сия, вычисленная при гипотезе H_j). В этом случае $\zeta_k^{(n_i)}$ будет не просто сходиться по вероятности к нулю, а с вероятностью 1. И после такого выбора последовательности n_i можно действительно различать гипотезы с вероятностью 1 с помощью величин $\zeta_k^{(n_i)}$.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность научному руководителю А. В. Скороходу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

1. *Grenander U.* Stochastic processes and statistical inference.— Ark. Mat., 1950, 1, N 1. 2. *Grenander U., Rossenblatt M.* Statistical analysis of stationary time series. N. Y., 1956. 3. *Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В.* Состоятельные оценки, параметров случайных процессов. Киев, 1980.

Поступила в редколлегию 29.12.79

V. I. Stepakhno

LINEAR METHODS OF DISCRIMINATION OF HYPOTHESES FOR CORRELATION FUNCTION OF STOCHASTIC PROCESSES

A linear method of discrimination of finite number of hypotheses for correlation operator of random variable in the Hilbert space is constructed. The problem of selection of hypotheses about spectral density for stationary stochastic process with only one zero is considered.

УДК 519.21

Ю. П. ФИЛОНОВ, ассист.
Киевский инженерно-строительный институт

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ТИПА РАЗМАХА ОТ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

1. Пусть S_n, $n = 0, 1, \ldots$ — невозвратная марковская цепь со счетным множеством состояний E. Для любого $x \in E$ f_x есть последовательность случайных величин (с. в.) $f_x(1)$, $f_x(2), \ldots$ (все f_x по x одинаково распределены и независимы); $r_{x,n}$ — вероятность возвращения цепи S_n, $n \geqslant 0$, $S_0 = x$ в состояние x на промежутке времени $[0, n-1]$ $(r_{x,\infty} = r_x)$. Будем предполагать выполненным условие $r = \sup\{r_x : x \in E\} < 1$.

Ниже будет доказана сформулированная в работе [1] (в иной форме) следующая теорема.

Теорема 1. Если r_{S_n} по вероятности сходится к некоторой с. в. r_∞, $r_{x,n} \to r_x$ $(n \to \infty)$ равномерно по x, для некоторого $p \geqslant 2$

$$\sum_k \mathbf{M}\,|f_x(k)|^p r^k < \infty,$$

то

$$n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\nu_{i,n}) \to (1 - r_\infty) \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{M} f_x(k)]\, r_\infty^{k-1} \; (n \to \infty)$$

по вероятности и в среднем порядка p ($\nu_{i,n}$ — число попаданий цепи S_n в состояние S_i на промежутке времени $[i, n-1]$).

Отметим, что функционал $U_n(f)=\sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\nu_{i,n})$ при $f_x(k)\equiv 0$ $(k>1)$, $f_x(1)\equiv 1$ является размахом цепи.

II. **Лемма 1.** Если $r_{x,n}\to r_x$ $(n\to\infty)$ равномерно по x, то $P\{\nu_{i,i+c}\neq \nu_i\}\to 0$ $(c\to\infty)$ равномерно по i $(\nu_i=\nu_{i,\infty})$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $P\{\nu_{x,c}\neq\nu_x\}\to 0$ $(c\to\infty)$ равномерно по x ($\nu_{x,c}$ — число попаданий цепи S_n, $n\geqslant 0$, $S_0=x$ в x за время c, $\nu_x=\nu_{x,\infty}$). Имеем

$$P\{\nu_{x,c}\neq\nu_x\}\leqslant P\{\nu_{x,c}>A\}+P\{\nu_{x,c}<A,\ \nu_{x,c}\neq\nu_x\}.$$

Поскольку

$$P\{\nu_{x,c}>A\}\leqslant P\{\nu_x>A\}\leqslant\frac{\mathbf{M}\nu_x}{A}=\frac{1}{(1-r_x)A}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(1-r)A}\to 0\ (A\to\infty)$$

равномерно по x, c, то достаточно для любого фиксированного a доказать

$$P\{\nu_{x,c}\neq\nu_x,\nu_{x,c}=a\}\to 0\ (c\to\infty)\tag{1}$$

равномерно по x. Для $a=1$ (1) эквивалентно тому, что $r_x-r_{x,c}\to 0$ $(c\to\infty)$ равномерно по x. Пусть τ_x — с. в., распределенная как время возвращения в x. Имеем (для $a\geqslant 1$)

$$P\{\nu_x\neq\nu_{x,c}=a+1\}=\sum_{i=1}^{c}P\{\tau_x=i\}P\{\nu_x\neq\nu_{x,c-i}=a\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{c/2}P\{\tau_x=i\}P\{\nu_x\neq\nu_{x,c-i}=a\}+r_{x,c}-r_{x,c/2}.\tag{2}$$

Теперь (1) следует из (2) по методу математической индукции.

Лемма 2. Если $\sum_k \mathbf{M}|f_x(k)|^p r^k<\infty$, то с. в. $|f_{S_i}(\nu_{i,n})|^p$, $i=0,1,\dots,n-1$, $n=0,1,\dots$ равномерно интегрируемы.

Замечание. Если условие леммы выполняется для некоторого p_0, то оно выполняется и для всех p, $0<p<p_0$, так как это условие состоит в конечности $\mathbf{M}|f_x(\nu)|^p$, где ν имеет геометрическое распределение с параметром r.

Доказательство. По критерию Валле—Пуссена равномерной интегрируемости [2, с. 29] существует монотонно неубывающая функция $G\geqslant 0$, для которой $t^{-1}G(t)\to\infty$ $(t\to+\infty)$ и $\mathbf{M}G(|f_x(\nu)|^p)<\infty$. Поскольку

$$P\{\nu_{i,n}=k\}\leqslant P\{\nu_{i,\infty}\geqslant k\}=r_{S_i}^{k-1}\leqslant r^{k-1},$$

то

$$\mathbf{M}G(|f_{S_i}(\nu_{i,n})|^p) = \sum_{x,k} \mathbf{M}G(|f_x(k)|^p)\, P\{S_i = x\}\, P\{\nu_{i,n} = k\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \mathbf{M}G(|f_x(k)|^p)\, r^{k-1} = \frac{1}{1-r}\mathbf{M}G(|f_x(\nu)|^p) < \infty,$$

и по упомянутому критерию лемма справедлива.

Лемма 3. Условия

$$\sum_k \mathbf{M}\,|f_x(k) - f_x(k-1)|\, r^k < \infty$$

и

$$\sum_k \mathbf{M}\,|f_x(k)|\, r^k < \infty$$

эквивалентны.

Доказательство.

$$\sum_k \mathbf{M}\,|f_x(k)|\, r^k \leqslant \sum_k \left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{M}\,|f(i) - f(i-1)|\right) r^k =$$

$$= \frac{1}{1-r}\sum_k \mathbf{M}\,|f_x(k) - f_x(k-1)|\, r^k < \infty$$

(в обратную сторону утверждение очевидно).

III. Доказательство теоремы 1. Поскольку

$$\left| n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\nu_{i,n}) \right|^p \leqslant n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} |f_{S_i}(\nu_{i,n})|^p$$

(выпуклость степенной функции при $p \geqslant 1$) и выпуклая оболочка равномерно интегрируемого семейства с. в. равномерно интегрируема, то по лемме 2 и замечанию достаточно доказать сходимость по вероятности при $p = 2$. Пусть

$$f_{S_i}(\nu_{i,i+c}) = a_{i,c};\ a_{i,\infty} = a_i;$$

$$\mathbf{M}\{a_i \mid S_n, n = 0, 1, \ldots, i\} = (1 - r_{S_i}) \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{M}f_x(k)]\, r_{S_i}^{k-1} = a_i'$$

по определению, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение, определяемые обычным образом в пространстве с. в., имеющих второй абсолютный момент.

Обозначим $(1 - r_\infty) \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{M}f_x(k)]\, r_\infty^{k-1}$ через R_∞. Можно записать

$$\|n^{-1}U_n - R_\infty\| = \left\| n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,n-i} - R_\infty \right\| \leqslant \left\| n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i,n-i} - a_i) \right\| +$$

$$+\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i-a_i')\right\|+\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}a_i'-R_\infty\right\|. \qquad (3)$$

Докажем сходимость к 0 каждого слагаемого справа в (3) при $n\to\infty$. Имеем

$$\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}a_i'-R_\infty\right\|=\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}(1-r_{S_i})\sum_{k=1}^{\infty}[\mathbf{M}f_x(k)]\,r_{S_i}^{k-1}-\right.$$

$$\left.-(1-r_\infty)\sum_{k=1}^{\infty}[\mathbf{M}f_x(k)]\,r_\infty^{k-1}\right\|\leqslant\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}(1-r_{S_i})\sum_{k=1}^{N}[\mathbf{M}f_x(k)]\,r_{S_i}^{k-1}-\right.$$

$$\left.-(1-r_\infty)\sum_{k=1}^{N}[\mathbf{M}f_x(k)]\,r_\infty^{k-1}\right\|+\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=N}^{\infty}[\mathbf{M}\,|f_x(k)|]\,r^{k-1}\right\|+$$

$$+\left\|\sum_{k=N}^{\infty}[\mathbf{M}\,|f_x(k)|]\,r^{k-1}\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{N}[\mathbf{M}\,|f_x(k)|]\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}(1-r_{S_i})\,r_{S_i}^{k-1}-\right.$$

$$\left.-(1-r_\infty)\,r_\infty^{k-1}\right\|+2\left\{\sum_{k=N}^{\infty}[\mathbf{M}\,|f_x(k)|]\,r^{k-1}\right\}. \qquad (4)$$

Так как $r_{S_i}\to r_\infty$ по вероятности и $r_{S_i}^k<r^k$, то $\|r_{S_i}^k-r_\infty^k\|\to 0$ $(i\to\infty)$ и, значит, при фиксированном k

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1}n^{-1}(r_{S_i}^{k-1}-r_{S_i}^k)-(r_\infty^{k-1}-r_\infty^k)\right\|\to 0\ \ (n\to\infty).$$

Выражение в фигурных скобках в неравенстве (4) стремится к 0 при $N\to\infty$. Поэтому

$$\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}a_i'-R_\infty\right\|\to 0\ \ (n\to\infty).$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части неравенства (3). Оно меньше, чем

$$\sum_{i=0}^{n-c}\frac{\|a_{i,n-i}-a_i\|}{n-c}\cdot\frac{n-c}{n}+\frac{cM}{n},$$

где $M=\sup\limits_{i,c}\|a_{i,c}-a_i\|<\infty$ (согласно равномерной интегрируемости (лемма 2)).

Чтобы первое слагаемое в правой части неравенства (3) стремилось к 0, достаточно установить, что $\|a_{i,c}-a_i\|\to 0$ $(c\to\infty)$ равномерно по i. Имеем

$$\mathbf{M}(a_{i,c}-a_i)^2=\mathbf{M}\{(a_{i,c}-a_i)^2:\nu_{i,i+c}\neq\nu_i\},$$

так как $a_{i,c}=a_i$ при $\nu_{i,i+c}=\nu_i$. Воспользовавшись леммой 1 и равномерной интегрируемостью, получаем требуемое. Далее,

$$\left\| n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i-a_i')\right\|^2 = n^{-2}\sum_{0\leqslant i,l\leqslant n-1}(a_i-a_i', a_l-a_l')\leqslant$$

$$\leqslant n^{-2}\left[2cnM+2\sum_{i,l:l>c,i+l<n}|(a_i-a_i', a_{i+l}-a_{i+l}')|\right], \qquad (5)$$

где $M=\sup_{i,l}|(a_i-a_i',\ a_l-a_l')|<\infty$ (согласно лемме 2 и известным свойствам равномерно интегрируемых с. в.). Покажем, что

$$\varphi_{i,l}=|(a_i-a_i', a_{i+l}-a_{i+l}')|\to 0\quad (l\to\infty)$$

равномерно по i (из этого и неравенства (5) будет следовать, что $n^{-1}\left\|\sum_{i=0}^{n-1}(a_i-a_i')\right\|\to 0\quad (n\to\infty)$). Очевидно,

$$\varphi_{i,l}\leqslant|(a_{i,l}-a_i', a_{i+l}-a_{i+l}')|+|(a_i-a_{i,l}, a_{i+l}-a_{i+l}')|\leqslant$$

$$\leqslant|\mathbf{M}(a_{i,l}-a_i')(a_{i+l}-a_{i+l}')\chi\{S_i=S_{i+l}\}|+|\mathbf{M}(a_{i,l}-a_i')\times$$

$$\times(a_{i+l}-a_{i+l}')\chi\{S_i\neq S_{i+l}\}|+|\mathbf{M}(a_i-a_{i,l})\times$$

$$\times(a_{i+l}-a_{i+l}')\chi\{\nu_{i,i+l}\neq\nu_i\}|.$$

Второе математическое ожидание равно 0, так как $(a_{i,l}-a_i')$ и $(a_{i+l}-a_{i+l}')$ условно независимы (если известны $S_0,\dots,S_{i+l}$ и $S_i\neq S_{i+l}$) и соответствующее условное математическое ожидание с. в. $(a_{i+l}-a_{i+l}')$ равно 0. Первое и третье математические ожидания стремятся к 0 при $l\to\infty$ равномерно по i из-за равномерной интегрируемости, поскольку

$$P\{S_i=S_{i+l}\}\leqslant P\{\nu_{i,i+l}\neq\nu_i\}\to 0\quad (l\to\infty)$$

равномерно по i (лемма 1). Итак, из неравенства (3) $\|n^{-1}U_n-R_\infty\|\to 0\ \ (n\to\infty)$, поэтому $n^{-1}U_n\to R_\infty$ $(n\to\infty)$ по вероятности. Теорема доказана.

IV. Приведем утверждения для функционалов, близких к рассмотренному.

Теорема 2. Если цепь S_n, $n\geqslant 0$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и для некоторого $p\geqslant 2$

$$\sum_k \mathbf{M}|f_x(k)-f_x(k-1)|^p r^k<\infty,$$

то

$$n^{-1}\sum_x f_x(\theta_{x,n})\to(1-r_\infty)^2\sum_{k=1}^{\infty}[\mathbf{M}f_x(k)]r_\infty^{k-1}\quad (n\to\infty)$$

по вероятности и в среднем порядка p ($\theta_{x,n}$ — число попаданий цепи в состояние x на промежутке времени $[0, n-1]$, $f_x(0)=0$).

Теорема 3. Если цепь S_n удовлетворяет условиям теоремы 1 и для некоторого $p \geqslant 2$

$$\sum_k \mathbf{M} \,|\, k f_x(k) - (k-1) f_x(k-1)|^p r^k < \infty,$$

то

$$n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\eta_{i,n}) \to (1-r_\infty)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\,[\mathbf{M} f_x(k)]\, r_\infty^{k-1} \quad (n \to \infty)$$

по вероятности и в среднем порядка p ($\eta_{i,n}$ — число попаданий цепи S_n в состояние S_i на промежутке времени $[0, n-1]$).

Доказательство теорем 2, 3 следует из теоремы 1, леммы 3 и простых равенств

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\eta_{i,n}) = \sum_x F_x(\theta_{x,n}) \quad (F_x = (f_x(1), 2f_x(2), 3f_x(3), \ldots));$$

$$\sum_x f_x(\theta_{x,n}) = \sum_{i=0}^{n-1} F_{S_i}(\nu_{i,n}) \quad (F_x = (f_x(1), f_x(2) - f_x(1), f_x(3) - {}$$
$$- f_x(2), \ldots)).$$

Приведем также теорему о сходимости по распределению для частного случая рассмотренных выше функционалов.

Пусть ξ_x, $x \in E$ — независимые, не зависящие от цепи S_n, одинаково распределенные с. в. с характеристической функцией (х. ф.) $\varphi(t)$, притягивающейся (без сдвига) к устойчивому закону с х. ф. $\psi(t)$:

$$\varphi^n(t/b_n) \to \psi(t) \quad (n \to \infty,\ b_n > 0). \tag{6}$$

Рассмотрим функционал $\eta_n = \sum\limits_{x \in E_n} \xi_x$, где $E_n = \{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$ — множество состояний, «заметаемое» цепью за время n (это множество состоит из R_n элементов, где R_n — размах цепи).

Теорема 4. Если цепь S_n удовлетворяет условиям теоремы 1 то $b_n^{-1}\eta_n$ сходится по распределению к с. в. с х. ф. $\int\limits_0^r (\psi(t))^{1-x} \times$ $\times\, d\Phi(x)$ ($\Phi(x)$ — функция распределения с. в. r_∞).

Доказательство. Справедливы равенства

$$\varphi_n(t) = \mathbf{M} \exp(itb_n^{-1}\eta_n) = \mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left\{\exp\left(itb_n^{-1}\sum_{x \in E_n} \xi_x\right)\Big|_{S_i},\ i = 0, \ldots, n\right\}\right) =$$

$$= \mathbf{M}\varphi^{R_n}(t/b_n) = \mathbf{M}\,[\varphi^n(t/b_n)]^{R_n/n}.$$

Из теоремы 1 при $f_x(k) = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k>1 \end{cases}$ получаем

$$\frac{R_n}{n} = \frac{U_n(f)}{n} \to 1 - r_\infty \ (n \to \infty) \tag{7}$$

по вероятности. Из (6) и (7) следует, что

$$\varphi_n(t) \to \mathbf{M}\,[\psi(t)]^{1-r_\infty} \quad (n \to \infty),$$

так как х. ф. не превышают 1 по абсолютной величине и $1-r_\infty > 1-r > 0$. При любом $x>0$ $(\psi(t))^x$ есть х. ф. устойчивого распределения. Поэтому и $\mathbf{M}(\psi(t))^{1-r_\infty} = \int\limits_0^r (\psi(t))^{1-x}\, d\Phi(x)$ есть х. ф. Теорема доказана.

Следствие. Если $r_\infty = \mathrm{const}$ (например, если граница цепи состоит из одной точки (r_∞ инвариантна) или цепь S_n является случайным блужданием (тогда условия на поведение $r_{x,n}$ и r_{S_i} излишни)), то предельное распределение $b_n^{-1}\eta_n$ устойчиво.

1. *Филонов Ю. П.* Предельные теоремы для функционалов от невозвратной марковской цепи.— В сб.: Математический анализ и теория вероятностей. Киев, 1978. 2. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы. М., 1973.

Поступила в редколлегию 12.06.79

Yu. P. Filonov

LAW OF LARGE NUMBERS FOR FUNCTIONAL OF RANGE TYPE FOR MARKOV CHAIN

Let S_n — homogeneous Markov chain; $f_x = (f_x(1), f_x(2), \ldots)$ — independent identically distributed random sequences (independent on S_n, $n \geqslant 0$), $\nu_{i,n} = \mathrm{card}\{k : S_k = S_i, i \leqslant k < n\}$. A theorem about **P**-convergence of $n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} f_{S_i}(\nu_{i,n})$ (under some conditions) is proved.