и поэтому

$$1/[\varphi(x^{-1}(z,\lambda),\lambda)-\varphi(\theta,\lambda)] = z\Sigma_k\theta^k\mu_k(z,\lambda), \tag{4}$$

где $\mu_k(z,\lambda) = \Sigma_{n=0}^{\infty} z^n M(\alpha_n = k,\ e^{i(\beta_n,\lambda)})$.

Пусть $k>0$. Так как $\alpha_n - \alpha_{n-1} < 2$, $n \geqslant 1$, то $\{\alpha_n = k, \beta_n \in A\} = \Sigma_{m=0}^{n}\{\tau_k = m,\ \alpha_n - \alpha_m = 0,\ \pi_k + \beta_n - \beta_m \in A\}$ и (см. [2]) $\mu_k(z,\lambda) = x^k(z,\lambda)\mu_0(z,\lambda)$, что вместе с (3), (4) приводит к равенству

$$1/(\varphi(x^{-1}(z,\lambda),\lambda)-\varphi(\theta,\lambda)) = z\Sigma_{k<0}\theta^k\mu_k(z,\lambda) + z\mu_0(z,\lambda)/$$
$$/(1-\theta x(z,\lambda))(1<|\theta|<1/|x(z,\lambda)|). \tag{5}$$

Умножая обе части (5) на $1-\theta x(z,\lambda)(\theta \to 1/x(z,\lambda))$, получаем $x(z,\lambda)/\varphi_0'(x^{-1}(z,\lambda),\lambda) = z\mu_0(z,\lambda)$ или с учетом (3) $\varphi_0'(x^{-1}(z,\lambda),\lambda)\times$ $\times x_z'(z,\lambda)/x^2(z,\lambda) = 1/z^2$; $\mu_0(z,\lambda) = z\,x_z'(z,\lambda)/x(z,\lambda)$. Отсюда

$$\mu_k(z,\lambda) = zx^{k-1}(z,\lambda)\,x_z'(z,\lambda) = (z/k)\,D/Dtx^k(z,\lambda) =$$

$$= (1/k)\,\Sigma_n nz^n M(e^{i(\lambda,\pi_k)},\ \tau_k = n).$$

Этим доказана теорема 3, очевидным образом обобщающая известное [3] равенство $P\{\tau_k = n\} = (k/n)\{\alpha_n = k\}$.

Следствие.

$$P\{\tau_k = n,\ \pi_k \in A\} = (k/n)\,P\{\alpha_n = k,\ \beta_n \in A\}.$$

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М., 1969. 2. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1957. 3. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., 1972.

Поступила в редколлегию 14.05.79

T. Annaev

ON A CLASS OF BOUNDARY FUNCTIONALS ON THE TRAJECTORIES OF MULTIDIMENSIONAL RANDOM WALKS

An explicit expression is obtained for distribution of main boundary functionals on the trajectories of multidimensional random walks by means of distribution of the process values at the fixed moments of time.

УДК 519.21

А. БЕНМАЛЕК, асп.
Киевский университет

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ

В настоящей работе приводятся условия непрерывности выборочных функций однородных случайных полей, использующие понятие монотонизации отклонения, порожденного этими полями.

Случайное поле $X(x)$, $x \in R^n$, называется однородным [1], если его корреляционная функция $B(x, y) = MX(x)\overline{X(y)}$ зависит только от разности векторов $x - y$.

I. Необходимое и достаточное условие непрерывности в терминах энтропии. При изучении гауссовской случайной функции $X = (X_t, t \in T)$ часто будет использоваться функция d, определенная на множестве $T \times T$, $d(\Delta, t) = \{M|X(t + \Delta) - X(t)|^2\}^{1/2}$. Эта функция удовлетворяет неравенству треугольника. Расстоянием в T $d(\Delta, t)$ будет не всегда. Функцию $d(\Delta, t)$ называют отклонением, порожденным функцией X на пространстве T [2].

Пусть C — подмножество метрического пространства (T, d). Обозначим через $N(C, \varepsilon)$ такое наименьшее целое число n, при котором существуют множества $A_1, \ldots, A_n$, $C \subset \bigcup A_j$, причем для каждого j и всех $x, y \in A_j$ выполнено неравенство $d(x, y) \leqslant 2\varepsilon$. Величину $H(C, \varepsilon) = \log N(C, \varepsilon)$ называют метрической энтропией множества C [1].

Теорема 1. Пусть T — компактное подпространство пространства R^n, X — гауссовская случайная сепарабельная однородная функция на T со средним 0 и непрерывной ковариацией. Для того чтобы функция X была почти наверное (п. н.) непрерывной в T, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0 H^{1/2}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty, \tag{1}$$

где $H(\varepsilon)$ — метрическая энтропия множества T.

Доказательство. 1. Условие (1) достаточно для выборочной непрерывности п. н. всех гауссовских процессов [2].

2. В работе [3] показано, что (1) — необходимое и достаточное условие выборочной непрерывности гауссовских однородных и изотропных полей. Доказательство Ферника [3] в нашем случае остается справедливым из-за конгруэнтности сдвига шаров, определяемых отклонением, порожденным X, так как сдвиг $T(x - y)$ вектора $x - y$ преобразовывает d-шар $B(y, r)$ в $B(x, r)$, где $x, y \in R^n$.

II. Необходимое и достаточное условие непрерывности в терминах корреляционной функции. Нам понадобится следующая лемма [4, 5].

Лемма. Пусть функции F и g удовлетворяют условиям: $F(x)$ убывает при $x \downarrow 0$ и $\sup\{x : F(x) > y\} \leqslant g(y) \leqslant \inf\{x : F(x) < y\}$.

Тогда $\int_0 F(u)\, du < \infty \Leftrightarrow \int^{\infty} g(u)\, du < \infty$.

Теорема 2. Пусть $X(t)$, $t \in [0, 1]^n$ — однородное сепарабельное гауссовское стохастически непрерывное случайное поле со средним 0, такое, что $M(X(t + h) - X(t))^2 = \sigma^2(h)$, $\sigma^2(h)$ — строго неубывающая функция в следующем смысле: $h, g \in R^n$, $h < g \Rightarrow \sigma^2(h) < \sigma^2(g)$, где $h < g$ $(h = (h_1, \ldots, h_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n))$ обозначает, что $h_i \leqslant g_i$, $i = \overline{1, n}$ и существует i такое, что $h_i < g_i$. Тогда условие

$$\int_0 \sigma(u, \ldots, u)/(u(\log 1/u)^{1/2})\,du < \infty \qquad (2)$$

является необходимым и достаточным для п. н. выборочной непрерывности поля $X(t)$.

Доказательство. 1. На множестве $[0, h]^n$ определим функцию σ^* соотношением $\sigma^*(x) = \sigma(x, \ldots, x)$. Поскольку $\sigma^*(x)$ строго неубывающая в $[0, 1]$, существует обратная функция φ от $\sigma^*(x)$ в $[0, 1]$.

Пусть $\varepsilon < \sigma^*(1)$ и $h = \varphi(\varepsilon)$. Тогда $u \leqslant (h, \ldots, h)$, $u \in [0, h]^n$, $\{M(X(0) - X(u))^2\}^{1/2} = \sigma(u) \leqslant \sigma^*(h) = \varepsilon$, т. е. куб $[0, h]^n$ покрыт d-шаром $B(0, \varepsilon)$.

2. Пусть $T(\nu)$ — сдвиг вектора $\nu = (h, 0, \ldots, 0)$. Тогда $u \in T(\nu) \times \times [0, h]^n = [h, 2h] \times [0, h)^{n-1} \Rightarrow u \in T(\nu) B(0, \varepsilon) = B(\nu, \varepsilon)$, т. е. куб $[h, 2h] \times [0, h]^{n-1}$ покрыт d-шаром $B(\nu, \varepsilon)$. Отсюда следует, что $[0, 1] \times [0, h]^{n-1}$ покрыто $\{[1/h] + 1\}$ d-шарами радиуса ε и не покрыто $[1/h]/4$ d-шарами радиуса ε ($[x]$ — целая часть числа x).

3. Множество $[0, 1]^n$ покрыто $\{[1/h] + 1\}^n$ d-шарами радиуса ε и не покрыто $\{[1/h]/4\}^n$ d-шарами радиуса ε. Если $N(\varepsilon)$ — минимальное число d-шаров радиуса ε, покрывающих $[0, 1]^n$, то $\{[1/h]/ /4\}^n < N(\varepsilon) \leqslant \{[1/h] + 1\}^n$, т. е. $N^{1/n}(\varepsilon)$ — величина, сравниваемая с $1/h$, значит, $\log N(\varepsilon)$ сравним с $n \log 1/\varphi(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\int_0 \{\log N(\varepsilon)\}^{1/2} d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_0 \{n \log(1/\varphi(\varepsilon))\}^{1/2} d\varepsilon < \infty.$$

Используя лемму, получаем

$$\int_0 H^{1/2}(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int^\infty \sigma^*(\exp(-y^2))\,dy < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0 \sigma^*(u)/(u^2 \log 1/u)^{1/2} du < \infty.$$

Доказательство завершено.

Теорема 3. Пусть $X(t)$, $t \in [-2, 2]^n$ — гауссовское сепарабельное стохастически непрерывное со средним 0 однородное случайное поле такое, что $M(X(t + h) - X(t))^2 = \sigma^2(n)$.

Тогда необходимым и достаточным для п. н. выборочной непрерывности поля $X(t)$, $t \in [-1, 1]^n$ является условие

$$\int_0 \bar{\sigma}(u)/u(\log(1/u))^{1/2} du < \infty.$$

Здесь $\bar{\sigma}(u)$ — монотонизация функции σ, определяемая соотношениями $m(y) = \lambda\{h \in [-1, 1]^n : d(0, h) < y\}$, $\bar{\sigma}(u) = \sup\{y : m(y) < u\}$

где λ — мера Лебега на R^n, d — отклонение, порожденное полем $X(t)$, т. е. $d(x, y) = \sigma(x-y)$.

При доказательстве теоремы использованы методы работы [4].

Следствие 1. Пусть $X(t)$, $t \in [-2, 2]^n$, $Z(t)$, $t \in [-2, 2]^n$ — гауссовские сепарабельные стохастически непрерывные со средним 0 однородные поля такие, что $\sigma(h) \leqslant \psi(h)$, $h \in [-1, 1]^n$, где $\sigma^2(h) = M(X(t+h) - X(t))^2$, $\psi^2(h) = M(Z(t+h) - Z(t))^2$. Если $Z(t)$, $t \in [-1, 1]^n$ п. н. выборочно непрерывно, то $X(t)$, $t \in [-1, 1]^n$ также п. н. выборочно непрерывно.

Доказательство. Покажем, что $\bar{\sigma}(u) \leqslant \bar{\psi}(u)$, где $\bar{\sigma}$, $\bar{\psi}$ — монотонизации функций σ и ψ. Пусть $h \in [-1, 1]^n$. Тогда $\psi(h) \leqslant y \Rightarrow \sigma(h) \leqslant y$, следовательно, $m_\psi(y) = \lambda\{h : \psi(h) \leqslant y\} \leqslant m_\sigma(y) = \lambda\{h : \sigma(h) \leqslant y\}$, поэтому $\bar{\sigma}(u) \leqslant \bar{\psi}(u)$. Поскольку $Z(t)$, $t \in [-1, 1]^n$ п. н. непрерывно, то

$$\int_0 \bar{\psi}(u)/u\,(\log 1/u)^{1/2} du < \infty,$$

значит,

$$\int_0 \bar{\sigma}(u)/u\,(\log 1/u)^{1/2} du < \infty,$$

т. е. $X(t)$, $t \in [-1, 1]^n$ п. н. выборочно непрерывно.

III. Достаточное условие дифференцируемости по направлению.

Теорема 4. Пусть $X(t)$, $t \in [-2, 2]^n$ — действительное однородное сепарабельное стохастически непрерывное гауссовское поле со средним 0 и $\sigma^2(h) = M(X(t+h) - X(t))^2$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$ для некоторого i, функции σ, $\partial\sigma/\partial h_i$, $\partial^2\sigma/\partial h_i^2$ существуют и непрерывны в точке 0.

Тогда для того чтобы с вероятностью 1 существовала выборочно непрерывная производная $\partial x/\partial t_i$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0 \bar{\sigma}^*(u)/u\,(\log 1/u)^{1/2} du < \infty,$$

где $\bar{\sigma}^*$ — монотонизация функции σ^* на $[-1, 1]^n$,

$$\sigma^{*2}(h) = 2\{(\partial\sigma/\partial h_i(0))^2 + \sigma(0)\,\partial^2\sigma/\partial h_i^2(0) - (\partial\sigma/\partial h_i(h))^2 - \\ - \sigma(h)\,\partial^2\sigma/\partial h_i^2(h).$$

Если предыдущие условия выполнены для всех i, $i = \overline{1, n}$, то $X(t)$, $t \in [-1, 1]^n$ имеет п. н. непрерывную производную по любому направлению.

Доказательство. Пусть $B(u, t) = M(X(u)X(t))$. Тогда $B(u, t) = B(0, 0) - 0{,}5\sigma^2(u-t)$, следовательно,

$$\partial^2 B(u, t)/\partial u_i \partial t_i = 0{,}5\partial^2(\sigma^2)/\partial u_i^2(u-t) = [\partial\sigma/\partial h_i(u-t)]^2 + \\ + \sigma(u-t)\,\partial^2\sigma/\partial h_i^2(u-t),$$

поэтому $\partial^2 B(u,t)\,\partial u_i \partial t_i$ непрерывна в точке 0 и $Y_i = \partial X/\partial t_i$ существует в среднем квадратичном. Пусть $\sigma^{*2}(u-t) = M\{Y_i(u) - Y_i(t)\}^2$.

Очевидно, что $\sigma^{*2}(h) = 2\{(\partial\sigma/\partial h_i(0))^2 + \sigma(0)\,\partial^2\sigma/\partial h_i(0) - (\partial\sigma/\partial h_i(h))^2 - \sigma(h)\,\partial^2\sigma/\partial h_i^2(h)\}$.

В силу теоремы Гладкой [6] условие теоремы 4

$$\int\limits_0 \sigma^*(u)/u(\log 1/u)^{1/2}du < \infty \tag{3}$$

достаточно для того, чтобы поле $X(t)$, $t \in [-1, 1]^n$ обладало с вероятностью единица непрерывной частной производной $\partial x(t)/\partial t_i$. С другой стороны, это же условие является необходимым и достаточным условием выборочной непрерывности случайного процесса $Y_i(t)$. Следовательно, если (3) не выполнено, то процесс $Y_i(t)$, а значит и $\partial X(t)/\partial t_j$ не может быть непрерывным.

Следствие 2. Пусть $X(t)$ и $Y(t)$, $t \in [-2, 2]^n$ — действительные однородные сепарабельные стохастически непрерывные гауссовские поля со средним 0. Предполагаем, что $\partial X(t)/\partial t_i$ и $\partial Y(t)/\partial t_i$, $t \in [-1,1]^n$ существуют в среднем квадратичном, $\sigma^*(h) \leqslant \psi^*(h)$, где $\sigma^{*2}(h) = M[\partial X/\partial t_i(t+h) - \partial X/\partial t_i(t)]^2$, $\psi^{*2}(h) = M[\partial Y/\partial t_i(t+h) - \partial Y/\partial t_i(t)]^2$.

Если существует п. н. выборочно непрерывная производная $\partial Y(t)/\partial t_i$, $t \in [-1,1]^n$ в обыкновенном смысле, то $x(t)$, $t \in [-1,1]^n$ имеет тоже п. н. непрерывную производную в обыкновенном смысле.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Ю. В. Козаченко за ценные советы.

1. *Козаченко Ю. В., Ядренко М. И.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1975, вып. 14. 2. *Dudley R. M.* Sample functions of the gaussian process.— The Ann. of Probab., 1973, 1, N 1. 3. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes.— In: Lectures Notes in Math., vol. 480. Berlin, 1975. 4. *Jain N. C., Marcus M. B.* Sufficient conditions for the continuity of stationary gaussian processes and applications to random series of functions.— Ann. Inst. Fourier, 1974, 24, 2. 5. *Boas R. P. Jr., Marcus M. B.* Inequalities involving a function and its inverse.— SIAM J. Math. Analysis, 1973, 4. 6. *Гладкая О. Н.* Условия дифференцируемости по направлению выборочных функций случайных полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1977, вып. 17.

Поступила в редколлегию 21.12.79

A. Benmalek

CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY OF SAMPLE FUNCTIONS OF HOMOGENEOUS GAUSSIAN FIELDS

Necessary and sufficient conditions of sample continuity of homogeneous gaussian fields with probability one are considered in terms of entropy and non-decreasing rearrangement of $\sigma^2(h) = M(X(t+h) - X(t))^2$. Sufficient conditions of sample continuity and differentiability are deduced.