случайных процессов. Киев, 1976. 4. *Brillinger D. R.* The frequency analysis o relations between stationary spatial series.— Proc. XII Biannial Sem. Canad. Math. Congr. on Time Series and Stochastic processes, Convexity and Combinatorics, 1970. 5. *Brillinger D. R.* Asymptotic properties of spectral estimates of second order.— Biometrika, 1969, **56**, N 2.

Поступила в редколлегию 20.03.80

G. M. Rahimov

ON THE CORRELATION FUNCTION ESTIMATION OF HOMOGENEOUS ISOTROPIC RANDOM FIELD ON THE SPHERE.I

Some consistent estimates of the correlation function of a stationary on the time and homogeneous isotropic on the space random field observed on the sphere are considered.

УДК 519.21

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

ТЕОРЕМЫ ТИПА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ ДОСТИЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

1. В работе доказаны предельные теоремы типа больших уклонений для распределений моментов достижения области фазового пространства случайными последовательностями с равномерным сильным перемешиванием. Следствиями из приведенных теорем могут служить «обычные» теоремы, устанавливающие условия существования и вид предельных распределений моментов достижения, изученные для конкретных классов однородных эргодических цепей Маркова в работах [1—3].

2. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ $\eta_\varepsilon(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — случайная последовательность со значениями в измеримом пространстве (X, F_X) и $\chi_\varepsilon(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность случайных величин, принимающих два значения 0 и 1 (индикаторов остановки), условно независимых по отношению к последовательности $\eta_\varepsilon(k)$:

$$P\{\chi_\varepsilon(k) = e_k,\quad k = \overline{1, n}/\eta_\varepsilon(k) = x_k,\ k = \overline{1, n}\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} B_{\varepsilon k}^{e_k}(x_k)\,(1 - B_{\varepsilon k}(x_k))^{1-e_k},\quad e_k = 0, 1,\ n \geqslant 1, \tag{1}$$

где $B_{\varepsilon k}(x)$ — F_X-измеримые функции со значениями в $[0, 1]$.

Введем в рассмотрение случайные величины (с. в.) $\tau_\varepsilon = \min\left(n : \prod_{k=1}^{n} \chi_\varepsilon(k) = 1\right)$, представляющие собой момент первого достижения двумерной случайной последовательностью $(\eta_\varepsilon(k), \chi_\varepsilon(k))$ области своего фазового пространства $D = X \times \{1\}$. Через $\mathfrak{M}_{\varepsilon k}$ будем обозначать σ-алгебру случайных событий, порожденных с. в.

$\eta_\varepsilon(r)$, $r=\overline{1,k}$ и через $\mathfrak{M}_{\varepsilon k}$ — минимальную σ-алгебру, порожденную величинами $\eta_\varepsilon(r)$, $r \geqslant k$. Пусть $\varphi_\varepsilon(k) = \max\limits_{r\geqslant 1} \sup\limits_{A\in\mathfrak{M}_{\varepsilon r}, B\in\mathfrak{M}_{\varepsilon r+k}} |P(B/A) - P(B)|$*) — коэффициент равномерного сильного перемешивания случайной последовательности $\eta_\varepsilon(k)$.

От основной последовательности $\eta_\varepsilon(k)$ будем постоянно требовать выполнения следующего асимптотического условия равномерного сильного перемешивания

$$\mathrm{A}:\ \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sum_{k\geqslant N} \varphi_\varepsilon(k) = 0.$$

От последовательности индикаторов остановки $\chi_\varepsilon(k)$ будем постоянно требовать выполнения следующего условия асимптотической равномерной малости «мгновенных» вероятностей попадания в область D

$$\mathrm{B}:\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \max_{k\geqslant 1} \sup_{x\in X} \varepsilon^{-1} B_{\varepsilon k}(x) = B < \infty.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполняются условия A, B. Тогда

$$P\{\tau_\varepsilon > \varepsilon^{-1}x\}/e^{-a_\varepsilon(x)} \sim e^{0,5 b_\varepsilon(x\varepsilon)}, \quad \varepsilon\to 0 \tag{2}$$

равномерно по $x\in[0, R\varepsilon^{-1}]$ для каждого $R\in[0,\infty)$. В (2)

$$a_\varepsilon(t) = \sum_{k\leqslant t\varepsilon^{-1}} M - \ln(1 - B_{\varepsilon k}(\eta_\varepsilon(k))),$$

$$b_\varepsilon(t) = D \sum_{k\leqslant t\varepsilon^{-2}} (-\ln(1 - B_{\varepsilon k}(\eta_\varepsilon(k)))).$$

Замечание 1. Как нетрудно проверить, в силу условий A, B функции $a_\varepsilon(t)$ и $b_\varepsilon(t)$ растут не быстрее, чем линейные функции в том смысле, что $0 \leqslant a_\varepsilon(t) \leqslant a_\varepsilon t$, где $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\, a_\varepsilon < \infty$, и $0\leqslant b_\varepsilon(t)\leqslant b_\varepsilon t$, где $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\, b_\varepsilon < \infty$.

Если случайная последовательность $\eta_\varepsilon(k)$ стационарна и последовательность индикаторов остановки $\chi_\varepsilon(k)$ однородна (функции $B_{\varepsilon k}(x) = B_\varepsilon(x)$ не зависят от k), $a_\varepsilon(t) = [t\varepsilon^{-1}]\, a_\varepsilon \varepsilon$, где $a_\varepsilon = \varepsilon^{-1} M - \ln(1 - B_\varepsilon(\eta_\varepsilon(1)))$, и $b_\varepsilon(t) - b_\varepsilon t \to 0$, $\varepsilon\to 0$ равномерно по t в каждом конечном промежутке, где $b_\varepsilon = b_\varepsilon(1) = D\sum\limits_{k\leqslant\varepsilon^{-2}} (-\ln(1 - B_\varepsilon(\eta_\varepsilon(1))))$. В этом случае в (2) функции $e^{-a_\varepsilon(x)}$ и $e^{0,5b_\varepsilon(x\varepsilon)}$ можно заменить соответственно на $e^{-a_\varepsilon x}$ и $e^{0,5 b_\varepsilon x\varepsilon}$.

*) По определению считаем $\varphi_\varepsilon(0) = 1$.

3. Доказательство теоремы 1. В силу условия В можно считать, что $\max_k \sup_x B_{\varepsilon k}(x) < 1$ для всех $\varepsilon > 0$. Используя условную независимость последовательности индикаторов остановки $\chi_\varepsilon(k)$ по отношению к основной последовательности $\eta_\varepsilon(k)$, получаем следующее представление для распределения случайной величины τ_ε:

$$P\{\tau_\varepsilon > \varepsilon^{-1} x\} = M \exp\left\{\sum_{k \leqslant \varepsilon^{-1} x} \ln(1 - B_{\varepsilon k}(\eta_\varepsilon(k)))\right\}. \qquad (3)$$

Обозначим для удобства $n_\varepsilon = \varepsilon^{-2}$ и введем в рассмотрение случайные величины $\xi_{\varepsilon k} = \varepsilon^{-1}(\ln(1 - B_{\varepsilon k}(\eta_\varepsilon(k))) - M \ln(1 - B_{\varepsilon k}(\eta_\varepsilon(k))))$.

С учетом (3) и введенных обозначений

$$P\{\tau_\varepsilon > \varepsilon^{-1} x\}/e^{-a_\varepsilon(x)} = M \exp\{S_\varepsilon(x/\sqrt{n_\varepsilon})\}, \qquad (4)$$

где $S_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}} \sum_{k \leqslant t n_\varepsilon} \xi_{\varepsilon k}$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при любом выборе $x = x_\varepsilon \sqrt{n_\varepsilon}$ и x_ε как функции от ε, принимающей значения в ограниченном промежутке $[0, R]$,

$$M e^{S_\varepsilon(x_\varepsilon)} \sim e^{0,5 b_\varepsilon(x_\varepsilon)}, \quad \varepsilon \to 0. \qquad (5)$$

Случайные величины $\xi_{\varepsilon k}$, как нетрудно понять, обладают следующими свойствами: а) $|\xi_{\varepsilon k}| \leqslant H_\varepsilon$, где $\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} H_\varepsilon = H < \infty$ (не нарушая общности, можно считать, что $H_\varepsilon < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$); б) $M\xi_{\varepsilon k} = 0$; в) $\xi_{\varepsilon k}$ — последовательность с коэффициентом равномерного сильного перемешивания $\bar{\varphi}_\varepsilon(k) \leqslant \varphi_\varepsilon(k)$.

Кроме того, $DS_\varepsilon(x_\varepsilon) = b_\varepsilon(x_\varepsilon)$.

Не нарушая общности, можно считать, что функции x_ε и $b_\varepsilon(x_\varepsilon)$ имеют конечные пределы: г) $x_\varepsilon \to x$, $\varepsilon \to 0$, д) $b_\varepsilon(x_\varepsilon) \to b(x)$, $\varepsilon \to 0$.

При выполнении условий а) — д) для сумм случайных величин $S_\varepsilon(x_\varepsilon)$ справедлива центральная предельная теорема, т. е.

$$S_\varepsilon(x_\varepsilon) \Rightarrow N(0, b(x)), \quad \varepsilon \to 0. \qquad (6)$$

Соответствующие стандартные выкладки, аналогичные приведенным в работе [1] при доказательстве центральной предельной теоремы для сумм стационарно связанных случайных величин с равномерным сильным перемешиванием, мы опускаем.

Основным элементом доказательства теоремы 1 является следующее утверждение.

Лемма 1. При выполнении для случайных величин $\xi_{\varepsilon k}$ условий а) — в) для всех $p > 0$

$$M e^{p S_\varepsilon(x)} \leqslant K_{\varepsilon, p}^x, \qquad (7)$$

где $\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} K_{\varepsilon, p} = K_p < \infty$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что можно ограничиться случаем, когда $p=1$ (в противном случае достаточно соответствующим образом изменить константы H_ε). Введем в рассмотрение случайные величины $\eta_{\varepsilon k}=\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}\sum\limits_{(k-1)\sqrt{n_\varepsilon}<r\leqslant k\sqrt{n_\varepsilon}}\xi_{\varepsilon k}$. По определению

$$Me^{S_\varepsilon(x)}=M\prod_{k\leqslant x\sqrt{n_\varepsilon}}e^{\eta_{\varepsilon k}}. \tag{8}$$

Для любой случайной величины ξ_ε, ограниченной по модулю константой H_ε и измеримой относительно σ-алгебры $\overline{\mathfrak{M}}_{\varepsilon r+k}$

$$|M\{\xi_\varepsilon/\mathfrak{M}_{\varepsilon r}\}-M\xi_\varepsilon|\leqslant 2H_\varepsilon\varphi_\varepsilon(k). \tag{a}$$

Обозначим $N_{\varepsilon k}=\mathfrak{M}_{\varepsilon[k\sqrt{n_\varepsilon}]}$. Используя ($a$), находим

$$|M\{\eta_{\varepsilon k}/N_{\varepsilon k-1}\}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}\sum_{r\leqslant\sqrt{n_\varepsilon}}2H_\varepsilon\overline{\varphi}_\varepsilon(r)\leqslant\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}K_{\varepsilon 1}^{*)}, \tag{9}$$

$$M\{\eta_{\varepsilon k}^2/N_{\varepsilon k-1}\}\leqslant\frac{1}{n_\varepsilon}\sum_{r\leqslant l\leqslant\sqrt{n_\varepsilon}}M\,|\,\xi_{\varepsilon[(k-1)\sqrt{n_\varepsilon}]+r}\,|\times$$

$$\times|M\{\xi_{\varepsilon[(k-1)\sqrt{n_\varepsilon}]+l}/\mathfrak{M}_{\varepsilon[(k-1)\sqrt{n_\varepsilon}]+r}\}|\leqslant\frac{1}{n_\varepsilon}\sum_{r\leqslant l\leqslant\sqrt{n_\varepsilon}}2H_\varepsilon^2\overline{\varphi}_\varepsilon(l-r)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}\sum_{r\leqslant\sqrt{n_\varepsilon}}2H_\varepsilon\frac{\sqrt{n_\varepsilon}-r}{\sqrt{n_\varepsilon}}\overline{\varphi}_\varepsilon(r)\leqslant\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}K_{\varepsilon 2}. \tag{10}$$

Учитывая также, что по определению случайные величины $|\eta_{\varepsilon k}|\leqslant H_\varepsilon$ и используя (9) и (10), получаем

$$M\{e^{\eta_{\varepsilon k}}/N_{\varepsilon k-1}\}=M\left\{1+\eta_{\varepsilon k}+\eta_{\varepsilon k}^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\eta_{\varepsilon k}+\ldots\right)/N_{\varepsilon k-1}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 1+|M\{\eta_{\varepsilon k}/N_{\varepsilon k-1}\}|+M\{\eta_{\varepsilon k}^2e^{H_\varepsilon}/N_{\varepsilon k-1}\}\leqslant 1+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}K_{\varepsilon 1}+\frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}}e^{H_\varepsilon}K_{\varepsilon 2}\leqslant 1+\frac{K_{\varepsilon 3}}{\sqrt{n_\varepsilon}}. \tag{11}$$

---

*) Здесь и ниже $K_{\varepsilon i}$ — неотрицательные константы такие, что $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}K_{\varepsilon i}<\infty$.

Из (11) следует оценка

$$M\prod_{k=1}^{r} e^{\eta_{\varepsilon k}} = M\prod_{k=1}^{r-1} e^{\eta_{\varepsilon k}} M\{e^{\eta_{\varepsilon r}}/N_{\varepsilon r-1}\} \leqslant M\prod_{k=1}^{r-1} e^{\eta_{\varepsilon k}}\left(1+\frac{K_{\varepsilon 3}}{\sqrt{n_\varepsilon}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1+\frac{K_{\varepsilon 3}}{\sqrt{n_\varepsilon}}\right)^r. \qquad (12)$$

Очевидно, (12) эквивалентно (7).

Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы 1. Согласно (6) случайные величины

$$e^{S_\varepsilon(x_\varepsilon)} \Rightarrow e^{N(0,b(x))}, \quad \varepsilon\to 0. \qquad (13)$$

В силу соответствующего варианта теоремы Лебега из (7) и (13) следует, что $Me^{S_\varepsilon(x_\varepsilon)} \to Me^{N(0,b(x))} = e^{0,5b(x)}$, $\varepsilon\to 0$.

4. Для фиксированного x правая часть (2) стремится к нулю и соотношение (2) можно переписать в виде

$$P\{\tau_\varepsilon > \varepsilon^{-1}x\} - e^{-a_\varepsilon(x)} \to 0, \ \varepsilon\to 0, \qquad (14)$$

соответствующем форме «обычных» предельных теорем, устанавливающих условие существования и вид предельных распределений для моментов достижения.

Введем в рассмотрение функции $C_\varepsilon(t) = M - \ln(1 - B_{\varepsilon k}(\eta_\varepsilon(k)))$ для $\varepsilon(k-1)\leqslant t < \varepsilon k$. Как нетрудно понять,

$$a_\varepsilon(t) = \int_0^{\varepsilon[\varepsilon^{-1}t]} C_\varepsilon(s)\,ds. \qquad (15)$$

Предположим теперь, что в дополнение к A, B выполняется условие

C: $\varepsilon^{-1}M - \ln(1 - B_{\varepsilon k}(\eta_\varepsilon(k))) \to C(t)$ при $\varepsilon\to 0$ и $k\to\infty$ так, что $\varepsilon k\to t$ для $t\in R$. Здесь $C(t)$ — измеримая ограниченная неотрицательная функция на $[0,\infty)$, множество точек разрыва которой имеет нулевую меру Лебега, R — измеримое подмножество $[0,\infty)$ такое, что множество $\bar{R}$ имеет нулевую меру Лебега.

Поскольку при выполнении условия B функции $C_\varepsilon(t)$ равномерно по t и ε ограничены, то из представления (15) следует, что при выполнении условий B и C функции $a_\varepsilon(t) \to \int_0^t C(s)\,ds$, $\varepsilon\to 0$, $t\geqslant 0$.

Теперь в качестве следствия из теоремы 1 можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия A, B, C. Тогда

$$P\{\tau_\varepsilon > \varepsilon^{-1}x\} \to \exp\left\{-\int_0^x C(s)\,ds\right\}, \ \varepsilon\to 0, \ x\geqslant 0.$$

Замечание 2. В частном случае, когда $C(s) \equiv C$, в качестве предельного закона выступает показательное распределение. Функция $C(s)$, фигурирующая в условии C, необходимо является константой, если рассматривается схема, в которой $\eta_\varepsilon(k)$ — стационарная последовательность, а последовательность индикаторов $\chi_\varepsilon(k)$ однородна. В этом случае условие C имеет вид

$$C_1:\ \varepsilon^{-1} M - \ln(1 - B_\varepsilon(\eta_\varepsilon(1))) \to C, \quad \varepsilon \to 0.$$

5. Рассмотрим более подробно схему, изучавшуюся в работах [2, 3], где последовательности $\eta_\varepsilon(k)$ представляли собой однородные показательно эргодические цепи Маркова и последовательности индикаторов остановки $\chi_\varepsilon(k)$ однородны. Через ρ_ε будем обозначать показатель эргодичности цепи Маркова $\eta_\varepsilon(k)$, а через π_ε — ее стационарное распределение.

Теорема 3. Пусть выполняются условия B и

$$\mathrm{D}:\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \rho_\varepsilon < 1.$$

Тогда

$$P_y\{\tau_\varepsilon > \varepsilon^{-1} x\}/e^{-a_\varepsilon x} \sim e^{0,5 b_\varepsilon x_\varepsilon}, \quad \varepsilon \to 0 \tag{16}$$

равномерно по $y \in X$ и $x \in [0, \varepsilon^{-1} R]$ для каждого $R \in [0, \infty)$. Здесь $a_\varepsilon = \varepsilon^{-1} M_{\pi_\varepsilon} - \ln(1 - B_\varepsilon(\eta_\varepsilon(1)))$, $b_\varepsilon = M_{\pi\varepsilon}\left(\sum_{k \leqslant \varepsilon^{-2}} (-\ln(1 - B_\varepsilon(\eta_\varepsilon(k))) - a_\varepsilon \varepsilon)\right)^2$.

Замечание 3. Теоремы, эквивалентные утверждению, получаемому из теоремы 3 при фиксированных x, и устанавливающие сходимость распределений моментов достижения τ_ε при соответствующих условиях к показательному распределению, содержатся в работах [2, 3].

6. Опуская подробности, поясним основные моменты доказательства теоремы 3. Эквивалентная форма утверждения теоремы состоит в том, что при выборе в качестве начальных распределений для цепей Маркова $\eta_\varepsilon(k)$ произвольных распределений μ_ε

$$P_{\mu_\varepsilon}\{\tau_\varepsilon > \varepsilon^{-1} x\}/e^{-a_\varepsilon(x)} \sim e^{0,5 b_\varepsilon(x\varepsilon)}, \quad \varepsilon \to 0 \tag{17}$$

равномерно по $x \in [0, \varepsilon^{-1} R]$ для каждого $R \in [0, \infty)$, где $a_\varepsilon(t) = \sum_{k \leqslant \varepsilon^{-1} t} M_{\mu_\varepsilon} - \ln(1 - B_\varepsilon(\eta_\varepsilon(k)))$ и $b_\varepsilon(t) = M_{\mu_\varepsilon}\left(\sum_{k \leqslant t\varepsilon^{-2}} (-\ln(1 - B_\varepsilon \times (\eta_\varepsilon(k))) - M_{\mu_\varepsilon} - \ln(1 - B_\varepsilon(\eta_\varepsilon(k))))\right)^2$.

Используя известное неравенство для оценки средних измеримых ограниченных функционалов, определенных на показательно эргодической цепи Маркова, получаем оценку

$$|a_\varepsilon(x) - a_\varepsilon x| \leqslant (x - \varepsilon[\varepsilon^{-1} x])\, a_\varepsilon + \varepsilon \sum_{k \leqslant \varepsilon^{-1} x} K_{\varepsilon 4} \rho_\varepsilon^k \leqslant K_{\varepsilon 5} \varepsilon, \tag{18}$$

а после чуть более сложных выкладок, основанных на использовании того же неравенства, соотношение

$$\left| \sup_{0\leqslant x\leqslant t} \left| b_\varepsilon(x) - b_\varepsilon x \right| \to 0, \ \varepsilon\to 0, \ t\geqslant 0. \right. \tag{19}$$

Условие D эквивалентно в данной схеме условию А. Выписывая соотношение (2) (для цепей Маркова $\eta_\varepsilon(k)$ в качестве начальных распределений выбираем μ_ε) и заменяя в нем функции $e^{-a_\varepsilon(x)}$ и $e^{0,5b_\varepsilon(x\varepsilon)}$ на функции $e^{-a_\varepsilon x}$ и $e^{0,5b_\varepsilon x\varepsilon}$ (возможность такой замены следует из (18) и (19), получаем (17).

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения Киев, 1976. 2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Асимптотическое укрупнение полумарковских процессов с произвольным пространством состояний.— Тезисы III Советско-японского симпозиума по теории вероятностей. Ташкент, 1975. 3. *Анисимов В. В., Война А. В.* Предельные теоремы для схем суммирования для случайных процессов с произвольным пространством состояний.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 19.

Поступила в редколлегию 21.12.79

D. S. Silvestrov

THEOREMS OF LARGE DEVIATION TYPE FOR MOMENTS OF REACHING FOR MIXED SEQUENCES

Limit theorems of large deviation type for distribution of moments of first reaching of domain of phase space for sequences with uniform strong mixing are proved.

УДК 519.21

В. И. СТЕПАХНО, асп.
Киевский университет

ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ РАЗЛИЧЕНИЯ ГИПОТЕЗ О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Классическая статистика случайных процессов использовала линейные методы лишь для определения среднего значения или различения гипотез о средних (см. например [1]). При статистическом определении спектра или корреляционной функции уже применялись квадратические функционалы от наблюдений [2]. В настоящей статье развита предложенная И. Ш. Ибрамхалиловым и А. В. Скороходом [3], методика определения корреляционного оператора, которая основана на использовании линейных функций от наблюдений. Важной особенностью методики является то, что для решения статистических задач не нужно точно знать корреляционный оператор. Он может быть известен лишь с точностью до обратимого ограниченного оператора (для построений используются лишь множества нулей оператора или его расширения).