УДК 519.21

Т. АННАЕВ, ст. преп.
Туркменский сельскохозяйственный институт

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ТРАЕКТОРИЯХ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

В настоящей работе изучается один специальный класс случайных процессов с независимыми приращениями, возникающий при рассмотрении многомерных случайных блужданий.

Пусть $\{\alpha_n, \beta_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ — однородный процесс с независимыми приращениями в фазовом пространстве $\{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\} \times R_m$ (R_m — m-мерное арифметическое пространство), $P\{\alpha_0 = \beta_0 = 0\} = 1$, $P\{\alpha_1 < 2\} = 0$. Положим $\tau_k = \inf\{n : \alpha_n = k\}$, $\pi_k = \beta_{\tau_k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Мы будем изучать случайный процесс $\{\tau_k, \pi_k;\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Теорема 1. $\{\tau_k, \pi_k;\ k = 0, 1, 2 \ldots\}$ — однородный процесс с независимыми приращениями.

Доказательство. Пусть $k' < k < k''$ и $\tau_k = k$, $\pi_k = \omega$. Очевидно, что $\alpha_n = k$, $\beta_n = \omega$, $\alpha_{n'} < k$, $n' < n$ и $\tau_{k''}$, $\pi_{k''}(\tau_{k'}, \pi_{k'})$ измеримы относительно α_m, β_m $(0 \leqslant m \leqslant n)$. А это с учетом того, что $\{\alpha_n, \beta_n;\ n = 0, 1, 2 \ldots\}$ — цепь Маркова, означает, что последовательность $\{\tau_k, \pi_k;\ k = 0, 1, 2 \ldots\}$ сама связана в цепь Маркова. Пусть

$$P\{\tau_{k_1} = n,\ \pi_{k_1} \in A / \tau_k = m,\ \pi_k = \omega\} = P(k, m, \omega; k_1, n, A)$$

$(k_1 > k,\ n > m,\ \omega \in R_m\ A$ — борелевское множество из $R_m)$. Имеем

$$P(k, m, \omega; k_1, n, A) = P\{\alpha_n = k_1,\ \pi_n \in A;\ \alpha_{n'} < k_1,\ n' < n / \alpha_m =$$

$$= k \pi_m = \omega;\ \alpha_{m'} < k,\ m' < m\} = P\{\alpha_n = k_1,\ \pi_n \in A;\ \alpha_{n'} < k_1,$$

$$m < n' < n / \alpha_m = k,\ \pi_m = \omega;\ \alpha_{m'} < k,\ m' < m\}.$$

Учитывая, что процесс $\{\alpha_n, \beta_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ является однородной цепью Маркова, получаем

$$P(k, m, \omega; k_1, n, A) = P\{\alpha_n = k_1, \pi_n \in A; \alpha_{n'} < k_1,\ m < n' < n / \alpha_m = k,$$

$$\pi_m = \omega\} = P\{\alpha_{n-m} = k_1,\ \pi_{n-m} \in A;\ \alpha_{n'} < k_1,\ 0 < n' < n - m / \alpha_0 = k,$$

$$\pi_0 = \omega\}.$$

Наконец, воспользовавшись однородностью $\{\alpha_n, \beta_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ по пространству состояний, находим

$$P(k, m, \omega; k_1, n, A) = P\{\alpha_{n-m} = k_1 - k, \pi_{n-m} \in \alpha_{-\omega};\ \alpha_{n'} < k_1 - k_1,$$

$$0 < n' < n - m\}$$

или

$$P(k, m, \omega; k_1, n, A) = P(0, 0, \omega; k_1 - k, n - m, A_{-\omega}), \tag{1}$$

где $A_{-\omega} = \{v \in R_m : v + \omega \in A\}$.

Из (1) делаем вывод, что цепь Маркова $\{\tau_k, \pi_k;\ k = 0, 1, 2 \ldots\}$ однородна как по времени, так и по пространству состояний, т. е. является однородным процессом с независимыми приращениями.

Замечание. $\{\tau_k, \pi_k;\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ — «обобщенный» процесс с независимыми приращениями $\Sigma_{n=k}^{\infty} P\{\tau_k = n, \quad \pi_k \in R_m\} = 1 - P\{(\tau_k, \pi_k) = \infty\} = 1$. Этот процесс становится обычным процессом с независимыми приращениями тогда и только тогда, когда $M_{\alpha_1} \geqslant 0$ [1].

Введем следующие обозначения: $M\theta^{\alpha_1} e^{i(\lambda, \beta_1)} = \varphi(\theta, \lambda)$, $M(\theta^{\tau_1} e^{i(\lambda, \pi_1)}; \tau_1 < \infty) = x(\theta, \lambda)$ $(|\theta| \leqslant 1, \operatorname{Im}\lambda = 0)$.

Теорема 2.

$$M(\theta^{\tau_k} e^{i(\lambda, \pi_k)}; \tau_k < \infty) = x^k(\theta, \lambda) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

и

$$\varphi(1/x(\theta, \lambda), \lambda) \equiv 1/\theta \quad (0 < |\theta| < 1, \operatorname{Im}\lambda = 0). \tag{3}$$

Доказательство. Равенство (2) следует из теоремы 1. Перейдем к обоснованию тождества (3). Пусть $\alpha_1 = k$, $\beta_1 = \omega$ $(k < 2, \omega \in R_m)$. Тогда условное распределение τ_1, π_1 совпадает с распределением $1 - \tau_{1-k}$, $\omega + \pi_{1-k}$ и

$$M(\theta^{\tau_1} e^{i(\lambda, \pi_1)}, \tau_1 < \infty) = \theta \Sigma_{k=-\infty}^{1} M(e^{i(\lambda, \beta_1)}; \alpha_1 = k) \times$$

$$\times M(\theta^{\tau_{1-k}} e^{i(\lambda, \pi_{1-k})}; \tau_{1-k} < \infty).$$

Так как $M(\theta^{\tau_{1-k}} e^{i(\lambda, \pi_{1-k}}; \tau_{1-k} < \infty) = x^{1-k}(\theta, \lambda)$ и $\Sigma_{k=-\infty}^{1} \theta^k \times M(e^{i(\lambda, \beta_1)}, \alpha_1 = k) = \varphi(\theta, \lambda)$, то $x(\theta, \lambda) = \theta \Sigma_{k=-\infty}^{1} M(e^{i(\lambda, \beta_1)}, \alpha_1 = k) \times x^{1-k}(\theta, \lambda)$, т. е. $1 = \theta \Sigma_{k=-\infty}^{1} x^{-k}(\theta, \lambda) M(e^{i(\lambda, \beta_1)}, \alpha_1 = k)$, что совпадает с (3). Теорема доказана.

Отметим, что $x(\theta, \lambda)$ однозначно определяется соотношением (3). Действительно, достаточно убедиться, что для каждого вещественного λ и $|\theta| < 1$ уравнение $\theta\varphi(x, \lambda) = 1$ имеет один и только один корень в круге $|x| < 1$, а это тривиально следует из теоремы Руше [2] и из неравенства

$$|\theta| \Sigma_{k=-\infty}^{1} |M(e^{i(\lambda, \beta_1)}, \alpha_1 = k)| \leqslant |\theta| < 1.$$

Если $\lambda = 0$, то этот корень вещественный и совпадает с $M(\theta^{\tau_1}, \tau_1 < \infty)$.

Теорема 3. $M(e^{i(\lambda, \pi_k)}, \tau_k = n) = (k/n) M(e^{i(\lambda, \beta_n)}, \alpha_n = k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Согласно теореме 2

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} z^n M\theta^{\alpha_n} e^{i(\lambda, \beta_n)} = \Sigma_{n=0}^{\infty} z^n \varphi^n(\theta, \lambda) = 1/[1 - z\varphi(\theta, \lambda)] =$$

$$= (1/z)\, 1/[\varphi(x^{-1}(\lambda, z), \lambda) - \varphi(\theta, \lambda)]$$

и поэтому

$$1/[\varphi(x^{-1}(z,\lambda),\lambda)-\varphi(\theta,\lambda)] = z\Sigma_k\theta^k\mu_k(z,\lambda), \qquad (4)$$

где $\mu_k(z,\lambda) = \Sigma_{n=0}^{\infty} z^n M(\alpha_n = k,\ e^{i(\beta_n,\lambda)})$.

Пусть $k>0$. Так как $\alpha_n - \alpha_{n-1} < 2$, $n \geqslant 1$, то $\{\alpha_n = k, \beta_n \in A\} = \Sigma_{m=0}^{n}\{\tau_k = m,\ \alpha_n - \alpha_m = 0,\ \pi_k + \beta_n - \beta_m \in A\}$ и (см. [2]) $\mu_k(z,\lambda) = x^k(z,\lambda)\mu_0(z,\lambda)$, что вместе с (3), (4) приводит к равенству

$$1/(\varphi(x^{-1}(z,\lambda),\lambda)-\varphi(\theta,\lambda)) = z\Sigma_{k<0}\theta^k\mu_k(z,\lambda) + z\mu_0(z,\lambda)/$$
$$/(1-\theta x(z,\lambda))(1<|\theta|<1/|x(z,\lambda)|). \qquad (5)$$

Умножая обе части (5) на $1-\theta x(z,\lambda)(\theta\to 1/x(z,\lambda))$, получаем $x(z,\lambda)/\varphi_0'(x^{-1}(z,\lambda),\lambda) = z\mu_0(z,\lambda)$ или с учетом (3) $\varphi_0'(x^{-1}(z,\lambda),\lambda)\times$ $\times x_z'(z,\lambda)/x^2(z,\lambda) = 1/z^2$; $\mu_0(z,\lambda) = z\,x_z'(z,\lambda)/x(z,\lambda)$. Отсюда

$$\mu_k(z,\lambda) = zx^{k-1}(z,\lambda)\,x_z'(z,\lambda) = (z/k)\,D/Dtx^k(z,\lambda) =$$
$$= (1/k)\,\Sigma_n nz^n\,M(e^{i(\lambda,\pi_k)},\ \tau_k = n).$$

Этим доказана теорема 3, очевидным образом обобщающая известное [3] равенство $P\{\tau_k = n\} = (k/n)\{\alpha_n = k\}$.

Следствие.

$$P\{\tau_k = n,\ \pi_k \in A\} = (k/n)\,P\{\alpha_n = k,\ \beta_n \in A\}.$$

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М., 1969. 2. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1957. 3. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., 1972.

Поступила в редколлегию 14.05.79

T. Annaev

ON A CLASS OF BOUNDARY FUNCTIONALS ON THE TRAJECTORIES OF MULTIDIMENSIONAL RANDOM WALKS

An explicit expression is obtained for distribution of main boundary functionals on the trajectories of multidimensional random walks by means of distribution of the process values at the fixed moments of time.

УДК 519.21

А. БЕНМАЛЕК, асп.
Киевский университет

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ

В настоящей работе приводятся условия непрерывности выборочных функций однородных случайных полей, использующие понятие монотонизации отклонения, порожденного этими полями.

Случайное поле $X(x)$, $x \in R^n$, называется однородным [1], ес-