ляции многомерного однородного случайного поля на дискретной группе.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1974, вып. 10. 5. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М., 1960. 6. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М., 1963.

Поступила в редколлегию 21.12.79

A. I. Ponomarenko

MOVING AVERAGES REPRESENTATIONS FOR GENERALIZED HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS ON LOCALLY COMPACT ABELIAN GROUPS

The conditions of the representations of moving averages for one-dimensional and multivariate generalized homogeneous random fields on locally compact abelian groups are considered.

УДК 519.21

Г. М. РАХИМОВ, канд. физ.-мат. наук
Ташкентский университет

ОБ ОЦЕНКЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ НА СФЕРЕ. I

В настоящей работе изучаются статистические оценки спектральных характеристик и корреляционной функции стационарного по времени, однородного и изотропного по пространству случайного поля на сфере в n-мерном евклидовом пространстве.

Пусть $\xi(P, t)$ — действительное непрерывное в среднем квадратическом случайное поле на $S_n \times R$, где S_n — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$ и R — числовая ось; $M\xi^2(P,t) < +\infty$. Предположим, что случайное поле $\xi(P, t)$ стационарно по времени, однородно и изотропно по пространственной переменной, т. е. $M\xi(P, t)$ постоянно относительно P, t (в дальнейшем будем считать, что $M\xi(P, t) = 0$) и $M\xi(P_1, t+s) \times \times \xi(P_2, s) = \mathbf{R}(\theta, t)$, где θ — угловое расстояние между P_1 и P_2.

Известно [1], что $\xi(P, t)$ допускает представление

$$\xi(P, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l(t) S_m^l(P),$$

где $S_m^l(P)$ — ортонормированные сферические гармоники степени m, $h(m, n) = (2m + n - 2)\frac{(m+n-3)!}{(n-2)!\,m!}$ — число линейно независимых сферических гармоник степени m,

$$M\xi_m^l(t)\,\xi_{m_1}^{l_1}(s) = \delta_m^{m_1}\delta_l^{l_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} dF_m(\lambda),$$

а $\{F_m(\lambda),\ m \geqslant 0\}$ — последовательность действительных неубывающих функций таких, что $\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) F_m(+\infty) < +\infty$. Корреляционная функция $\mathbf{R}(\theta, t)$ допускает представление

$$\mathbf{R}(\theta, t) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF_m(\lambda),$$

где $\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ — площадь поверхности S_n; $C_m^{\nu}(x)$ $(\nu \neq 0)$ — многочлены Гегенбауэра.

Будем предполагать, что $\xi(P, t)$ стационарно по времени, однородно и изотропно по пространственной переменной в узком смысле, т. е. для любого ограниченного набора точек $(P_1, t_1), \ldots, (P_k, t_k)$ совместное распределение $\xi(g(P_1), t_1 + t), \ldots, \xi(g(P_k), t_k + t)$ не зависит от g и t для всех $g \in G$ и t, $k = 1, 2, \ldots$, где G — группа вращений в $\mathbf{R}^n$ вокруг начала координат.

Условие А. Пусть $|M\xi(P_1, t_1) \ldots \xi(P_k, t_k)| \leqslant m_k(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ равномерно по $P_1, P_2, \ldots, P_k$ для всех $t_1, \ldots, t_k$; $k = 1, 2, \ldots$.

Через $\mathrm{cum}(x_1, \ldots, x_k)$ обозначим семиинвариант k-го порядка от случайных величин $x_1, \ldots, x_k$.

Для стационарного по времени, однородного и изотропного по пространственной переменной в узком смысле случайного поля $\mathrm{cum}\{\xi_{m_1}^l(t + \mu_1), \ldots, \xi_{m_{k-1}}^l(t + \mu_{k-1}), \xi_{m_k}^l(t)\}$ не зависит от t, и поэтому обозначим его через $C_{m_1,\ldots,m_k}^l(\mu_1, \ldots, \mu_{k-1})$.

Условие Б. Пусть для $q \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k-1$; $k = 2, 3, \ldots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \{1 + |\mu_j|^q\} |\mathrm{cum}\{\xi(P_1, t + \mu_1), \ldots, \xi(P_{k-1}, t + \mu_{k-1}),$$

$$\xi(P_k, t)\}| \, d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1} \leqslant C_k < \infty.$$

С помощью рассуждений, близких к тем, которые проведены в статье [3], можно доказать, что $\xi_m^l(t)$ для любого l удовлетворяет предположению работ [4, 5].

Из условия Б при $q = 0$ для любого набора $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ вытекает, что спектральная плотность k — 1-го порядка

$$f_{m_1,\ldots,m_k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}) = (2\pi)^{1-k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{m_1,\ldots,m_{k-1}}^l(\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}) \times$$

$$\times \exp\left[-i \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \lambda_j\right] d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1}$$

для $-\infty < \lambda_j < \infty$, $j = 1, \ldots, k-1$ существует, ограничена и равномерно непрерывна.

При $k = 2$ положим $f_{m_1,m_2}(\lambda) = f_m(\lambda)$. Пусть поле $\xi(P, t)$ наблюдается во всех точках сферы S_n в течение времени $[0, T]$. Для

$-\infty<\lambda<\infty$ и любого l определим $d_m^{(T)}(\lambda)=\int\limits_0^T \xi_m^l(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt$. Периодограмма

$$I_m^{(T)}(\lambda)=(2\pi T)^{-1}\,|\,d_m^{(T)}(\lambda)\,|^2 \tag{1}$$

есть асимптотически несмещенная оценка спектральной плотности $f_m(\lambda)$. Эта оценка не является состоятельной. Для построения состоятельной оценки рассмотрим четную ограниченную функцию $H(\alpha)$, $-\infty<\alpha<\infty$, которая имеет ограниченную производную и такая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\alpha)\,d\alpha=1$. Для последовательности положительных чисел B_T положим $H^{(T)}(\alpha)=B_T^{-1}(\alpha B_T^{-1})$. Оценку для спектральной плотности определим следующим образом:

$$f_m^{(T)}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H^{(T)}(\alpha)\,I_m^{(T)}(\lambda-\alpha)\,d\alpha, \tag{2}$$

где $I_m^{(T)}(\lambda)$ — периодограмма.

Теорема 1. Пусть случайное поле $\xi(P,t)$ такое, что выполняются условия А и Б. Если $B_T\to 0$, $B_T T\to\infty$ при $T\to\infty$, то $\lim\limits_{T\to\infty} Mf_m^{(T)}(\lambda)=f_m(\lambda)$,

$$\lim_{T\to\infty} TB_T\operatorname{cov}\{f_m^{(T)}(\lambda),\ f_p^{(T)}(\mu)\}=\Delta_{mp}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H^2(\alpha)\,d\alpha f_m^2(\lambda)\times$$
$$\times[\eta(\lambda+\mu)+\eta(\lambda-\mu)],$$

где

$$\Delta_{mp}=\begin{cases}1, & \text{если } m=p,\\ 0, & \text{если } m\neq p;\end{cases}\qquad \eta(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{если } \lambda=0,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Теорема 2. Пусть для случайного поля $\xi(P,t)$ выполнены условия А и Б и

$$B_m^{(T)}(\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\mu} I_m^{(T)}(\lambda)\,d\lambda \tag{3}$$

есть оценка для $B_m(\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\mu} f_m(\lambda)\,d\lambda$. Тогда

$$MB_m^{(T)}(\mu)=B_m(\mu)+O(T^{-1}),$$

$$\lim_{T\to\infty} T\operatorname{cov}\{B_m^{(T)}(\mu_1),B_p^{(T)}(\mu_2)\}=\Delta_{mp}2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}[e^{i\lambda(\mu_1-\mu_2)}+$$
$$+e^{i\lambda(\mu_1+\mu_2)}]\,f_m^2(\lambda)\,d\lambda+2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{m,p}(\alpha,-\alpha,\beta)\,e^{i(\alpha\mu_1+\beta\mu_2)}\,d\alpha d\beta.$$

В качестве оценки корреляционной функции случайного поля $\xi(P, t)$ рассмотрим следующую статистику:

$$\mathbf{R}_N^{(T)}(\theta, \mu) = \omega_n^{-1} \sum_{m=0}^{N} h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} B_m^{(T)}(\mu). \tag{4}$$

Предположим, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m, n) \int_{-\infty}^{\infty} f_m^2(\alpha)\, d\alpha < \infty,$$
$$\sum_{m,p=0}^{\infty} h(m, n) h(p, n) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{m,p}(\alpha, -\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta < \infty. \tag{5}$$

Теорема 3. Пусть для случайного поля $\xi(P, t)$ выполнены условия А, Б и (5). Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} M\mathbf{R}_N^{(T)}(\theta, \mu) = \mathbf{R}(\theta, \mu),$$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} T \operatorname{cov}\{\mathbf{R}_N^{(T)}(\theta_1, \mu_1), \mathbf{R}_N^{(T)}(\theta_2, \mu_2)\} =$$

$$= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \Delta_{mm} \frac{h^2(m, n)}{\omega_n^2} \cdot \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_1)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_2)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\alpha(\mu_1-\mu_2)} + e^{i\alpha(\mu_1+\mu_2)}] f_m^2(\alpha)\, d\alpha + \frac{2\pi}{\omega_n^2} \sum_{m,p=0}^{\infty} h(m, n) h(p, n) \times$$

$$\times \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_1)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \cdot \frac{C_p^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_2)}{C_p^{\frac{n-2}{2}}(1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha\mu_1+\beta\mu_2)} f_{m,p}(\alpha, -\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta.$$

Доказательства сформулированных результатов и условия асимптотической нормальности рассмотренных оценок будут приведены во второй части статьи.

В заключение автор благодарит М. И. Ядренко за помощь и внимание, оказанные при написании данной работы.

1. *Козаченко Ю. В., Ядренко М. И.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей. I.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1976, вып. 14. 2. *Ядренко М. И.* Статистические задачи для изотропных случайных полей.— Труды VIII летней математической школы. Киев, 1971. 3. *Рахимов Г. М.* Статистические оценки спектра и корреляционной функции однородного по времени и изотропного случайного поля на сфере.— В кн.: Исследования по теории

случайных процессов. Киев, 1976. 4. *Brillinger D. R.* The frequency analysis o relations between stationary spatial series.— Proc. XII Biannial Sem. Canad. Math. Congr. on Time Series and Stochastic processes, Convexity and Combinatorics, 1970. 5. *Brillinger D. R.* Asymptotic properties of spectral estimates of second order.— Biometrika, 1969, **56**, N 2.

Поступила в редколлегию 20.03.80

G. M. Rahimov

ON THE CORRELATION FUNCTION ESTIMATION OF HOMOGENEOUS ISOTROPIC RANDOM FIELD ON THE SPHERE.I

Some consistent estimates of the correlation function of a stationary on the time and homogeneous isotropic on the space random field observed on the sphere are considered.

УДК 519.21

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

ТЕОРЕМЫ ТИПА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

1. В работе доказаны предельные теоремы типа больших уклонений для распределений моментов достижения области фазового пространства случайными последовательностями с равномерным сильным перемешиванием. Следствиями из приведенных теорем могут служить «обычные» теоремы, устанавливающие условия существования и вид предельных распределений моментов достижения, изученные для конкретных классов однородных эргодических цепей Маркова в работах [1—3].

2. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ $\eta_\varepsilon(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — случайная последовательность со значениями в измеримом пространстве (X, F_X) и $\chi_\varepsilon(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность случайных величин, принимающих два значения 0 и 1 (индикаторов остановки), условно независимых по отношению к последовательности $\eta_\varepsilon(k)$:

$$P\{\chi_\varepsilon(k) = e_k, \quad k = \overline{1, n} / \eta_\varepsilon(k) = x_k, \ k = \overline{1, n}\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} B_{\varepsilon k}^{e_k}(x_k)\left(1 - B_{\varepsilon k}(x_k)\right)^{1-e_k}, \quad e_k = 0, 1, \ n \geqslant 1, \tag{1}$$

где $B_{\varepsilon k}(x)$ — F_X-измеримые функции со значениями в $[0, 1]$.

Введем в рассмотрение случайные величины (с. в.) $\tau_\varepsilon = \min\left(n : \prod_{k=1}^{n} \chi_\varepsilon(k) = 1\right)$, представляющие собой момент первого достижения двумерной случайной последовательностью $(\eta_\varepsilon(k), \chi_\varepsilon(k))$ области своего фазового пространства $D = X \times \{1\}$. Через $\mathfrak{M}_{\varepsilon k}$ будем обозначать σ-алгебру случайных событий, порожденных с. в.