а после чуть более сложных выкладок, основанных на использовании того же неравенства, соотношение

$$\left| \sup_{0\leqslant x\leqslant t} \left| b_\varepsilon(x) - b_\varepsilon x \right| \to 0,\ \varepsilon\to 0,\ t\geqslant 0. \right. \tag{19}$$

Условие D эквивалентно в данной схеме условию A. Выписывая соотношение (2) (для цепей Маркова $\eta_\varepsilon(k)$ в качестве начальных распределений выбираем μ_ε) и заменяя в нем функции $e^{-a_\varepsilon(x)}$ и $e^{0,5b_\varepsilon(x\varepsilon)}$ на функции $e^{-a_\varepsilon x}$ и $e^{0,5b_\varepsilon x\varepsilon}$ (возможность такой замены следует из (18) и (19), получаем (17).

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения Киев, 1976. 2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Асимптотическое укрупнение полумарковских процессов с произвольным пространством состояний.— Тезисы III Советско-японского симпозиума по теории вероятностей. Ташкент, 1975. 3. *Анисимов В. В., Война А. В.* Предельные теоремы для схем суммирования для случайных процессов с произвольным пространством состояний.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 19.

Поступила в редколлегию 21.12.79

D. S. Silvestrov

THEOREMS OF LARGE DEVIATION TYPE FOR MOMENTS OF REACHING FOR MIXED SEQUENCES

Limit theorems of large deviation type for distribution of moments of first reaching of domain of phase space for sequences with uniform strong mixing are proved.

УДК 519.21

В. И. СТЕПАХНО, асп.
Киевский университет

ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ РАЗЛИЧЕНИЯ ГИПОТЕЗ О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Классическая статистика случайных процессов использовала линейные методы лишь для определения среднего значения или различения гипотез о средних (см. например [1]). При статистическом определении спектра или корреляционной функции уже применялись квадратические функционалы от наблюдений [2]. В настоящей статье развита предложенная И. Ш. Ибрамхалиловым и А. В. Скороходом [3], методика определения корреляционного оператора, которая основана на использовании линейных функций от наблюдений. Важной особенностью методики является то, что для решения статистических задач не нужно точно знать корреляционный оператор. Он может быть известен лишь с точностью до обратимого ограниченного оператора (для построений используются лишь множества нулей оператора или его расширения).

В настоящей работе рассматривается задача о выборе гипотезы из конечного числа гипотез.

1. Пусть X — гильбертово пространство. Наблюдается случайная величина ξ со значениями в X. Распределение величины ξ неизвестно. Относительно его имеется N гипотез. По гипотезе H_i величина ξ имеет распределение такое, что среднее (ξ, z) равно 0, дисперсия $(\xi, z) = (B_i z, z)$, где B_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — заданные симметричные неотрицательные операторы. Будем предполагать, что при $(B_i z, z) > 0$ величина (ξ, z) имеет непрерывное распределение. Значит, $P_i \{(\xi, z) = 0\} = 0$ (P_i — вероятность при i-й гипотезе).

Определение 1. Гипотезы H_i и H_j строго линейно различимы, если $\{z : B_i z = 0\} \neq \{z : B_j z = 0\}$ при $i \neq j$.

Будем в этом случае также говорить, что линейные операторы B_i и B_j линейно различимы.

Теорема 1. Если гипотезы $\{H_i\}$ попарно строго линейно различимы, то их можно перенумеровать так и указать такие векторы z_i, что $P_i\{(\xi, z_1) \neq 0, \ldots, (\xi, z_{i-1}) \neq 0, (\xi, z_i) = 0\} = 1$.

Доказательство. Обозначим $L_i = \{z : B_i z = 0\}$. Из определения линейной различимости следует, что $L_i \neq L_j$ при $i \neq j$. Перенумеруем гипотезы так, чтобы при $i < j$ не могло быть $L_i \subset L_j$. Это можно сделать следующим образом. Введем среди гипотез отношение порядка, считая $H_\alpha < H_\beta$, если $L_\alpha \subset L_\beta$. Множество гипотез станет тогда частично упорядоченным. Пронумеруем существующие в силу конечности множества максимальные элементы (те H_β, для которых не выполняется $H_\gamma > H_\beta$). Выбросив уже пронумерованные элементы, получим опять частично упорядоченное множество. Продолжим нумерацию максимальных элементов и т. д. Продолжая этот процесс, получим требуемый порядок нумерации гипотез.

Пусть L_i пронумерованы указанным образом. Тогда $L_i \setminus \bigcup_{j>i} L_j$ не пусто. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть $L, L_1, L_2, \ldots L_k$ — линейные многообразия. Если $L \setminus L_i \neq \varnothing$, то $L \setminus \bigcup_{i=1}^{k} L_i$ также не пусто.

Доказательство. Пусть $a_k \in L \setminus L_k$, M — линейное подпространство, построенное по $a_1, \ldots, a_k$; его размерность — r $(r \leqslant k)$. Обозначим через M_i подпространство такое, что $M_i = M \cap L_i$; $M \setminus M_i \ni a_i$ и, значит, не пусто, M_i имеет размерность не больше $r - 1$.

Пусть $\widetilde{M}_i$ — такое подпространство M, что $\widetilde{M}_i \supset M_i$ и $\widetilde{M}_i$ имеет размерность $r - 1$ (берем произвольное расширение M_i, если его размерность меньше $< r - 1$). Покажем, что $\bigcup \widetilde{M}_i$ не содержит M. Если b_i — нормаль к M_i, то $\widetilde{M}_i = \{x : (b_i, x) = 0\}$. Если бы $\bigcup \widetilde{M}_i = M$, то $\prod_{i=1}^{k} (b_i, x) \equiv 0$ или в координатах

$$\prod_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{r} \beta_{is} x_s \equiv 0.$$

Но это многочлен с отличными от нуля коэффициентами. Он не может равняться нулю тождественно, что и доказывает лемму.

Чтобы закончить доказательство теоремы, выберем $z_i \in L_i \setminus \bigcup_{j>i} L_j$. Если $(z_1, x) \neq 0, \ldots, (z_{i-1}, x) \neq 0, (z_i, x) = 0$, то в силу выбора z_i $P_j \{(z_i, \xi) = 0\} = 0$. Значит, верна i-я гипотеза. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему 1 можно переформулировать в терминах линейно различимых операторов. Если операторы $B_1, \ldots, B_N$ линейно различимы, то их можно перенумеровать таким образом и указать такие векторы $z_1, \ldots, z_N$, что $B_i z_i = 0$, $B_j z_i \neq 0$ при $i < j$.

2. Рассмотрим более общий случай.

Определение 2. Гипотезы H_i и H_j линейно различимы, если существует такая последовательность векторов z_n, что

$$(B_i z_n, z_n) / (B_j z_n, z_n) + (B_j z_n, z_n) / (B_i z_n, z_n) \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Теорема 2. Если гипотезы $\{H_i\}$ попарно линейно различимы, то их можно перенумеровать так и указать такие последовательности векторов z_n^k, что $P_i \{ \lim_{n\to\infty} (\xi, z_n^{(1)}) \neq 0, \ldots, \lim_{n\to\infty} (\xi, z_n^{(i-1)}) \neq 0, \lim_{n\to\infty} (\xi, z_n^{(i)}) = 0\} = 1$.

Доказательство. Из определения линейной различимости следует, что можно указать для любых двух гипотез H_i и H_j такую последовательность, что $(B_j z_n, z_n) = 1$, $(B_i z_n, z_n) \to 0$ либо $(B_i z_n, z_n) = 1$, $(B_j z_n, z_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Таких пар гипотез будет $N(N-1)/2 = m$. Обозначим через $z_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ последовательность для каждой пары. Припишем каждой последовательности предел $\widetilde{z}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} z_n^{(k)}$. Рассмотрим линейную оболочку Z элементов $\widetilde{z}^{(k)}$. Если $\Sigma \alpha_k z_n^{(k)}$ имеет предел в X, равный x, то отождествим $\Sigma \alpha_k z_n^k$ с x. Выберем среди $\widetilde{z}^{(k)}$ максимальную систему линейно независимых между собой элементов, линейная оболочка которых пересекается с X по нулевому подпространству. Обозначим их через $\widetilde{z}^{(1)}, \ldots, \widetilde{z}^{(p)}$, где $p \leqslant m$ (не ограничивая общности, можно считать, что последовательности были перенумерованы нужным образом). Тогда $\vec{Z}_1 = \widetilde{Z} \cap X$, $\widetilde{Z}_2$ — линейная оболочка $\widetilde{z}^{(1)}, \ldots, \widetilde{z}^{(p)}$, $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}_1 \oplus \widetilde{Z}_2$.

Определим операторы $\tilde{B}_i$ на $\tilde{Z}$. При $z \in \tilde{Z}_1$ положим

$$\tilde{B}_i z = B_i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \tilde{z}_n^k.$$

Этот предел существует в X. Для всякой линейной комбинации $\sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{z}^{(j)}$, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty} B_i \sum_{j=1}^{p} \beta_j z_n^j = x,$$

полагаем $\tilde{B}_i \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{z}^{(j)} = x$. Если $\mathfrak{L}_{2i}$ — множество таких линейных комбинаций, а M_{2i} — его ортогональное дополнение (т. е. $\tilde{Z}_2 = \mathfrak{L}_{2i} \oplus \oplus M_{2i}$), то положим $\tilde{B}_i z = z$ для $z \in M_{2i}$. Покажем, что эти операторы линейно различимы. Найдем множество нулей оператора $\tilde{B}_i$. Если $\tilde{B}_i z = 0$, а $z = u + w$, где $u \in Z_1 \oplus \mathfrak{L}_{2i}$, $w \in M_{2i}$, то $0 = \tilde{B}_i z = \tilde{B}_i u + w$. Поскольку $\tilde{B}_i u \in X$, $w \in M_{2i}$, то $w = 0$, $\tilde{B}_i u = 0$. Предполагая, что $u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \tilde{z}^{(k)}$, получаем

$$0 = \tilde{B}_i u = \lim_{n\to\infty} B_i \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \tilde{z}_n^{(k)}.$$

Таким образом, $\tilde{B}_i \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \tilde{z}^{(k)}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} B_i \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \tilde{z}^{(k)} = 0.$$

Для каждой пары i и j существует последовательность $z_n^{(k)}$ такая, что $B_i z_n^{(k)} \to 0$, а $B_j z_n^{(k)} \not\to 0$ (или наоборот). Поэтому $B_i \tilde{z}^{(k)} = 0$, $\tilde{B}_j \tilde{z}^{(k)} \neq 0$ (или наоборот). Воспользовавшись замечанием 1, завершаем доказательство теоремы.

3. Рассмотрим пример. Наблюдается стационарный процесс $\xi(t)$ на интервале $(-\infty, \infty)$ со средним 0 и неизвестной спектральной плотностью.

Пусть имеется N гипотез относительно спектральной плотности $f_k(\lambda)$ — спектральная плотность по k-й гипотезе, причем $f_k(\lambda)$ можно представить в виде $f_k(\lambda) = |\lambda - \alpha_k|\,\psi_k(\lambda)$ где $\psi_k(\lambda) > 0$ и непрерывна. Точки α_k различны. Имеем

$$(B_k a_k(t), a_k(t)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_k(t-s)\, a_k(t)\, a_k(s)\, dt ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f_k(\lambda)\, a_k(t)\, a_k(s)\, dt ds d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\lambda)\, |\tilde{a}_k(\lambda)|^2\, d\lambda,$$

где $R_k(t-s)$ — корреляционная функция по k-й гипотезе, $\tilde{a}_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} a_k(t)\, dt.$

Предположив $\tilde{a}_k^{(n)}(\lambda) = \sqrt{n}\,/\,(1 + n(\lambda - \alpha_k)^2)$, получим

$$\lim_{n\to\infty} (B_i \tilde{a}_k^n, \tilde{a}_k^n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\lambda)\, [\sqrt{n}\,/\,(1 + n(\lambda - \alpha_k)^2)]\, d\lambda.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $\sqrt{n}(\lambda - \alpha_k) = u$ находим

$$\lim_{n\to\infty} (B_i \tilde{a}_k^n, \tilde{a}_k^n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\alpha_k + u/\sqrt{n})\,(1 + u^2)^{-1}\, du =$$

$$= f_i(\alpha_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i = k, \\ \neq 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

При таком выборе $\tilde{a}_k^n$

$$\tilde{a}_k^n(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \sqrt{n}\, [1 + n(\lambda - \alpha_k)^2]^{-1}\, d\lambda = (\pi)^{-1} e^{i\alpha_k t - |t|/\sqrt{n}}.$$

Таким образом, для величин

$$\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha_k} e^{-|t|/\sqrt{n}}\, \xi(t)\, dt$$

выполняется следующее правило выбора гипотез.

Если для некоторого k $\zeta_i^{(n)} \not\to 0$ по вероятности при $i < k$, $\zeta_k^{(n)} \to 0$ по вероятности, то справедлива гипотеза H_k.

Замечание 2. Проверка стремления к нулю по вероятности на индивидуальном наблюдении невозможна. Однако, выбирая достаточно редкую подпоследовательность $\zeta_k^{(n)}$, всегда можно достичь того, что при $\zeta_k^{(n_i)} \to 0$ $\sum_i D_j \zeta_k^{(n_i)} < \infty$ для всех j и k (D_j — дисперсия, вычисленная при гипотезе H_j). В этом случае $\zeta_k^{(n_i)}$ будет не просто сходиться по вероятности к нулю, а с вероятностью 1. И после такого выбора последовательности n_i можно действительно различать гипотезы с вероятностью 1 с помощью величин $\zeta_k^{(n_i)}$.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность научному руководителю А. В. Скороходу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

1. *Grenander U.* Stochastic processes and statistical inference.— Ark. Mat., 1950, 1, N 1. 2. *Grenander U., Rossenblatt M.* Statistical analysis of stationary time series. N. Y., 1956. 3. *Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В.* Состоятельные оценки, параметров случайных процессов. Киев, 1980.

Поступила в редколлегию 29.12.79

V. I. Stepakhno

LINEAR METHODS OF DISCRIMINATION OF HYPOTHESES FOR CORRELATION FUNCTION OF STOCHASTIC PROCESSES

A linear method of discrimination of finite number of hypotheses for correlation operator of random variable in the Hilbert space is constructed. The problem of selection of hypotheses about spectral density for stationary stochastic process with only one zero is considered.

УДК 519.21

Ю. П. ФИЛОНОВ, ассист.
Киевский инженерно-строительный институт

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ТИПА РАЗМАХА ОТ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

1. Пусть S_n, $n = 0, 1, \ldots$ — невозвратная марковская цепь со счетным множеством состояний E. Для любого $x \in E$ f_x есть последовательность случайных величин (с. в.) $f_x(1)$, $f_x(2), \ldots$ (все f_x по x одинаково распределены и независимы); $r_{x,n}$ — вероятность возвращения цепи S_n, $n \geqslant 0$, $S_0 = x$ в состояние x на промежутке времени $[0, n-1]$ $(r_{x,\infty} = r_x)$. Будем предполагать выполненным условие $r = \sup\{r_x : x \in E\} < 1$.

Ниже будет доказана сформулированная в работе [1] (в иной форме) следующая теорема.

Теорема 1. Если r_{S_n} по вероятности сходится к некоторой с. в. r_∞, $r_{x,n} \to r_x \, (n \to \infty)$ равномерно по x, для некоторого $p \geqslant 2$

$$\sum_k \mathbf{M} \, | f_x(k) |^p r^k < \infty,$$

то

$$n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\nu_{i,n}) \to (1 - r_\infty) \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{M} f_x(k)] \, r_\infty^{k-1} \, (n \to \infty)$$