УДК 519.21

С. П. ВОВК, студ.
Киевский университет

ОБ ОДНОРОДНЫХ И ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЯХ

Одной из важных задач теории случайных полей является описание и изучение классов полей, обладающих теми или иными свойствами инвариантности. В настоящей статье вводится понятие однородного и лоренц-инвариантного обобщенного случайного поля и рассматриваются некоторые вопросы спектральной теории таких полей.

Пусть $K = K(R^{n+1})$, $n \geqslant 1$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $x \in R^{n+1}$ с топологией Л. Шварца. Будем говорить, что задан случайный функционал ξ в K, если задано отображение $\xi(\varphi, \omega): K \times \Omega \to C^1$, где $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — фиксированное вероятностное пространство, и при всех $\varphi \in K$ $\xi(\varphi, \omega)$ $\mathfrak{A}$-измеримо.

Всякий непрерывный в среднем квадратическом линейный случайный функционал в пространстве K называется обобщенным случайным полем. Среднее значение $m(\varphi)$ и корреляционный функционал $B(\varphi, \psi)$ поля $\xi(\varphi)$ определяются следующим образом: $m(\varphi) = \mathbf{M}\xi(\varphi)$; $B(\varphi, \psi) = \mathbf{M}\xi(\varphi)\overline{\xi(\psi)}$, $\varphi, \psi \in K$.

Пусть G — некоторая группа преобразований пространства R^{n+1}. Обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$ называется G-инвариантным (в широком смысле), если для всех $g \in G$ справедливы равенства $m(\varphi) = m(\varphi_g)$, $B(\varphi, \psi) = B(\varphi_g, \psi_g)$, где по определению $\varphi_g(x) = \varphi(g^{-1}x)$.

Пусть T — группа трансляций пространства R^{n+1}. Обобщенное случайное поле называется однородным, если оно T-инвариантно.

Хорошо известно [1], что среднее значение и корреляционный функционал однородного обобщенного случайного поля могут быть представлены следующим образом:

$$m(\varphi) = m\tilde{\varphi}(0); \tag{1}$$

$$B(\varphi, \psi) = \int_{R^{n+1}} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)} F(d\lambda), \tag{2}$$

где m — некоторая константа (в дальнейшем будем полагать ее равной нулю), $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, F — полиномиально ограниченная мера в R^{n+1}. Равенство (2) называется спектральным представлением корреляционного функционала однородного обобщенного случайного поля, а мера F — спектральной мерой поля.

Нам понадобится следующее обобщение известной теоремы Карунена.

Теорема 1. Пусть $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной мерой μ, $H_\varphi(\lambda)$, $\varphi \in K$ — семейство комплекснозначных $\mathfrak{S}$-измеримых функций. Предположим, что для всех $\varphi \in K$ $H_\varphi(\lambda) \in L_2(X, \mu)$. Для того чтобы обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$ допускало представление

$$\xi(\varphi) = \int_X H_\varphi(\lambda)\, Z(d\lambda),$$

где $Z(\cdot)$ — ортогональная случайная мера, подчиненная μ, необходимо и достаточно, чтобы корреляционный функционал имел вид

$$B(\varphi, \psi) = \int_X H_\varphi(\lambda)\, \overline{H_\psi(\lambda)}\, \mu(d\lambda).$$

Спектральное представление корреляционного функционала однородного и лоренц-инвариантного обобщенного случайного поля. Введем в пространство R^{n+1} билинейную форму

$$[x, y] = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n, \tag{3}$$

где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.

Вещественные невырожденные однородные линейные преобразования $\tilde{x} = \Lambda x$, сохраняющие форму (3), образуют группу L, называемую однородной группой Лоренца.

Определим замкнутый верхний конус $\overline{V}_+$ следующим образом: $\overline{V}_+ = \{0\} \cup \{x \mid [x, x] > 0,\ x_0 > 0\}$.

Будем отождествлять преобразования $\Lambda \in L$ с соответствующими им в некотором фиксированном ортонормированном базисе пространства R^{n+1} матрицами. Подгруппа группы L, состоящая из преобразований Λ, оставляющих инвариантным $\overline{V}_+$ и таких, что $\det\Lambda = 1$, называется собственной ортохронной группой Лоренца $L_+^\uparrow$ [2].

Обобщенное случайное поле назовем однородным и лоренц-инвариантным, если оно однородно и $L_+^\uparrow$-инвариантно.

Лемма. Пусть $\xi(\varphi)$ — однородное и лоренц-инвариантное обобщенное случайное поле. Тогда спектральная мера F является $L_+^\uparrow$-инвариантной, т. е. для всех $\Lambda \in L_+^\uparrow$ и для любого борелевского в R^{n+1} множества S выполнено равенство $F(\Lambda S) = F(S)$. Обратно, если F $L_+^\uparrow$-инвариантна, то $\xi(\varphi)$ однородно и лоренц-инвариантно.

Доказательство. Так как поле $\xi(\varphi)$ однородно, его корреляционный функционал имеет вид (2). Поскольку $\xi(\varphi)$ лоренц-инвариантно, то $B(\varphi, \psi) = B(\varphi_\Lambda, \psi_\Lambda)$ для всех $\Lambda \in L_+^\uparrow$.

Пусть Q — матрица такая, что $[x, y] = (Qx, y)$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в R^{n+1}. Очевидно, что $Q^{-1} = Q$.

Пусть $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Из условия сохранения формы (3) следует соотношение $\Lambda' = Q\Lambda^{-1}Q$, где Λ' — транспонированная матрица. Очевидно,

$$\tilde{\varphi}_{\Lambda}(\lambda) = \int\limits_{R^{n+1}} e^{i(\lambda, x)} \varphi(\Lambda^{-1}x)\,dx = \int\limits_{R^{n+1}} e^{i(\lambda, \Lambda x)} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{R^{n+1}} e^{i(\Lambda'\lambda, x)} \varphi(x)\,dx = \tilde{\varphi}(\Lambda'\lambda) = \tilde{\varphi}(Q\Lambda^{-1}Q\lambda).$$

Поэтому $B(\varphi_{\Lambda}, \psi_{\Lambda}) = \int\limits_{R^{n+1}} \tilde{\varphi}(Q\Lambda^{-1}Q\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(Q\Lambda^{-1}Q\lambda)}\,F(d\lambda)$. Из условия $B(\varphi, \psi) = B(\varphi_{\Lambda}, \psi_{\Lambda})$ следует, что

$$\int\limits_{R^{n+1}} \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,F(d\lambda) = \int\limits_{R^{n+1}} \tilde{\varphi}(Q\Lambda^{-1}Q\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(Q\Lambda^{-1}Q\lambda)}\,F(d\lambda).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{R^{n+1}} \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,dF(\lambda) = \int\limits_{R^{n+1}} \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,dF(Q\Lambda Q\lambda).$$

Так как спектральная мера F однозначно определяется (при условии ее непрерывности слева, что мы будем в дальнейшем предполагать выполненным) полем $\xi(\varphi)$, то из последнего равенства следует, что $F(S) = F(Q\Lambda QS)$ для любого борелевского множества S. Очевидно, если $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$, то $Q\Lambda Q = \Lambda_1$ также принадлежит $L_{+}^{\uparrow}$. Когда Λ пробегает $L_{+}^{\uparrow}$, Λ_1 также пробегает $L_{+}^{\uparrow}$, что и доказывает первую часть леммы. Столь же просто устанавливается справедливость обратного утверждения.

Теорема 2. Пусть $\xi(\varphi)$ — однородное и лоренц-инвариантное обобщенное случайное поле. Предположим, что спектральная мера F сосредоточена в замкнутом верхнем конусе $\overline{V}_{+}$. Тогда корреляционный функционал поля $\xi(\varphi)$ имеет вид

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi)^{n/2} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \tilde{\varphi}_0(m\,\mathrm{ch}\,t, x') \times$$

$$\times \overline{\tilde{\psi}_0(m\,\mathrm{ch}\,t, y')}\, \frac{J_{(n-2)/2}(m\,\mathrm{sh}\,t\,|x'-y'|)}{(m\,\mathrm{sh}\,t\,|x'-y'|)^{(n-2)/2}}\,(m\,\mathrm{sh}\,t)^{n-1}\,dx'dy'dt\,d\rho(m) + \quad (4)$$

$$+ c\tilde{\varphi}(0)\,\overline{\tilde{\psi}(0)},$$

где ρ — полиномиально ограниченная мера на $[0, \infty)$, $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν, $c \geqslant 0$ — константа, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $|x'-y'|$ — евклидово расстояние между точками x' и y' из R^n, $\tilde{\varphi}_0(\alpha, x') \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x_0}\varphi(x)\,dx_0$.

Доказательство. Так как поле $\xi(\varphi)$ однородно, его корреляционный функционал имеет вид (2), причем мера F полиномиально ограничена. Поскольку $\xi(\varphi)$ лоренц-инвариантно, то по доказанной лемме спектральная мера F является $L_+^\uparrow$-инвариантной. Пусть $H_m \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{x \mid [x, x] = m^2 \geqslant 0, \quad x_0 > 0\}$; $\overline{V}_+ = \{0\} \cup \left(\bigcup\limits_{m \geqslant 0} H_m\right)$.

Определим гомеоморфизм $\pi_m : H_m \to R^n$ (а при $m = 0$ $\pi_0 : H_0 \to R^n \setminus \{0\}$) следующим образом: $\pi_m : x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \to x' = (x_1, \ldots, x_n)$. Для любого измеримого множества A из H_m положим

$$N_m(A) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\pi_m(A)} (m^2 + |x'|^2)^{-1/2}\,dx';$$

мера N_m $L_+^\uparrow$-инвариантна [3]. Поскольку спектральная мера F полиномиально ограничена и $L_+^\uparrow$-инвариантна и по условию теоремы сосредоточена в $\overline{V}_+$, то согласно [3] существуют такая полиномиально ограниченная мера ρ на $[0, \infty)$ и константа c, что для любой функции f из пространства Шварца быстро убывающих функций справедливо равенство

$$\int\limits_{R^{n+1}} f\,dF = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{H_m} f\,dN_m\right) d\rho(m) + cf(0).$$

Используя это представление, преобразуем (2):

$$B(\varphi, \psi) = \int\limits_{R^{n+1}} \tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,F(d\lambda) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{R^n} (m^2 + |\lambda'|^2)^{-1/2}\tilde{\varphi}(\lambda)\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,d\lambda'\right) d\rho(m) +$$

$$+ c\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}(0)} = \int\limits_0^\infty \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^{n+1}} \int\limits_{R^{n+1}} (m^2 + |\lambda'|^2)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\{i(\lambda_0(x_0 - y_0) + (\lambda', x' - y'))\}\varphi(x)\overline{\psi(y)}\,dx\,dy\,d\lambda'\,d\rho(m) +$$

$$+ c\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}(0)} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{R^{n+1}} \int\limits_{R^{n+1}} \int\limits_{S_n(r)} (m^2 + r^2)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\{i(\sqrt{m^2 + r^2}(x_0 - y_0) + (\lambda', x' - y'))\} \times$$

$$\times d\sigma(\lambda')\varphi(x)\overline{\psi(y)}\,dx\,dy\,dr\,d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}(0)}.$$

Воспользовавшись равенством [4]

$$\int\limits_{S_n(r)} e^{i(\lambda', x'-y')} d\sigma(\lambda') = (2\pi)^{n/2} r^{n-1} \frac{J_{(n-2)/2}(r\,|x'-y'|)}{(r\,|x'-y'|)^{(n-2)/2}},$$

где $\sigma(\cdot)$ — мера Лебега на сфере $S_n(r)$ радиуса r в R^n, получим

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi)^{n/2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{R^{n+1}} \int\limits_{R^{n+1}} (m^2 + r^2)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\{i\sqrt{m^2 + r^2}(x_0 - y_0)\} r^{n-1} \times$$

$$\times \frac{J_{(n-2)/2}(r\,|x'-y'|)}{(r\,|x'-y'|)^{(n-2)/2}} \varphi(x)\overline{\psi(y)}\, dx dy dr d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}(0)}.$$

Производя замену $r = m\,\mathrm{sh}\,t$, находим

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi)^{n/2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{R^{n+1}} \int\limits_{R^{n+1}} \exp\{im\,\mathrm{ch}\,t \times$$

$$\times (x_0 - y_0)\} (m\,\mathrm{sh}\,t)^{n-1} \frac{J_{(n-2)/2}(m\,\mathrm{sh}\,t\,|x'-y'|)}{(m\,\mathrm{sh}\,t\,|x'-y'|)^{(n-2)/2}} \times$$

$$\times \varphi(x)\overline{\psi(y)}\, dx dy dt d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}(0)}.$$

Введем обозначение $\tilde{\varphi}_0(\alpha, x') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x_0}\varphi(x)\, dx_0$. Тогда

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi)^{n/2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} \tilde{\varphi}_0(m\,\mathrm{ch}\,t, x')\overline{\tilde{\psi}_0(m\,\mathrm{ch}\,t, y')} (m\,\mathrm{sh}\,t)^{n-1} \times$$

$$\times \frac{J_{(n-2)/2}(m\,\mathrm{sh}\,t\,|x'-y'|)}{(m\,\mathrm{sh}\,t\,|x'-y'|)^{(n-2)/2}} dx' dy' dt d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}(0)},$$

что совпадает с (4). Из условия положительной определенности $B(\varphi, \psi)$ следует, что $c \geqslant 0$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $n = 3$ (4) приобретает вид

$$B(\varphi, \psi) = 4\pi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{R^3} \int\limits_{R^3} \tilde{\varphi}_0(m\,\mathrm{ch}\,t, x')\overline{\tilde{\psi}_0(m\,\mathrm{ch}\,t, y')}\, m\,\mathrm{sh}\,t \times$$

$$\times \frac{\sin(m\,\mathrm{sh}\,t\,|x'-y'|)}{|x'-y'|} dx' dy' dt d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0)\overline{\tilde{\psi}(0)}.$$

Спектральное разложение однородного и лоренц-инвариантного обобщенного случайного поля. Запишем представление (4) в виде

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{R^n} \int_{R^n} \tilde{\varphi}_0(m \operatorname{ch} t, x') \overline{\tilde{\psi}_0(m \operatorname{ch} t, y')} \times$$

$$\times (m \operatorname{sh} t)^{n-1} Y_n(m \operatorname{sh} t \,|\, x' - y' \,|)\, dx' dy' dt d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0) \overline{\tilde{\psi}(0)},$$

где по определению $Y_n(z) = 2^{(n-2)/2} \Gamma(n/2) z^{(2-n)/2} J_{(n-2)/2}(z)$.

Пусть $x' = (r_1', \Theta_1')$, $y' = (r_2', \Theta_2')$ — сферические координаты точек x' и y', $S_k^l(\Theta)$, $k = 0, 1, \dots;\ l = 1, \dots, h(k, n)$ — ортонормированная система сферических гармоник, $h(k, n) = (2k + n - 2) \frac{(k + n - 3)!}{(n-2)!\, k!}$ — число линейно независимых гармоник степени k. Используя формулу [4]

$$Y_n(\lambda \,|\, x' - y' \,|) = c_n^2 \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=1}^{h(k,n)} S_k^l(\Theta_1') S_k^l(\Theta_2') \times$$

$$\times \frac{J_{k+(n-2)/2}(\lambda r_1')}{(\lambda r_1')^{(n-2)/2}} \cdot \frac{J_{k+(n-2)/2}(\lambda r_2')}{(\lambda r_2')^{(n-2)/2}},$$

где $c_n^2 = 2^{n-1} \Gamma(n/2) \pi^{n/2}$, получим

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi)^n \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=1}^{h(k,n)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{R^n} \int_{R^n} \tilde{\varphi}_0(m \operatorname{ch} t, x') \overline{\tilde{\psi}_0(m \operatorname{ch} t, y')} \times$$

$$\times (m \operatorname{sh} t)^{n-1} S_k^l(\Theta_1') S_k^l(\Theta_2') \frac{J_{k+(n-2)/2}(m \operatorname{sh} t r_1')}{(m \operatorname{sh} t r_1')^{(n-2)/2}} \times$$

$$\times \frac{J_{k+(n-2)/2}(m \operatorname{sh} t r_2')}{(m \operatorname{sh} t r_2')^{(n-2)/2}} dx' dy' dt d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0) \overline{\tilde{\psi}(0)}.$$

Пусть $\tilde{\varphi}_k^l(\alpha, r') \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{S_n(r')} \tilde{\varphi}_0(\alpha, x') S_k^l\, d\sigma(x')$, тогда

$$B(\varphi, \psi) = (2\pi)^n \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=1}^{h(k,n)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\varphi}_k^l(m \operatorname{ch} t, r_1') \times$$

$$\times (m \operatorname{sh} t)^{(n-1)/2} \frac{J_{k+(n-2)/2}(m \operatorname{sh} t r_1')}{(m \operatorname{sh} t r_1')^{(n-2)/2}} dr_1' \int_0^\infty \overline{\tilde{\psi}_k^l(m \operatorname{ch} t, r_2')} (m \operatorname{sh} t)^{(n-1)/2} \times$$

$$\times \frac{J_{k+(n-2)/2}(m \operatorname{sh} t r_2')}{(m \operatorname{sh} t r_2')^{(n-2)/2}} dr_2' dt d\rho(m) + c\tilde{\varphi}(0) \overline{\tilde{\psi}(0)}.$$

Применение теоремы 1 завершает доказательство следующего утверждения.

Теорема 3. Всякое однородное и лоренц-инвариантное обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$, удовлетворяющее условию теоремы 2, имеет вид

$$\xi(\varphi) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(k,n)} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_k^l (m \operatorname{ch} t, r') \times$$

$$\times (m \operatorname{sh} t)^{(n-1)/2} \frac{J_{k+(n-2)/2}(m \operatorname{sh} tr')}{(m \operatorname{sh} tr')^{(n-2)/2}} dr' dZ_k^l (t, m) + \eta\tilde{\varphi}(0), \qquad (5)$$

где $Z_k^l(\cdot, \cdot)$ — последовательность случайных мер, заданных на борелевских множествах из $[0, \infty) \times [0, \infty)$ и таких, что

$$\mathbf{M} dZ_k^l (t, m) = 0, \quad \mathbf{M} dZ_k^l (t, m) \overline{dZ_p^q (t, m)} = \delta_k^p \delta_l^q dt d\rho (m),$$

η — случайная величина такая, что $\mathbf{M}\eta = 0$, $\mathbf{M}|\eta|^2 = c$, $\mathbf{M}\eta \overline{dZ_k^l (t, m)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$; $l = 1, \ldots, h(k, n)$. Ряд в правой части (5) сходится в среднем квадратическом.

1. *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, вып. 3. 2. *Йост Р.* Общая теория квантованных полей. М., 1967. 3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 2. М., 1978. 4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965.

Поступила в редколлегию 20.06.79

S. P. Vovk

ON HOMOGENEOUS AND LORENTZ-INVARIANT GENERALIZED RANDOM FIELDS

The notion of homogeneous and invariant in regard to the special Lorentz group generalized random field is introduced. The spectral representation of such a field and its correlation functional are obtained.

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, канд. физ.-мат. наук, В. В. ВАСИЛЬЕВ, инж.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДЕТЕРМИНАНТОВ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

В теоретической физике и численном анализе часто возникают задачи, сводящиеся к отысканию функции распределения собственных значений случайной матрицы Якоби $\Xi_n = (\xi_i \delta_{ij} + \eta_i \delta_{ij-1} + \zeta_i \delta_{ij+1})$.

Впервые метод определения $F(x)$ был разработан Ф. Дайсоном [1]. Методы нахождения предельных распределений детерминантов