лярным множителем: $B = \beta A$. В этом случае вектор l в (24) имее вид $l = \frac{1}{1+\beta\gamma} A^{-1}(\nu - \mu)$. Направление l совпадает с направлени ем, которое дается известной [1] дискриминантной функцией Фи шера, а также с предлагаемым С. Уилксом [2] направлением про ектирования для решения задачи дискриминантного анализа.

1. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М., 1968.
2. *Уилкс С.* Математическая статистика. М., 1967.

Поступила в редколлегию 21.06.79

V. A. Lipskaya

THE OPTIMAL DECISION RULE FOR AN IDENTIFICATION PROBLEM

The following identification problem is considered. An observable variable x comes from one of two populations with distribution P_1 and P_2 according to prior probabilities π and $1-\pi$ respectively. P_1 and P_2 are not explicitly known but only their mean vectors μ, ν and covariance matrices A, B are specified. The problem is to discriminate whether an observation x in from P_1 or P_2. The error of first or second kind involves the loss L_{12} or L_{21}. For this problem the nonrandomized identification rule which minimizes supremum of the risk function is determined.

УДК 519.21

И. К. МАЦАК, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА КОМПАКТЕ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В $C(S)$

1. Пусть H — действительное бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_n\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в H, Y_n, $n \geqslant 1$ — последовательность случайных величин, удовлетворяющих условиям $MY_n = 0$,

$$MY_nY_m = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Определим процесс $L(x)$ на H следующим образом: $L(x) = \sum_1^\infty x_n Y_n$ для $x = \sum_1^\infty x_n l_n$. Тогда $ML(x) = 0$, $ML(x)L(y) = (x, y)$.

Пусть $K \subset H$ — компакт, $N(K, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — наименьшее целое число n, при котором существуют множества $A_1, \ldots, A_n$ такие, что $K \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$, для любых j, $x, y \in A_j$, $\|x - y\| \leqslant 2\varepsilon$.

Наша цель — найти достаточные условия ограниченности и непрерывности процесса $L(x)$ на множестве K, выраженные в терминах величины $N(K, \varepsilon)$. Как следствие получаем центральную предельную теорему в $C(S)$, S — компактное метрическое пространство. Близкие вопросы изучались ранее в работах [1—5]. Из результатов [2] следует, что приведенные ниже условия не могут быть ослаблены, если на процесс $L(x)$ не накладывать дополнительных ограничений.

Случай гауссовского процесса $L(x)$ к настоящему времени хорошо изучен [1, 6, 7].

2. Все рассматриваемые случайные процессы предполагаем сепарабельными.

Теорема 1. Условие

$$\int\limits_0^1 [N(K, \varepsilon)]^{1/2}\, d\varepsilon < \infty \tag{1}$$

достаточно для ограниченности процесса $L(x)$ на K и

$$M \sup_{x \in K} |L(x)| \leqslant 4 \sum_{n=2}^{\infty} [N(K, 2^{-n})]^{1/2} \cdot 2^{-n} + [N(K, 2^{-1})]^{1/2} \sup_{x \in K} \|x\|. \tag{2}$$

Пусть

$$B(x, \delta) = \{y \in K : \|x - y\| < \delta\},$$

$$I_n = \{(x, y) : \|x - y\| < d_n,\ x, y \in K\}.$$

Теорема 2. Если выполнено условие (1), то процесс $L(x)$ выборочно непрерывен на K с вероятностью 1, для любого $x \in K$

$$M \sup_{y \in B(x, \delta)} |L(x) - L(y)| \leqslant 9 \sum_{n=n_0}^{\infty} [N(K, 2^{-n})]^{1/2} \cdot 2^{-n}. \tag{3}$$

Существует последовательность $d_n \to 0$ такая, что

$$M \sup_{(x, y) \in I_n} |L(x) - L(y)| \leqslant 16 \sum_{i=n+1}^{\infty} [N(K, 2^{-i})]^{1/2} \cdot 2^{-i}, \tag{4}$$

$$n_0 = [\log_2 (\delta^{-1})].$$

Величины d_n будут построены при доказательстве теоремы 2.

Пусть $X_k(t)$, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых случайных элементов в $C(S)$, одинаково распределенных с $X(t)$, $S_n(t) = \sum\limits_1^n X_k(t)$, $t \in S$. Будем говорить, что в $C(S)$ выполнена предельная теорема, если мера, индуцированная величиной $S_n(t)/\sqrt{n}$, сходится к гауссовской мере.

Теорема 3. Пусть S — компактное метрическое пространство, $X(t)$ — случайный процесс на S с непрерывной корреляционной функцией $r(t, s)$, $K = \{X(t), t \in S\}$, скалярное произведение на K определяется корреляционной функцией. Тогда условие (1) достаточно для выполнения центральной предельной теоремы в $C(S)$.

Замечание. Если

$$M|L(x)-L(y)|^p \leqslant A\|x-y\|^p, \quad p>2,$$

то вместо условия (1) достаточно требовать, чтобы

$$\int_0^1 [N(K,\varepsilon)]^{1/p}\, d\varepsilon < \infty.$$

Если выполнено (1), то, учитывая результаты работы [1], получаем неравенство $M \sup\limits_{x\in K} |L(x)|^2 < \infty$.

3. Доказательство теоремы 1. Для каждого n выберем множество $A_n \subset K$ такое, что для любого $x \in K$ существует $y \in A_n$: $\|x-y\| \leqslant 2^{-n+1}$, $A_n = \{x_j^n,\ j=\overline{1, N(K, 2^{-n})}\}$. Тогда $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — плотное множество в K. Пусть $z \in K$, $x \in A$. Положим $j(z,m) = \min(j: \|x_j^m - z\| \leqslant 2^{-m+1})$, $f_m(z) = x^m_{j(z,m)}$. Существуют n, j такие, что $x = x_j^n \bar{\in} A_k$, $k<n$. Пусть

$$A_k(x) = x_j^n, \quad k \geqslant n,$$

$$A_{n-1}(x) = f_{n-1}(A_n(x)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{n-k}(x) = f_{n-k}(A_{n-k+1}(x)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1(x) = f_1(A_2(x)).$$

Ясно, что $\|A_{n-k}(x) - A_n(x)\| \leqslant 2^{-n+k+2}$, так как $\|A_{m+1}(x) - A_m(x)\| \leqslant 2^{-m+1}$.

Таким образом, для любого $x \in A$ построена последовательность $A_n(x)$ такая, что $A_{n-1}(x)$ однозначно определяется по $A_n(x)$ и

$$\|A_n(x) - x\| \leqslant 2^{-n+2},$$
$$\|A_{n+1}(x) - A_n(x)\| \leqslant 2^{-n+1}. \qquad (5$$

Для любого $x \in A$ справедливо неравенство

$$|L(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |L(A_{n+1}(x)) - L(A_n(x))| + |L(A_1(x))|.$$

Учитывая сепарабельность и непрерывность в среднем квадратическом процесса $L(x)$, получаем

$$M \sup_{x\in K} |L(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M \sup_{x\in K} |L(A_{n+1}(x)) - L(A_n(x))| +$$

$$+M\sup_{x\in A}|L(A_1(x))|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{N(K,2^{-1})}M|L(x_j^1)|^2\right]^{1/2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{N(K,2^{-n-1})}M|L(x_j^{n+1})-L(f_n(x_j^{n+1}))|^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}[N(K,\ 2^{-n-1})]^{1/2}\cdot 2^{-n}+[N(K,2^{-1})]^{1/2}\sup_{x\in K}\|x\|,$$

т. е. неравенство (2) доказано.

4. Доказательство теоремы 2. Докажем сначала неравенство (3). Пусть $x\in K$, $2^{-n-1}<\delta\leqslant 2^{-n}$, $x_i^n\in A_n$, $\|x_i^n-x\|\leqslant\leqslant 2^{-n+1}$, $y\in B_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, $\|x-y\|<\delta$. Используя неравенство (5), получаем $\|x_i^n-A_n(y)\|\leqslant\|x_i^n-x\|+\|x-y\|+\|y-A_n(y)\|\leqslant\leqslant 2^{-n+1}+\delta+2^{-n+2}\leqslant 7\cdot 2^{-n}$.

Справедливость следующих неравенств ясна:

$$|L(x)-L(y)|\leqslant|L(x)-L(x_i^n)|+|L(x_i^n)-L(A_ny))|+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}|L(A_{k+1}(y))-L(A_k(y))|,$$

$$M|L(x)-L(x_i^n)|\leqslant 2^{-n+1},$$

$$M\sup_{y\in B(x,\delta)\cap B_n}|L(x_i^n)-L(A_n(y))|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{j=1}^{N(K,2^{-n})}M|L(x_i^n)-L(x_l^n)|^2\right]^{1/2}\leqslant 7[N(K,2^{-n})]^{1/2}\cdot 2^{-n},$$

$$M\sup_{y\in B_n}\sum_{k=n}^{\infty}|L(A_{k+1}(y))-L(A_k(y))|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{N(K,2^{-k-1})}M|L(x_j^{k+1})-\right.$$

$$\left.-L(f_k(x_j^{k+1}))|^2\right]^{1/2}\leqslant 4\sum_{k=n+1}^{\infty}[N(K,2^{-k})]^{1/2}\cdot 2^{-k}. \tag{6}$$

Так как B_n плотно в K, то

$$M\sup_{y\in B(x,\delta)}|L(x)-L(y)|=M\sup_{y\in B(x,\delta)\cap B_n}|L(x)-L(y)|\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=n+1}^{\infty}[N(K,2^{-k})]^{1/2}\cdot 2^{-k}+7[N(K,2^{-n})]^{1/2}\cdot 2^{-n}+2^{-n+1}.$$

Отсюда следует неравенство (3).

Перейдем к доказательству неравенства (4), из которого буде[т] следовать выборочная непрерывность процесса $L(x)$. Пусть n фи[к]сировано. Для любого j, $1 \leqslant j \leqslant N(K, 2^{-n})$ положим

$$B_j^n = \{x \in B_n : A_n(x) = x_j^n\},$$

$$d(i, j, n) = \inf(\|x - y\| : x \in B_i^n,\ y \in B_j^n),$$

$$d_n = \min(d(i, j, n) : d(i, j, n) \neq 0,\ i, j = \overline{1, N(K, 2^{-n})}).$$

Очевидно, что $B_n = \bigcup\limits_{j=1}^{N(K,2^{-n})} B_j^n$. Множества B_n и функции $A_n(x)$ были определены выше. Пусть $x, y \in K \cap B_n$, $\|x - y\| < d_n$. Если $x \in B_j^n$, $y \in B_i^n$, то

$$x = \sum_{k=n}^{\infty} [A_{k+1}(x) - A_k(x)] + x_j^n,$$

$$y = \sum_{k=n}^{\infty} [A_{k+1}(y) - A_k(y)] + x_i^n,$$

$$d(i, j, n) = 0. \tag{7}$$

Следовательно, существуют $z_j^m \in B_j^n$, $z_i^m \in B_i^n$ такие, что $\lim\limits_{m \to \infty} \|z_j^m - z_i^m\| = 0$. Поскольку K компакт, то существует $z \in K$ и последовательности $\{z_i^{j_m}\} \subset \{z_j^m\}$, $\{z_i^{i_m}\} \subset \{z_i^m\}$ такие, что $z_i^{i_m} \to z$, $z_j^{j_m} \to z$, $m \to \infty$. Справедливость неравенства

$$|L(x) - L(y)| \leqslant \sup_{x_1, x_2 \in B_j^n} |L(x_1) - L(x_2)| + |L(z_j^{j_m}) - L(z)| + \sup_{x_1, x_2 \in B_i^n} |L(x_1) - L(x_2)| + |L(z_i^{i_m}) - L(z)|$$

вытекает из (7). В силу неравенства (3) процесс $L(x)$ непрерывен с вероятностью 1 в каждой фиксированной точке z. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\sup_{(x,y) \in I_n} |L(x) - L(y)| \leqslant 2 \sup_{1 \leqslant j \leqslant N(K, 2^{-n})} \sup_{x_1, x_2 \in B_j^n} |L(x_1) - L(x_2)|.$$

Если $x_1 \in B_j^n$, $x_2 \in B_j^n$, то $A_n(x_1) = A_n(x_2)$. Следовательно,

$$M \sup_{(x,y) \in I_n} |L(x) - L(y)| \leqslant 4M \sup_{x \in K} \sum_{k=n}^{\infty} |L(A_{k+1}(x)) - L(A_k(x))| \leqslant 16 \sum_{k=n+1}^{\infty} [N(K, 2^{-k})]^{1/2} \cdot 2^{-k}.$$

Нами было использовано неравенство (6).

5. Доказательство теоремы 3. Так как $S_n(t)/\sqrt{n}$ имеет корреляционную функцию $r(t, s)$, то в силу неравенства (4)

$$M \sup_{d(t,s)<d_n} |S_m(t) - S_m(s)|/\sqrt{m} \leqslant 16 \sum_{k=n+1}^{\infty} [N(K, 2^{-k})]^{1/2} \cdot 2^{-k},$$

где $d(t, s)$ — метрика на S, порожденная корреляционной функцией $r(t, s)$. Поэтому для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует δ такое, что

$$\sup_{m\geqslant 1} P\{\sup_{d(t,s)<\delta} |S_m(t) - S_m(s)|/\sqrt{m} > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2.$$

Отсюда следует [8] справедливость центральной предельной теоремы в $C(S)$.

1. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.— Труды математического института АН СССР, 1976, т. 141. 2. *Мацак И. К.* Регулярность выборочных функций случайного процесса.— **УМЖ**, 1978, **30**, № 2. 3. *Boulicaut B.* Fonctions de Young et continuité de trajectoires d'une fonctions aléatoire.— Ann. Inst. Fourier, 1974, **24**, 2. 4. *Nanopoulos C., Nobelis P.* Étude de la régularité et des proprietés limites de fonctions aléatories de finies sur [0, 1]^n de type puissance. — C. r. Acad. Sci., 1977, **A285**, 4. 5. *Delporte L.* Fonctions aléatoires presque surement continues sur un intervalle fermé.— Ann. Inst. H. Poincaré. Sec. B, 1964, **1**, N 2. 6. *Dudley R. M.* Sample functions of the Gaussian process.— Ann. Probab., 1973, **1**, 1. 7. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes.—In: Lectures Notes in Math., vol. 480. Berlin, 1975. 8. *Jain N. C., Marcus M. B.* Central limit theorems for $C(S)$-valued random variables.— J. Functional Analysis, 1975, **19**, N 3.

Поступила в редколлегию 23.10.79

I. K. Matsak

CONTINUITY OF RANDOM PROCESS ON THE COMPACT AND CENTRAL LIMIT THEOREM IN $C(S)$

Let $L(x)$ — linear random process on Hilbert space H, $ML(x) = 0$, $ML(x)L(y) = (x, y)$, $K < H$ — compact, $N(K, \varepsilon)$ — minimum number of spheres of the radius ε, covering K. Condition $\int_0^1 [N(K, \varepsilon)]^{1/2} d\varepsilon < \infty$ provides the sample continuity with probability one of process $L(x)$ on K and central limit theorem in $C(S)$, $K = \{X(t), t \in S\}$.

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ИГР И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье рассматривается игра двух лиц, в которой первый игрок задает стационарный случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве X,