$\times (t)\|^2 = 1$. Player II estimates $\int\limits_0^1 \langle a(t), \xi(t) \rangle dt$ where $a(t)$ — fixed weak-continuous function with values in X, $\int\limits_0^1 \| a(t) \|^2 dt < \infty$, using the values of $\xi(t)$ when $t \leqslant 0$. Payoff is equal to value of the estimation error.

УДК 519.21

Е. И. ОСТРОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук
Обнинский филиал МИФИ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДВУМЕРНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Пусть B — сепарабельное банахово пространство и P — вероятностная предмера его цилиндрических подмножеств [1, с. 381]. Задача нахождения условий продолжимости P в меру на пространстве B стала уже классической. Для гильбертова пространства она решена полностью [1, с. 406], а в общем случае даже для гауссовских мер речь может идти только о достаточных условиях. Для пространства $C[0, 1]^r$ имеются результаты [2—4] и др. Цель нашей работы состоит в нахождении достаточных условий, налагаемых на двумерные распределения P, при выполнении которых P продолжается в вероятностную меру, сосредоточенную на B. Сразу же оговоримся, что наши методы рассчитаны на пространства типа $C(T)$, где T — хаусдорфов компакт; случай пространств, не содержащих l_n, изложен в работе [5].

Назовем пространство U рефлексивно вложенным в B, если пространства U и U^{**} — замкнутые подпространства B. Примерами рефлексивных вложений могут служить конечномерные и гильбертовы вложения; вложение пространства H_α-функций, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка $\alpha > 0$, в $C[0, 1]^r$.

Обозначим через T единичный шар пространства U^*, $\rho(t, s)$ — некоторую непрерывную в топологии $\tau(U, U^*)$ псевдометрику на T, $N(\rho, \varepsilon)$ — мощность наименьшей ε-сети T относительно метрики $\rho(t, s)$. Величина $H = \log_2 N(\xi, \varepsilon)$ обычно называется энтропией T.

Для определенной при $x > 0$ функции $f(x)$ преобразованием Юнга — Фенхеля называется функция $f^*(x) = \sup\limits_{x>0} (xy - f(x))$. Копреобразованием Юнга—Фенхеля назовем функцию $f_*(y) = \inf\limits_{x>0} (xy + f(x)) = f^*(-y)$. Свойства преобразований Юнга—Фенхеля изложены в работе [6, с. 183—197].

Теорема 1. Пусть T — хаусдорфов компакт, $\xi(t)$ — сепарабельное случайное поле, $t \in T$. Если существует непрерывная псевдометрика $\rho(t, s)$ на T такая, что для некоторого $C > 0$ сходится ряд

$$\sum_n N^2(\rho, 2^{-n}) h_*(2^{-n}CN^{-2}(\rho, 2^{-n})), \tag{1}$$

где

$$h(x) = \sup_{t\neq s} P\{|\xi(t) - \xi(s)| / \rho(t, s) > x\}, \tag{2}$$

то почти все реализации $\xi(t)$ непрерывны.

Доказательство основано на идеях работ [2, 3, 7], По определению нижней грани и копреобразования Юнга—Фенхеля существует последовательность x_n, $x_n > 0$, такая, что $(x_n \cdot 2^{-n} N^{-2}(\rho, 2^{-n}) + h(x_n) \leqslant h_*((2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n})) + 2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n})$. Из условия теоремы следует сходимость ряда

$$\sum_n (x_n C \cdot 2^{-n} + N^2(\rho, 2^{-n})) h(x_n)$$

и в силу неотрицательности слагаемых, сходимости рядов

$$\sum_n 2^{-n} x_n, \quad \sum_n N^2(\rho, 2^{-n}) h(x_n).$$

Положим $b_n = 2^{-n+2}$, тогда сходится ряд из величин b_n и ряд

$$\sum_n N^2(\rho, 2^{-n}) h(b_n 2^{n+2}) < \infty.$$

По теореме 1 [7] $\xi(t)$ непрерывно с вероятностью 1.

Замечание 1. Рассмотрим семейство случайных полей $\xi_\alpha(t)$, $t \in T$. Если

$$h(x) = \sup_\alpha \sup_{t\neq s} P\{|\xi(t) - \xi(s)| / \rho(t, s) > x\},$$

то сходимость ряда $\sum_n N^2(\rho, 2^{-n}) h_*(C \cdot 2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n}))$ есть достаточное условие для слабой компактности семейства мер, порожденных полями $\xi_\alpha(t)$ в пространстве $C(T)$.

Замечание 2. Предположим, что поле $\xi(t)$ является предгауссовским, т. е. $\forall t, s \exists \lambda_0 > 0$, $\forall 0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ $M\mathrm{ch}\lambda(\xi(t) - \xi(s)) / \rho(t, s) \leqslant \mathrm{ch}\psi(\lambda)$. Тогда функция $h(x)$ оценивается по формуле $h(x) \leqslant 2\exp(-\psi^*(x))$.

В самом деле, положим $\eta = |\xi(t) - \xi(s)| / \rho(t, s)$. Согласно неравенству Чебышева, при λ, $x > 0$

$$P(\eta > x) \leqslant \mathrm{ch}\,\psi(\lambda) / \mathrm{ch}\,\lambda x \leqslant \exp(-\lambda x) \cdot 2\exp(\psi(\lambda)).$$

Выбирая λ минимизирующим правую часть, приходим к доказательству нашего утверждения.

Используя универсальность пространства $C(T)$, выведем условие принадлежности величины $\xi = \xi(\omega)$ пространству B. Пусть

$P(\xi \in B^0) = 1$, где B^0 есть некоторое линейное расширение B. Существование B° для любой цилиндрической меры доказано, например, в работе [1, с. 385—386].

Теорема 2. Если для некоторого рефлексивного вложения U, $U < B$ существует слабо непрерывная метрика $\rho(t, s)$ на единичном шаре T пространства U^*, удовлетворяющая условию: $\exists C > 0$,

$$\Sigma N^2(\rho, 2^{-n}) h_*(2^{-n} N^{-2}(\rho, 2^{-n})) < \infty,$$

$$h(x) = \sup_{t \neq s} P\{|\xi(t) - \xi(s)| / \rho(t, s) > x\},$$

то $P(\xi \in B) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим поле $\xi(t) = (\xi, t)$, определенное при $t \in T$. Из теоремы 1 вытекает непрерывность $\xi(t)$ на T в слабой топологии. Поэтому $\xi \in U^{**}$ с вероятностью 1, и в силу определения рефлексивного вложения $P(\xi \in B) = 1$.

Замечание 3. Пусть ξ — предгауссовская величина [2, с. 40];

$$\sup_{t \neq s} M \operatorname{ch}\{\lambda[(\xi, t) - (\xi, s)] / \rho(t, s)\} \leqslant \exp \psi(\lambda).$$

Тогда, как показано в замечании 1, $h(x)$ оценивается сверху: $h(x) \leqslant 2 \exp(-\psi^*(x))$, и, таким образом, в терминах функции $\psi(\lambda)$ можно вывести критерий принадлежности ξ пространству B. Рассмотрим, в частности, гауссовский случай. Пусть $M\xi = 0$, $R(t, s) = \operatorname{cov}((\xi, s), (\xi, t))$, $t, s \in U^{**}$. Положим $\rho^2(t, s) = (R(t - s), (t - s))$. Тогда

$$\exp \psi(\lambda) = M \operatorname{ch}\{\lambda/[(\xi, t) - (\xi, s)] / \rho(t, s)\} = \exp(\lambda^2 / 2);$$

$$\psi^*(x) = x^2 / 2;\ h_*(x) = \inf_{y > 0}(xy + 2 \exp[-y^2 / 2]) \leqslant 3x \ln(x^{-1}).$$

(Достаточно положить $y = (2 \ln x^{-1})^{1/2}$). Пользуясь теоремой 2, приходим к следующему результату [8]: центрированный гауссовский вектор со структурной функцией $\rho^2(t, s) = D(\xi, t - s)$ индуцирует меру в пространстве B, если для некоторого рефлексивного вложения $U \subset B$ сходится ряд $\sum_n 2^{-n} H^{1/2}(\rho, 2^{-n})$.

Лемма 1. Пусть B_0 — линейное расширение B и ξ_α — семейство B_0-значных случайных векторов, такое, что для некоторого рефлексивного вложения U в B, $C > 0$, найдется такая псевдометрика $\rho(t, s)$ на единичном шаре пространства U^*, для которой сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h_*(C \cdot 2^{-n} N^{-2}(\rho, 2^{-n}))$$

при $h(x) = \sup_\alpha \sup_{t \neq s} P(|(\xi_\alpha, t) - (\xi_\alpha, s)| / \rho(t, s) > x)$.

Тогда семейство ξ_α индуцирует слабо компактное семейство мер μ_α в пространстве B.

Доказательство. По теореме 2 $P(\xi_\alpha \in B) = 1$ для любого α, поэтому $\mu_\alpha(B) = 1$ и все меры μ_α сосредоточены в B. Обозначим $\xi_\alpha(t) = (\xi_\alpha, t)$. Как следует из замечания 1, поля $\xi_\alpha(t)$ индуцируют слабо компактное семейство мер в $C(T)$, где T — единичный шар пространства U^*. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, тогда существует компакт K_ε в $C(T)$, для которого $\sup\limits_\alpha P(\xi_\alpha(t) \bar{\in} K_\varepsilon) < \varepsilon$. Соответствующее семейство ξ_α с вероятностью, большей $1-\varepsilon$, равномерно по α будет сосредоточено в некотором компакте K'_ε пространства U^{**}. Поскольку U^{**} — замкнутое подмножество B, то K'_ε есть также компактное подмножество B и $\sup\limits_\alpha P(\xi_\alpha \bar{\in} K'_\varepsilon) < \varepsilon$.

Отметим, что замкнутость U^{**} в B не была использована в теореме 2.

Рассмотрим некоторые следствия полученных результатов. Пусть ξ_i—независимые случайные B-значные величины, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Как известно, величины S_n сходятся с вероятностью 1 по норме B, если они сходятся слабо и слабый предел $S = \lim S_n$ есть элемент $B \pmod P$ [9, с 32—33]. Таким образом, если слабый предел S_n с вероятностью 1 существует и удовлетворяет условию теоремы 2, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i$ сходится с вероятностью 1.

Пусть теперь ξ_i — независимые случайные одинаково распределенные элементы в B, $M\xi_i = 0$, $S_n = n^{-1/2} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Будем говорить, что ξ_i удовлетворяют центральной предельной теореме (ц. п. т.), если S_n слабо сходятся при $n \to \infty$ к некоторой гауссовской величине, сосредоточенной в B. Обозначим через $F(b^*)$ производящий функционал величины ξ_1, $F(b^*) = M \exp(\xi_1, b^*)$, $b^* \in B^*$ и определим для некоторой псевдометрики $\rho(t, s)$ на единичном шаре пространства U^* функцию

$$\psi(\lambda) = \sup_n \sup_{t \neq s} n \ln F(\lambda n^{-\frac{1}{2}} [t-s] / \rho(t, s)).$$

Теорема 3. Пусть существует рефлексивное вложение U с B и псевдометрика $\rho(t, s)$ на единичном шаре пространства U^* такая, что для некоторого $C > 0$ сходится ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h_*(C \cdot 2^{-n} \times N^{-2}(\rho, 2^{-n}))$ при $h(x) = \exp(-\psi^*(x))$. Тогда последовательность ξ_i удовлетворяет центральной предельной теореме.

Доказательство. Из условия теоремы вытекает существование производящего функционала и, следовательно, конечность второго момента $M(\xi, b^*)^2 < \infty$ $\forall b^* \in B^*$. По классической центральной предельной теореме для любого $b^* \in B^*$ последовательность (s_n, b^*) асимптотически нормальна. Осталось установить слабую компактность семейства мер, порожденных s_n. Имеем

$$M \exp(\lambda \rho^{-1}(t, s)[(s_n, t) - (s_n, s)]) =$$

$$= M \exp(\lambda \rho^{-1}(t, s) n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i, t) - (\xi_i, s)) = [M \exp(\lambda n^{-1/2}(\xi, t - s))]^n.$$

Как вытекает из замечания 2, $P(|(S_n, t) - (S_n, s)|/\rho(t, s) > x) \leqslant \leqslant 2 \exp(-\psi^*(x))$ и равномерно по n выполняется оценка

$$\sup_n \sup_{t \neq s} P(|(S_n, t) - (S_n, s)| / \rho(t, s) > x) < 2h(x).$$

Отсюда согласно лемме 1 следует слабая компактность семейства s_n.

Пусть, например, при $|\lambda| > 1$, $p \geqslant 2$ $\psi(\lambda) \leqslant |\lambda|^p / p$. Тогда при $x \geqslant 1$ $h(x) \leqslant \exp(-x^q / q)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Вычисляя $h_*(x)$ и N^2 и пользуясь теоремой 3, находим, что ξ_i удовлетворяют ц. п. т., если сходится ряд $\sum_n 2^{-n} H^{1/q}(\rho, 2^{-n})$. При $p = 2$ величина (ξ, t) субгауссова в смысле Козаченко [2], в этом случае и $q = 2$.

Другой метод доказательства ц. п. т. в банаховом пространстве, основанный на работе [4], изложен в статье [10]. Отметим, что в работе автора [4] имеется две описки: в правой части формулы (6) вместо k^2 необходимо подставить $2 \ln k$, а в левой вместо $\mu - |\mu|$.

В заключение автор выражает благодарность участникам семинара Ю. К. Беляева за внимание к работе.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М., 1971. 2. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О локальных свойствах реализаций некоторых случайных процессов и полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1974, вып. 10. 3. *Ферник X.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.: Случайные процессы. М., 1978. 4. *Островский Е. И.* Производящие функционалы, индуцирующие меры в пространстве непрерывных функций.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1977, вып. 16. 5. *Нгуен Зуй Тиен, Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* О компактности семейства мер второго порядка в банаховом пространстве.— Теория вероятностей и ее применения, 1977, **23**, вып. 4. 6. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., 1977. 7. *Markus M. B., Jain N. C.* Central limit theorem for valued random variable.— J. Functional Analysis, 1975, **19**, N 3. 8. *Островский Е. И.* Ковариационные операторы и некоторые оценки гауссовских векторов в банаховом пространстве.— ДАН СССР, 1977, **236**, № 3. 9. *Булдыгин В. В.* О некоторых свойствах случайных рядов в банаховом пространстве.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1973, вып. 9. 10. *Дмитровский В. А., Островский Е. И.* Оценка погрешности метода зависимых испытаний.— Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1978, **18**, № 5.

Поступила в редколлегию 28.08.79