Украинский математический журнал, 1978, **30**, № 6. 12. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, вып. 2. 13. *Bickel P. J., Wichura M. J.* Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications.— Ann. Math. Statist., 1971, **42**, N 5. 14. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редколлегию 28.04.80

N. N. Leonenko, Yu. S. Mishura

ON INVARIANCE PRINCIPLE FOR MULTIPARAMETER MARTINGALES

The invariance principle for multiparameter martingales is considered and applied to statistical estimation.

УДК 519.21

В. А. ЛИПСКАЯ, мл. науч. сотр.

Институт прикладной математики и механики АН УССР

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШАЮЩЕЕ ПРАВИЛО ДЛЯ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассматривается следующая проблема идентификации. Известно, что объект, характеризуемый вектором x значений своих параметров, выбран из смеси, содержащей объекты двух типов в количествах, пропорциональных числам π, $1-\pi$. Информация о распре-