т. е. последовательность случайных полей $\tilde{Y}_n(\cdot)$ компактна в топологии $\mathfrak{U}$, следовательно, и в $\mathfrak{D}$. Используя (12), легко получить аналогичное утверждение для $\tilde{X}_n(\cdot)$. Из сходимости конечномерных распределений и слабой компактности следует [12, 13] сходимость соответствующих вероятностных мер, чем и завершается доказательство.

Теорема 2 вытекает из теоремы 1, а теорема 3 доказывается так же, как в одномерном случае с использованием теоремы 19.4 [14] и соответствующих моментных неравенств для однопараметрических мартингалов $(S_\Delta(\lambda), F_\lambda, \lambda)$.

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений, т. 4. М., 1964. 2. *Billingsley P.* The Lindeberg-Levy theorem for martingals.— Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, 5. 3. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для одного класса зависимых величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1963, **8**, вып. 1. 4. *Rosen B.* On the central limit theorem for sums of dependent random variables.— Z. Wahr. und verw. Geb., 1967, **7**, N 2. 5. *Brown B. M.* Martingale central limit theorems.— Ann. Math. Statist., 1971, **42**, N 1. 6. *Scott D. J.* Central limit theorem for martingales and for processes with stationary increments.— Adv. Appl. Probab., 1973, **5**, 1. 7. *Леоненко Н. Н.* О центральной предельной теореме для одного класса случайных полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1977, вып. 17. 8. *Basu A. K., Dorea C. Y.* On functional central limit theorem for stationary martingale random fields.— Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1979, **33**, 3—4. 9. *Cairoli R., Walsh J.* Stochastic integrals in the plane.— Acta Math., 1975, **134**, 1—2. 10. *Городецкий В. В.* О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, **20**, вып. 3. 11. *Леоненко Н. Н.* Об оценках коэффициентов линейной регрессии однородного случайного поля.— Украинский математический журнал, 1978, **30**, № 6. 12. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, вып. 2. 13. *Bickel P. J., Wichura M. J.* Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications.— Ann. Math. Statist., 1971, **42**, N 5. 14. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редколлегию 28.04.80

N. N. Leonenko, Yu. S. Mishura

ON INVARIANCE PRINCIPLE FOR MULTIPARAMETER MARTINGALES

The invariance principle for multiparameter martingales is considered and applied to statistical estimation.

УДК 519.21

В. А. ЛИПСКАЯ, мл. науч. сотр.

Институт прикладной математики и механики АН УССР

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШАЮЩЕЕ ПРАВИЛО ДЛЯ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассматривается следующая проблема идентификации. Известно, что объект, характеризуемый вектором x значений своих параметров, выбран из смеси, содержащей объекты двух типов в количествах, пропорциональных числам π, $1-\pi$. Информация о распределениях вектора x, соответствующих объектам первого и второго типов, ограничивается указанием математических ожиданий μ, ν и ковариационных матриц A, B. Требуется по заданному значению x определить тип объекта, причем ошибочное определение приводит к потерям L_{12}, L_{21} соответственно для объектов первого и второго типа. Описанную проблему будем называть проблемой R.

Решающим правилом для проблемы R называют функцию $d = d(x)$, однозначно отображающую пространство X значений вектора x во множество $\{1, 2\}$. При этом предполагается, что тип объекта определяется как значение функции $d(x)$.

Пусть Π_1, Π_2 — семейства всевозможных распределений с математическими ожиданиями μ, ν и ковариационными матрицами A, B:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \left\{P_1 \,\middle|\, \int x dP_1(x) = \mu; \quad \int (x-\mu)(x-\mu)' dP_1(x) = A\right\}, \\ \Pi_2 &= \left\{P_2 \,\middle|\, \int x dP_2(x) = \nu; \quad \int (x-\nu)(x-\nu)' dP_2(x) = B\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если обозначить $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ распределения вектора x, соответствующие объектам первого и второго типов, то $\tilde{P}_1 \in \Pi_1$, $\tilde{P}_2 \in \Pi_2$. При этом математическое ожидание потерь, связанных с использованием решающего правила d, равно

$$r_{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2}(d) = \pi L_{12} \tilde{P}_1(X_2) + (1-\pi) L_{21} \tilde{P}_2(X_1) =$$

$$= \pi_1 \tilde{P}_1(X_2) + \pi_2 \tilde{P}_2(X_1) \leqslant \sup_{P_1 \in \Pi_1,\ P_2 \in \Pi_2} [\pi_1 P_1(X_2) + \pi_2 P_2(X_1)],$$

где $\pi_1 = \pi L_{12}$; $\pi_2 = (1-\pi) L_{21}$;

$$X_1 = \{x \mid d(x) = 1\}; \quad X_2 = \{x \mid d(x) = 2\}. \tag{2}$$

Определение 1. Уровнем риска, соответствующим решающему правилу d для проблемы R, назовем величину

$$r_R(d) = \sup_{P_1 \in \Pi_1;\ P_2 \in \Pi_2} [\pi_1 P_1(X_2) + \pi_2 P_2(X_1)]. \tag{3}$$

Определение 2. Во множестве решающих правил D правило $d^* \in D$ называется оптимальным для проблемы R, если

$$r_R(d^*) = \min_{d \in D} r_R(d). \tag{4}$$

Если D — множество всевозможных однозначных отображений X в $\{1, 2\}$, то условие (4) определяет оптимальное решающее правило для проблемы R.

Ниже будет показано, что в зависимости от выполнения определенных соотношений между параметрами μ, ν, A, B, $\frac{\pi_1}{\pi_2}$ проблемы R оптимальным является либо линейное решающее правило опред ленной структуры, либо тривиальное правило вида $d^i(x) \equiv i$, где i равно 1 или 2. Доказательство будет опираться на утверждения, содержащиеся в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Пусть одномерной случайной величине ξ соответствует вероятностная мера P, удовлетворяющая условиям

$$\int x dP(x) = \mu, \quad \int (x-\mu)^2 dP(x) = \sigma^2 > 0. \tag{5}$$

Тогда справедливы неравенства (для любого $a > 0$)

$$P\{\xi - \mu \geqslant a\sigma\} \leqslant \frac{1}{1+a^2}; \tag{6}$$

$$P\{\xi - \mu \leqslant -a\sigma\} \leqslant \frac{1}{1+a^2}. \tag{7}$$

Равенства в неравенствах (6) и (7) достигаются соответственно при выполнении условий

$$P\{\xi - \mu = a\sigma\} = \frac{1}{1+a^2}, \quad P\left\{\xi - \mu = -\frac{\sigma}{a}\right\} = 1 - \frac{1}{1+a^2} \tag{6'}$$

и

$$P\{\xi - \mu = -a\sigma\} = \frac{1}{1+a^2}, \quad P\left\{\xi - \mu = \frac{\sigma}{a}\right\} = 1 - \frac{1}{1+a^2}. \tag{7'}$$

Доказательство проведем для неравенства (6) при условии $\mu = 0$. В этом случае

$$\int x dP(x) = 0, \quad \int x^2 dP(x) = \sigma^2.$$

Обозначим $p = \int\limits_{a\sigma}^{\infty} dP(x)$. Заметим, что $p \neq 1$, так как в противном случае $\int x dP(x) \geqslant a\sigma > 0$. Будем полагать $p > 0$, поскольку при $p = 0$ неравенство (6) очевидно, и рассмотрим меры P_1 и P_2, определенные следующим образом:

$$dP_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} dP(x) & \text{при } x < a\sigma, \\ 0 & \text{при } x \geqslant a\sigma; \end{cases}$$

$$dP_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a\sigma, \\ \frac{1}{p} dP(x) & \text{при } x \geqslant a\sigma; \end{cases}$$

$$\int dP_1(x) = 1, \quad \int dP_2(x) = 1.$$

Тогда

$$dP(x) = (1-p) dP_1(x) + p dP_2(x),$$

$$0 = \int x dP(x) = (1-p) \int x dP_1(x) + p \int x dP_2(x),$$

$$\int x dP_2(x) = \frac{1}{p}\int\limits_{a\sigma}^{\infty} x dP(x) \geqslant \frac{a\sigma}{p}\int\limits_{a\sigma}^{\infty} dP(x) = a\sigma,$$

$$\int x dP_1(x) = -\frac{p}{1-p}\int x dP_2(x) \leqslant -\frac{p}{1-p} a\sigma, \quad (8)$$

$$\int x^2 dP_1(x) = \frac{1}{1-p}\int\limits_{-\infty}^{a\sigma} x^2 dP(x) = \frac{1}{1-p}\left[\sigma^2 - \int\limits_{a\sigma}^{\infty} x^2 dP(x)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-p}\left[\sigma^2 - a^2\sigma^2 \int\limits_{a\sigma}^{\infty} dP(x)\right] = \frac{1-pa^2}{1-p}\sigma^2;$$

$$0 \leqslant \int \left(x + \frac{p}{1-p} a\sigma\right)^2 dP_1(x) = \int x^2 dP_1(x) +$$

$$+ \frac{2p}{1-p} a\sigma \int x dP_1(x) + \frac{p^2}{(1-p)^2} a^2\sigma^2 \leqslant \frac{1-p-pa^2}{(1-p)^2}\sigma^2, \quad (9)$$

откуда $p \leqslant \frac{1}{1+a^2}$, что и требовалось доказать. Заметим, что все приведенные для доказательства неравенства, кроме (9), обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $P\{a\sigma\} = p$. В таком случае равенства (8) и (9) показывают, что

$$P_1\left\{-\frac{p}{1-p} a\sigma\right\} = 1.$$

Учитывая, что при этом $p = \frac{1}{1+a^2}$, обнаруживаем, что $P_1\left\{-\frac{\sigma}{a}\right\} = 1$, откуда следует $P\left\{-\frac{\sigma}{a}\right\} = 1 - p$.

Таким образом, показана эквивалентность равенства в неравенстве (6) выполнению условий (6′).

Теорема 2. Пусть n-мерной случайной величине ξ соответствует вероятностная мера P, удовлетворяющая условиям

$$\int x dP(x) = \mu, \quad \int (x-\mu)(x-\mu)' dP(x) = A; \quad (10)$$

гиперплоскость Π определяется уравнением $l(x) = l_0 + l'x = 0$, причем $l(\mu) \neq 0$.

Тогда вероятность того, что случайная точка ξ отделена от точки μ плоскостью Π, не превосходит величины

$$\left[1 + \frac{l^2(\mu)}{l'Al}\right]^{-1}. \quad (11)$$

Существует вероятностная мера $\overline{P}$, удовлетворяющая условиям (10), при которой указанная вероятность совпадает с величиной (11).

Доказательство. Пусть, для определенности, $l(\mu) < 0$. Тогда нужно показать, что справедливо неравенство

$$P\{l(x) \geqslant 0\} \leqslant \left[1 + \frac{l^2(\mu)}{l'Al}\right]^{-1}. \tag{12}$$

Рассмотрим одномерную величину $\gamma = l(\xi) = l_0 + l'\xi$. Имеем $E\gamma = l(\mu)$, $D\gamma = E[\gamma - l(\mu)]^2 = l'Al$. Используя неравенство (6), получаем при $l'Al > 0$

$$P\{l(x) \geqslant 0\} = P\{\gamma > 0\} \leqslant \left[1 + \frac{l^2(\mu)}{l'Al}\right]^{-1};$$

если же $l'Al = 0$, то $P\{l(x) \geqslant 0\} = 0$, и имеет место равенство в неравенстве (12). Остается доказать последнее утверждение теоремы 2 для случая, когда A — невырожденная матрица. Заметим, что в этом случае

$$\frac{l^2(\mu)}{l'Al} = (y-\mu)'A^{-1}(y-\mu), \tag{13}$$

где через y обозначена точка касания плоскости $l(x) = 0$ с некоторым эллипсоидом вида $(x-\mu)'A^{-1}(x-\mu) = \text{const}$. Обозначим величину $(y-\mu)'A^{-1}(y-\mu)$ через λ^2 и рассмотрим вероятностную меру $\overline{P}$, имеющую вид

$$\overline{P} = \frac{1}{1+\lambda^2} P_1 + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} P_2, \tag{14}$$

где P_1 и P_2 — вероятностные меры, причем $P_1\{y\} = 1$, а P_2 удовлетворяет условиям

$$\int x\,dP_2(x) = \mu - \frac{1}{\lambda^2}(y-\mu),$$

$$\int \left[x - \mu + \frac{1}{\lambda^2}(y-\mu)\right]\left[x - \mu + \frac{1}{\lambda^2}(y-\mu)\right]' dP_2(x) = \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\left[A - \frac{1}{\lambda^2}(y-\mu)(y-\mu)'\right].$$

Тогда

$$\int (x-\mu)(x-\mu)'\,dP_2(x) = \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)A - \frac{1}{\lambda^2}(y-\mu)(y-\mu)'.$$

Поэтому

$$\int x\,d\overline{P}(x) = \frac{1}{1+\lambda^2}\,y + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\left[\mu - \frac{1}{\lambda}(y-\mu)\right] = \mu,$$

$$\int (x-\mu)(x-\mu)'\,d\overline{P}(x) = \frac{1}{1+\lambda^2}(y-\mu)(y-\mu)' + \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\left[\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)A - \frac{1}{\lambda^2}(y-\mu)(y-\mu)'\right] = A.$$

При этом

$$\overline{P}\{y\} = \frac{1}{1+\lambda^2} = \frac{1}{1+(y-\mu)' A^{-1}(y-\mu)}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть гиперплоскость П определяется уравнением $l(x) = l_0 + l'x = 0$, причем $l(\mu) < 0$, $l(\nu) > 0$; y и z — точки касания плоскости П с эллипсоидами вида $(x-\mu)' A^{-1}(x-\mu) = \mathrm{const}$ и $(x-\nu)' B^{-1}(x-\nu) = \mathrm{const}$. Тогда решающему правилу

$$d_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(x) \leqslant 0, \\ 2, & \text{если } l(x) > 0 \end{cases}$$

для проблемы R соответствует уровень риска

$$r_R(d_l) = \frac{\pi_1}{1+(y-\mu)' A^{-1}(y-\mu)} + \frac{\pi_2}{1+(z-\nu)' B^{-1}(z-\nu)}. \quad (15)$$

(Используя теорему 2 вместе с равенством (13), замечаем, что правая часть (15) является верхней границей $r_R(d_l)$. Чтобы показать, что это — точная верхняя граница, строим так же, как в теореме 2, такое распределение $\overline{P}_2$, для которого

$$\overline{P}_2\{l(x) \leqslant 0\} = \frac{1}{1+(z-\nu)' B^{-1}(z-\nu)},$$

а затем для произвольного $\varepsilon > 0$ строим такое распределение P_1^ε, для которого

$$P_1^\varepsilon\{l(x) > 0\} \geqslant \frac{1}{1+(y^\varepsilon-\mu)' A^{-1}(y^\varepsilon-\mu)},$$

где

$$y^\varepsilon = \mu + \sqrt{1+\delta}\,(y-\mu), \quad \delta = \frac{[1+(y-\mu')A^{-1}(y-\mu)]^2}{\pi_1 (y-\mu)' A^{-1}(y-\mu)}\,\varepsilon.$$

Тогда

$$r_{P_1^\varepsilon, \overline{P}_2}(d) > \frac{\pi_1}{1+(y-\mu)' A^{-1}(y-\mu)} + \frac{\pi_2}{1+(z+\nu)' B^{-1}(z-\nu)} - \varepsilon \Big).$$

Лемма. Пусть в проблеме R матрицы A и B — невырожденные; во множестве решающих правил вида

$$d_{\tilde{l}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{l}(x) \leqslant 0, \\ 2, & \text{если } \tilde{l}(x) > 0, \end{cases} \quad (16)$$

где $\tilde{l}(x) = \tilde{l}_0 + \tilde{l}'x$, причем $\tilde{l}(\mu) < 0$, $\tilde{l}(\nu) > 0$, оптимальным является правило $d_l = d_l(x)$. Тогда плоскость $l(x) = l_0 + l'x = 0$ является общей касательной плоскостью в точке внешнего касания некоторой пары эллипсоидов вида $(x-\mu)' A^{-1}(x-\mu) = t_1^2$ и $(x-\nu)' B^{-1}(x-\nu) = t_2^2$.

Доказательство. Обозначая через P_1 распределение вероятностей, соответствующее объектам первого типа, и через P_2 — распределение, соответствующее объектам второго типа, с помощью теоремы 2 и равенства (13) получаем

$$P_1\{l(x)\geqslant 0\}\leqslant\frac{1}{1+(y-\mu)'A^{-1}(y-\mu)}=\frac{1}{1+t_1^2},$$

$$P_2\{l(x)\leqslant 0\}\leqslant\frac{1}{1+(z-\nu)'B^{-1}(z-\nu)}=\frac{1}{1+t_2^2},$$

где y обозначает точку касания плоскости $l(x)=0$ с эллипсоидом $(x-\mu)'A^{-1}(x-\mu)=t_1^2$, а z — точку касания этой же плоскости с эллипсоидом $(x-\nu)'B^{-1}(x-\nu)=t_2^2$. Указанные эллипсоиды расположены по разные стороны от плоскости $l(x)=0$. Поэтому справедлива импликация

$$(x-\mu)'A^{-1}(x-\mu)=t_1^2\to(x-\nu)'B^{-1}(x-\nu)\geqslant t_2^2. \qquad (17)$$

Допустим, что утверждение леммы неверно, т. е. $y\neq z$. Рассмотрим плоскость $\bar{l}(x)=0$, являющуюся общей касательной плоскостью в точке внешнего касания эллипсоидов $(x-\mu)'A^{-1}(x-\mu)=t_1^2$ и $(x-\nu)'B^{-1}(x-\nu)=t^2$. Обозначая точку касания эллипсоидов через $\bar{y}$ и учитывая (17), находим

$$r_R(d_{\bar{l}})=\frac{\pi_1}{1+(\bar{y}-\mu)'A^{-1}(\bar{y}-\mu)}+\frac{\pi_2}{1+(\bar{y}-\nu)'B^{-1}(\bar{y}-\nu)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi_1}{1+t_1^2}+\frac{\pi_2}{1+t_2^2}=\frac{\pi_1}{1+(y-\mu)'A^{-1}(y-\mu)}+$$

$$+\frac{\pi_2}{1+(z-\nu)'B^{-1}(z-\nu)}\neq r_R(d_l), \qquad (18)$$

что противоречит предположению леммы об оптимальности правила d_l.

В силу доказанной леммы оптимальное линейное решающее правило d_l определяется такой гиперплоскостью $l(x)=0$, которая проходит через некоторую точку y в направлении, ортогональном векторам $A^{-1}(y-\mu)$ и $B^{-1}(y-\nu)$, поэтому существует такой скаляр $\gamma>0$, что справедливо равенство $B^{-1}(y-\nu)=-\gamma A^{-1}(y-\mu)$. Отсюда $y=(\gamma A^{-1}+B^{-1})^{-1}(\gamma A^{-1}\mu+B^{-1}\nu)$, $A^{-1}(y-\mu)=(A+\gamma B)^{-1}(\nu-\mu)$.

Таким образом, в качестве уравнения гиперплоскости $l(x)=l_0+l'x=0$ может быть взято уравнение с $l=(A+\gamma B)^{-1}(\nu-\mu)$ и $l_0=-l'(\mu+Al)$. При этом неизвестное γ определяется из условия минимизации функции

$$\varphi(\gamma)=\frac{\pi_1}{1+(\nu-\mu)'(A+\gamma B)^{-1}A(A+\gamma B)^{-1}(\nu-\mu)}+$$

$$+\frac{\pi_2}{1+\gamma^2(\nu-\mu)'(A+\gamma B)^{-1}B(A+\gamma B)^{-1}(\nu-\mu)}. \qquad (19)$$

Для отыскания требуемого γ заметим, что если S — ортогональная матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы $A^{-1}B$, и $T=A^{-\frac{1}{2}}S$, то справедливы равенства $T'AT=I$, $T'BT=R$, где I — единичная матрица, а R — диагональная, причем ее диагональные элементы являются собственными числами матрицы $A^{-1}B$. Тогда

$$(A+\gamma B)^{-1}A(A+\gamma B)^{-1}=T(I+\gamma R)^{-2}T',$$

$$(A+\gamma B)^{-1}B(A+\gamma B)^{-1}=T(I+\gamma R)^{-1}R(I+\gamma R)^{-1}T'.$$

Если

$$m=T'(\nu-\mu), \qquad (20)$$

то $\varphi(\gamma)$ можно представить в виде

$$\varphi(\gamma)=\frac{\pi_1}{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}}+\frac{\pi_2}{1+\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}}. \qquad (21)$$

Обозначим

$$f_1(\gamma)=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}; \qquad f_2(\gamma)=\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}.$$

Тогда $\frac{df_2}{d\gamma}=-\gamma\frac{df_1}{d\gamma}$ и условие $\varphi'_\gamma=0$ эквивалентно условию

$$\frac{\pi_1}{[1+f_1(\gamma)]^2}=\frac{\gamma\pi_2}{[1+f_2(\gamma)]^2}$$

или

$$1+\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}=\sqrt{\frac{\pi_2}{\pi_1}}\gamma\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}\right]. \qquad (22)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Во множестве решающих правил вида (16) для проблемы R в случае, когда матрицы A и B невырождены, оптимальным является правило

$$d_l(x)=\begin{cases}1, & \text{если } l'x-l'(\mu+Al)\leqslant 0,\\ 2, & \text{если } l'x-l'(\mu+Al)>0,\end{cases} \qquad (23)$$

где вектор

$$l=(A+\gamma B)^{-1}(\nu-\mu), \qquad (24)$$

а скаляр γ есть корень уравнения (22), в котором $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — собственные числа матрицы $A^{-1}B$; числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — компоненты вектора $T'(\nu-\mu)$, причем $T = A^{-\frac{1}{2}}S$ (S — ортогональная матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы $A^{-1}B$). Уровень риска, соответствующий решающему правилу d_l, определяется выражением (21).

Теорема 4. Уровень риска $r_R(d_l)$, соответствующий решающему правилу (23), удовлетворяет условию

$$r_R(d_l) < \min(\pi_1, \pi_2) \tag{25}$$

в том и только том случае, когда имеют место соотношения

$$[(\nu-\mu)' A^{-1}(\nu-\mu)][(\nu-\mu)' B^{-1}(\nu-\mu)] > 1; \tag{26}$$

$$\frac{1+[(\nu-\mu)' A^{-1}(\nu-\mu)]^{-1}}{1+(\nu-\mu)' B^{-1}(\nu-\mu)} < \frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{1+(\nu-\mu)' A^{-1}(\nu-\mu)}{1+[(\nu-\mu)' B^{-1}(\nu-\mu)]^{-1}}. \tag{27}$$

Сначала покажем, что условие (25) эквивалентно условию

$$\frac{\pi_1}{1+(\nu-\mu)' A^{-1}(\nu-\mu)} + \frac{\pi_2}{1+(\nu-\mu)' B^{-1}(\nu-\mu)} < \min(\pi_1, \pi_2). \tag{28}$$

По теореме 3 это означает, что при $\pi_1 \leqslant \pi_2$ условие

$$\left[1+\sum_{k=1}^{n} m_k^2\right]^{-1} + \frac{\pi_2}{\pi_1}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{\rho_k}\right]^{-1} < 1 \tag{28'}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы существовало некоторое $\gamma > 0$, при котором справедливо неравенство

$$\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}\right]^{-1} + \frac{\pi_2}{\pi_1}\left[1+\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}\right]^{-1} < 1. \tag{29}$$

Тот факт, что неравенство (29) влечет выполнение (28′), очевиден. Для доказательства требуемой достаточности покажем, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ ($\varepsilon > 0$) можно указать $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, при котором имеет место неравенство

$$\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}\right]^{-1} + \frac{\pi_2}{\pi_1}\left[1+\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}\right]^{-1} <$$

$$< \left[1+\sum_{k=1}^{n} m_k^2\right]^{-1} + \frac{\pi_2}{\pi_1}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{\rho_k}\right]^{-1} + \varepsilon.$$

В случае $\pi_1 > \pi_2$ вместо неравенств (28′) и (29) рассматриваются неравенства

$$\frac{\pi_1}{\pi_2}\left[1+\sum_{k=1}^{n} m_k^2\right]^{-1} + \left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{\rho_k}\right]^{-1} < 1 \tag{28''}$$

и

$$\frac{\pi_1}{\pi_2}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}\right]^{-1}+\left[1+\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k m_k^2}{(1+\gamma\rho_k)^2}\right]^{-1}<1. \quad (29'$$

После того, как доказана эквивалентность условия (25) услови (28′) или (28″), замечаем, что в обоих случаях необходимо услови

$$[1+\Sigma m_k^2]^{-1}+\left[1+\Sigma\frac{m_k^2}{\rho_k}\right]^{-1}<1$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{n} m_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{\rho_k}\right)>1, \quad (26'$$

причем (26′) есть запись условия (26) в обозначениях теоремы 3. Далее, поскольку (25) эквивалентно либо условию

$$\frac{1+\Sigma m_k^2}{1+\Sigma\dfrac{m_k^2}{\rho_k}}\cdot\frac{1}{\Sigma m_k^2}<\frac{\pi_1}{\pi_2}\leqslant 1,$$

либо условию

$$1<\frac{\pi_1}{\pi_2}<\frac{1+\Sigma m_k^2}{1+\Sigma\dfrac{m_k^2}{\rho_k}}\sum\frac{m_k^2}{\rho_k},$$

то, объединяя эти условия, приходим к (27).

Теорема 5. Если выполняются условия (26) и (27), то оптимальным решающим правилом для проблемы R является правил d_l, указанное в теореме 3. В противном случае оптимальным явля ется правило $d^i(x)\equiv i$, где i определено из условия $\pi^i = \max(\pi_1, \pi_2)$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $\pi_1<\pi_2$. Покажем сначала, что в этом случае решающему правилу $d^2(x)\equiv 2$ соответствует уровень риска π_1. Действительно, для любо пары распределений P_1, P_2

$$P_1(X_2)=P_1(\{x\mid d^2(x)=2\})=1, \quad P_2(X_1)=P_2(\{x\mid d^2(x)=1\})=0.$$

Отсюда

$$r_R(d^2)=\sup_{P_1\in\Pi_1,\ P_2\in\Pi_2}[\pi_1P_1(X_2)+\pi_2P_2(X_1)]=\pi_1.$$

Рассмотрим теперь произвольное решающее правило

$$d(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in R_1,\\ 2, & \text{если } x\in R_2.\end{cases}$$

Положим

$$t_1^2=\inf_{x\in R_1}(x-\nu)'B^{-1}(x-\nu)=(z-\nu)'B^{-1}(z-\nu);$$

$$t_2^2 = \inf_{x \in R_2} (x-\mu)' A^{-1} (x-\mu) = (u-\mu)' A^{-1} (u-\mu).$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

I. $t_1^2 \geqslant (\mu - \nu)' B^{-1} (\mu - \nu)$. Если

$$t_1^2 \leqslant \frac{\pi_2}{\pi_1} - 1, \tag{30}$$

то, полагая $P_2(R_1) = P_2(z) = \frac{1}{1+t_1^2}$, находим при любом P_1

$$r_R(d) \geqslant r_{P_1,P_2}(d) \geqslant \frac{\pi_2}{1+t_1^2} > \pi_1 = r_R(d^2).$$

Если же имеет место отрицание неравенства (30), то, полагая

$$t^2 = \left[1 - \frac{\pi_2}{\pi_1(1+t_1^2)}\right]^{-1} - 1 > 0,$$

можно выбрать такую точку $\tau \in R_2$, что $(\tau-\mu)' A^{-1} (\tau-\mu) = t^2$. Тогда существует такое распределение $P_1 \in \Pi_1$, для которого

$$P_1(R_2) \geqslant P_1(\tau) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Выбирая такое распределение $P_2 \in \Pi_2$, для которого

$$P_2(R_1) \geqslant P_2(z) = \frac{1}{1+t_1^2},$$

получаем

$$r_R(d) \geqslant r_{P_1,P_2}(d) \geqslant \frac{\pi_1}{1+t^2} + \frac{\pi_2}{1+t_1^2} = \pi_1 = r_R(d^2).$$

II. $t_2^2 \geqslant (\mu-\nu)' A^{-1} (\mu-\nu)$. В этом случае, по аналогии с предыдущим, доказывается, что $r_R(d) \geqslant \pi_2 > \pi_1 = r_R(d^2)$.

III. $t_1^2 < (\mu-\nu)' B^{-1} (\mu-\nu)$, $t_2^2 < (\mu-\nu)' A^{-1} (\mu-\nu)$. В этом случае можно построить такие распределения $P_1 \in \Pi_1$ и $P_2 \in \Pi_2$, для которых

$$P_1(R_2) \geqslant P_1(\{u\}) = \frac{1}{1+t_2^2}, \quad P_2(R_1) \geqslant P_2(\{z\}) = \frac{1}{1+t_1^2}.$$

Тогда

$$r_R(d) \geqslant r_{P_1,P_2}(d) \geqslant \frac{\pi_1}{1+t_2^2} + \frac{\pi_2}{1+t_1^2} = r_R(d_l).$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем

$$r_R(d) \geqslant \max\{r_R(d_l), r_R(d^2)\}.$$

Теорема доказана.

Отметим частный случай рассмотренной нами проблемы, когда матрицы A и B, указанные в теореме 3, отличаются только скалярным множителем: $B = \beta A$. В этом случае вектор l в (24) имее вид $l = \frac{1}{1+\beta\gamma} A^{-1} (\nu - \mu)$. Направление l совпадает с направлени ем, которое дается известной [1] дискриминантной функцией Фи шера, а также с предлагаемым С. Уилксом [2] направлением про ектирования для решения задачи дискриминантного анализа.

1. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М., 1968
2. *Уилкс С.* Математическая статистика. М., 1967.

Поступила в редколлегию 21.06.79

V. A. Lipskaya

THE OPTIMAL DECISION RULE FOR AN IDENTIFICATION PROBLEM

The following identification problem is considered. An observable variable x comes from one of two populations with distribution P_1 and P_2 according to prior probabilities π and $1 - \pi$ respectively. P_1 and P_2 are not explicitly known but only their mean vectors μ, ν and covariance matrices A, B are specified. The problem is to discriminate whether an observation x in from P_1 or P_2. The error of first or second kind involves the loss L_{12} or L_{21}. For this problem the nonrandomized identification rule which minimizes supremum of the risk function is determined.

УДК 519.21

И. К. МАЦАК, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА КОМПАКТЕ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В $C(S)$

1. Пусть H — действительное бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_n\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в H, Y_n, $n \geqslant 1$ — последовательность случайных величин, удовлетворяющих условиям $MY_n = 0$,

$$MY_nY_m = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Определим процесс $L(x)$ на H следующим образом: $L(x) = \sum_1^\infty x_n Y_n$ для $x = \sum_1^\infty x_n l_n$. Тогда $ML(x) = 0$, $ML(x)L(y) = (x, y)$.

Пусть $K \subset H$ — компакт, $N(K, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — наименьшее целое число n, при котором существуют множества $A_1, \ldots, A_n$ такие, что $K \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$, для любых j, $x, y \in A_j$, $\|x - y\| \leqslant 2\varepsilon$.

Наша цель — найти достаточные условия ограниченности и непрерывности процесса $L(x)$ на множестве K, выраженные в терминах величины $N(K, \varepsilon)$. Как следствие получаем центральную предельную теорему в $C(S)$, S — компактное метрическое простран-