Применение теоремы 1 завершает доказательство следующего утверждения.

Теорема 3. Всякое однородное и лоренц-инвариантное обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$, удовлетворяющее условию теоремы 2, имеет вид

$$\xi(\varphi) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(k,n)} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_k^l (m \operatorname{ch} t, r') \times$$

$$\times (m \operatorname{sh} t)^{(n-1)/2} \frac{J_{k+(n-2)/2}(m \operatorname{sh} tr')}{(m \operatorname{sh} tr')^{(n-2)/2}} dr' dZ_k^l(t, m) + \eta\tilde{\varphi}(0), \tag{5}$$

где $Z_k^l(\cdot, \cdot)$ — последовательность случайных мер, заданных на борелевских множествах из $[0, \infty) \times [0, \infty)$ и таких, что

$$\mathbf{M} dZ_k^l(t, m) = 0, \quad \mathbf{M} dZ_k^l(t, m) \overline{dZ_p^q(t, m)} = \delta_k^p \delta_l^q dt d\rho(m),$$

η — случайная величина такая, что $\mathbf{M}\eta = 0$, $\mathbf{M}|\eta|^2 = c$, $\mathbf{M}\eta \overline{dZ_k^l(t, m)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$; $l = 1, \ldots, h(k, n)$. Ряд в правой части (5) сходится в среднем квадратическом.

1. *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, вып. 3. 2. *Йост Р.* Общая теория квантованных полей. М., 1967. 3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 2. М., 1978. 4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965.

Поступила в редколлегию 20.06.79

S. P. Vovk

ON HOMOGENEOUS AND LORENTZ-INVARIANT GENERALIZED RANDOM FIELDS

The notion of homogeneous and invariant in regard to the special Lorentz group generalized random field is introduced. The spectral representation of such a field and its correlation functional are obtained.

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, канд. физ.-мат. наук, В. В. ВАСИЛЬЕВ, инж.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДЕТЕРМИНАНТОВ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

В теоретической физике и численном анализе часто возникают задачи, сводящиеся к отысканию функции распределения собственных значений случайной матрицы Якоби $\Xi_n = (\xi_i \delta_{ij} + \eta_i \delta_{ij-1} + \zeta_i \delta_{ij+1})$.

Впервые метод определения $F(x)$ был разработан Ф. Дайсоном [1]. Методы нахождения предельных распределений детерминантов случайных матриц Якоби, предложенные в данной статье, основаны на исследовании преобразования Стилтьеса нормированной спектральной функции $\mu_n(x) = n^{-1}\Sigma_{i=1}^n F(x-\lambda_i)$, где λ_i — собственные значения матрицы Ξ_n. Интегральные уравнения для несимметричных матриц Якоби получены в предположении существования $M \operatorname{Sp} R_t$, где $R_t = (I + it\Xi_n)^{-1}$. Предельные теоремы общего вида для $n^{-1} \ln \det \Xi_n$ доказаны с помощью метода урезания.

1. Предельные теоремы типа закона больших чисел. Пусть Ξ_n — случайная матрица Якоби, ρ_k^n — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы случайные векторы ξ_l, $l = \overline{1, k}$ матрицы Ξ_n. Предположим, что существует $M \ln^2 |\det \Xi_n|$. Согласно [2], если для некоторой последовательности постоянных a_n

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-2}\Sigma_{k=1}^n M\gamma_k^2 = 0, \tag{1}$$

где $\gamma_k = M_{(k)} \ln|\det \Xi_n| - M_{(k+1)} \ln|\det \Xi_n|$, а индекс (k) означает, что математическое ожидание берется по первым k вектор-строкам при фиксированных остальных, то

$$p\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} (\ln|\det \Xi_n| - M \ln|\det \Xi_n|) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случайные матрицы Якоби следующего вида: $\Xi_n = (\xi_i\delta_{ij} + \eta_i\delta_{ij-1} + \zeta_i\delta_{ij+1})$. Введем обозначения $b_i = \det B_i$, $c_{n-i} = \det C_{n-i}$, где $B_k = (\xi_i\delta_{ij} + \eta_i\delta_{ij-1} + \zeta_i\delta_{ij+1})$, $i, j = \overline{1, k}$, $C_{n-k} = (\xi_i\delta_{ij} + \eta_i\delta_{ij-1} + \zeta_i\delta_{ij+1})$, $i, j = \overline{k, n}$. Разложив $\det B_k$ по элементам первой, второй и т. д. строк, получим

$$\begin{aligned}
c_{n-1} &= \xi_1 c_{n-2} - \eta_1\zeta_1 c_{n-3},\\
c_{n-2} &= \xi_2 c_{n-3} - \eta_2\zeta_2 c_{n-4},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_{n-k} &= \xi_k c_{n-k-1} - \eta_k\zeta_k c_{n-k-2},\\
c_0 &= \xi_n, \quad c_1 \equiv 1, \quad c_2 \equiv 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\det \Xi_n = -\eta_{k-1}\zeta_{k-1} b_{k-2} c_{n-k-1} + \xi_k b_{k-1} c_{n-k-1} + \eta_k\zeta_k b_{k-1} c_{n-k-2},$$

$$b_{-1} \equiv 0, \quad b_0 \equiv 1, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть для каждого значения n случайные векторы $k = \overline{1, n}$ (ξ_k, η_k, ζ_k) независимы и с вероятностью 1

$$\xi_k - |\eta_k\zeta_k| \geqslant 1; \tag{4}$$

$$\xi_k - |\eta_k\zeta_k| - |\eta_{k-1}\zeta_{k-1}| \geqslant 0;$$

$$\sup_n \sup_{k=\overline{1,n}} M \ln^2 (\xi_k \pm |\eta_k\zeta_k| \pm |\eta_{k-1}\zeta_{k-1}| < \infty. \tag{5}$$

Тогда

$$p\lim_{n\to\infty} n^{-1}(\ln\det\Xi_n - M\ln\det\Xi_n) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Используя (3), (4), получим $c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1} \geqslant \geqslant 1$; $b_i b_{i-1}^{-1} \geqslant 1$, $i=\overline{1,n}$. Следовательно, $\det\Xi_n \geqslant 0$ и

$$\xi_k - |\eta_k\zeta_k| - |\eta_{k-1}\zeta_{k-1}| \leqslant \frac{\det\Xi_n}{b_{k-1}c_{n-k-1}} \leqslant \xi_k + |\eta_k\zeta_k| + |\eta_{k-1}\zeta_{k-1}|.$$

Отсюда

$$M\gamma_k^2 = M\left[M\left[\ln\frac{\det\Xi_n}{b_{k-1}c_{n-k-1}}/\rho_{k-1}^{(n)}\right] - M\left[\ln\frac{\det\Xi_n}{b_{k-1}c_{n-k-1}}/\rho_k^{(n)}\right]\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2M\ln^2(\xi_k + |\eta_k\zeta_k| + |\eta_{k-1}\zeta_{k-1}|).$$

Из этого неравенства, а также из (1) и (5) получим утверждение теоремы 1.

Следствие 1. Если для каждого значения n случайные величины ξ_i, $i=\overline{1,n}$ независимы, неотрицательны и

$$\sup_n \sup_{i=\overline{1,n}} [M\ln^2\xi_i^{(n)} + M\ln^2(\xi_i^{(n)}\lambda + 2)] \leqslant c < \infty,$$

то для $H_n(\lambda) = ((2+\lambda\xi_i^{(n)})\delta_{ij} - \delta_{ij-1} - \delta_{ij+1})$ выполняется (6).

2. Уравнение Дайсона. Из (3) вытекает, что

$$\det\Xi_n = \Pi_{i=1}^n c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1}; \qquad c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1} = \xi_i - \eta_i\zeta_i\cdot\left(\frac{c_{n-i-1}}{c_{n-i-2}}\right)^{-1}.$$

Таким образом, $\det\Xi_n$ можно представить в виде произведения цепных дробей $c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1} = \xi_i - \eta_i\zeta_i/(\xi_i - \eta_{i+1}\zeta_{i+1}/\ldots(\ldots\eta_n\zeta_n/\xi_n)\ldots)$. Если векторы (ξ_i, η_i, ζ_i), $i=1,2,\ldots$ одинаково распределены и независимы и функции распределения $c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1}$ сходятся к предельной $F(x)$, то для $F(x)$ справедливо следующее интегральное уравнение:

$$F(x) = \int_{y_1 - y_2y_3z^{-1} < x}\!\!\cdots\int dF(z)\,d\Phi(y_1, y_2, y_3), \tag{7}$$

где $\Phi(y_1, y_2, y_3) = P\{\xi_1 < y_1, \eta_1 < y_2, \zeta_1 < y_3\}$.

Теорема 2. Пусть случайные величины ξ_i, $i=1,2\ldots$ матриц Ξ_n, $\Xi_n = ((2+\xi_i)\delta_{ij} + \delta_{ij-1} + \delta_{ij+1})$ независимы, неотрицательны, одинаково распределены. Последовательность сумм $\Sigma_{k=1}^n\xi_k$, $n = = 1, 2\ldots$ стремится по вероятности к бесконечности и для некоторого $\delta > 0$

$$M|\ln\xi_1|^{1+\delta} + M|\ln(2+\xi_1)| < \infty. \tag{8}$$

Тогда

$$p\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\det\Xi_n = \int_1^\infty \ln x\,dF(x),$$

где $F(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(x) = \iint\limits_{2+y-z^{-1}<x} dF(z)\, dP\{\xi_1 < y\}. \tag{9}$$

Доказательство. Очевидно, что $\det \Xi_n \geqslant 0$, и существует $M \ln \det \Xi_n$. Записав разность

$$\ln \det \Xi_n - M \ln \det \Xi_n = \Sigma_{k=1}^n M[\delta_k^{(n)}/c_{n-k-1}^{(n)}] - M[\delta_k^{(n)}/c_{n-1}^{(n)}],$$

где $\delta_k^{(n)} = \ln(\det \Xi_n / b_{k-1} c_{n-k-1})$, введем следующие величины:

$$\nu_k^{(n)} = \begin{cases} \delta_k^{(n)}, & \text{если } |\delta_k^{(n)}| \leqslant n\varepsilon, \\ 0, & \text{если } |\delta_k^{(n)}| > n\varepsilon, \end{cases}$$

$$\mu_k^{(n)} = \begin{cases} \delta_k^{(n)}, & \text{если } |\delta_k^{(n)}| > n\varepsilon, \\ 0 & \text{если } |\delta_k^{(n)}| \leqslant n\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что $\delta_k^{(n)} = \nu_k^{(n)} + \mu_k^{(n)}$. Используя (8), получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} M[\Sigma_{k=1}^n (M[\mu_k^{(n)}/c_{n-k-1}^{(n)}] - M[\mu_k^{(n)}/c_{n-k}^{(n)}])] \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} n^{-2} \Sigma_{k=1}^n M\, |\mu_k^{(n)}|^{1+\delta} \cdot (n\varepsilon)^{-\delta} = 0; \tag{10}$$

$$M[n^{-1}\Sigma_{k=1}^n (M[\nu_k^{(n)}/c_{n-k-1}^{(n)}] - M[\nu_k^{(n)}/c_{n-k}^{(n)}])]^2 \leqslant$$
$$\leqslant n^{-2}\Sigma_{k=1}^n M(\nu_k^{(n)})^2 \leqslant \Sigma_{k=1}^n n^{-1} \varepsilon M\, |\nu_k^{(n)}| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{11}$$

На основании (10) и (11) находим

$$p \lim_{n\to\infty} n^{-1} (\ln \det \Xi_n - M \ln \det \Xi_n) = 0.$$

Вычислим теперь $n^{-1} \ln \det \Xi_n$. Согласно теореме о сходимости цепных дробей [3] из расходимости по вероятности сумм $\Sigma_{k=1}^n \xi_k$ следует существование $p \lim\limits_{h\to\infty} c_{n-i} c_{n-i-1}^{-1} = \xi$, где ξ — некоторая случайная величина. При этом для функции распределения справедливо уравнение (9). Запишем $n^{-1} M \ln \det \Xi_n$ в следующем виде:

$$n^{-1} M \ln \det \Xi_n = n^{-1} \Sigma_{k=1}^n M \ln c_{n-k} c_{n-k-1}^{-1}.$$

Используя (8), получим

$$\lim_{n\to\infty} M \ln c_{n-k} c_{n-k-1}^{-1} = \int_1^\infty \ln x\, dF(x) \quad (\forall k: k\to\infty,\ n\to\infty).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

Теорема 3. Пусть случайные векторы (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, 2, \ldots$, компоненты которых являются элементами матрицы $\Xi_n = (\xi_i \delta_{ij} +$

$+\eta_i\delta_{ij-1}+\zeta_i\delta_{ij+1})$, независимы и одинаково распределены. С вероятностью 1

$$\xi_k-|\eta_k\zeta_k|>1,\quad \xi_k-|\eta_k\zeta_k|-|\eta_{k-1}\zeta_{k-1}|\geqslant 0,\quad k=\overline{1,n},\quad \xi_n\geqslant 1,$$

для некоторого $\delta>0$

$$M|\ln(\xi_2-|\eta_2\zeta_2|-|\eta_1\zeta_1||^{1+\delta}+M|\ln(\xi_2+|\eta_2\zeta_2|+|\eta_1\zeta_1|)|^{1+\delta}\leqslant$$
$$\leqslant c<\infty.$$

Тогда $p\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\ln\det\Xi_n=\int_1^\infty \ln x dF(x)$, где $F(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(x)=\int\limits_{y_1-y_2y_3z^{-1}<x}\!\!\!\cdots\int dF(z)\,d\Phi(y_1,y_2,y_3), \tag{12}$$

$$\Phi(y_1,y_2,y_3)=P\{\xi_1<y_1,\eta_1<y_2,\zeta_1<y_3\}.$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 2, получаем

$$p\lim_{n\to\infty}(n^{-1}\ln\det\Xi_n-n^{-1}M\ln\det\Xi_n)=0.$$

Уравнение (9) вытекает из того факта, что цепная дробь $c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1}$ сходится при $n\to\infty$, если выполнено условие $\xi_k-|\eta_k\zeta_k|>1$, причем $c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1}>1$. Теорема 3 доказана.

Теоремы 2 и 3 легко обобщить на случай, когда распределение случайных матриц периодично в следующем смысле: случайные векторы $[(\xi_i,\eta_i,\zeta_i),\ i=\overline{(l-1)k+1,lk}]$, $l=1,2,\ldots$ независимы и одинаково распределены. В этом случае при условии, что цепь $c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1}$ сходится при $n\to\infty$, получаем следующее интегральное уравнение для предельной функции распределения

$$F(x)=\int\cdots\int dF(z)\,d\Phi(y_1^{(i)},y_2^{(i)},y_3^{(i)}), \tag{13}$$

где интегрирование ведется по области

$$y_1^{(1)}-y_2^{(1)}y_3^{(1)}/(y_1^{(2)}-y_2^{(2)}y_3^{(2)}/\ldots(\ldots y_2^{(k-1)}y_3^{(k-1)}/z)\ldots)<x,$$

$$\Phi(y_1^{(i)},y_2^{(i)},y_3^{(i)})=P\{\xi_i<y_1^{(i)},\eta_i<y_2^{(i)},\zeta_i<y_3^{(i)}\}.$$

3. Предельные теоремы для нормированных спектральных функций несимметричных случайных матриц Якоби. В теоремах 2 и 3 мы доказали существование предела $p\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\ln\det\Xi_n$ в предположении сходимости дробей $c_{n-i}c_{n-i-1}^{-1}$. Если этого предположения не вводить, то необходимы условия, при которых уравнения (9), (12), (13) имеют единственное решение в классе функций распределения. К решению этой задачи без использования цепных дробей можно подойти следующим образом. Пусть Ξ_n несимметрична и имеет вещественный спектр. Очевидно, что

$$n^{-1} \ln |\det \Xi_n| = \int_{\infty}^{\infty} \ln |x| \, d\mu_n(x),$$

где $\mu_n(x)$ — нормированная спектральная функция [4] матрицы Ξ_n. Для $\mu_n(x)$ рассмотрим преобразование Стилтьеса

$$\int (1 + itx)^{-1} \, d\mu_n(x) = n^{-1} \operatorname{Sp} (I + it\Xi_n)$$

и докажем предельные теоремы для $n^{-1} \ln \det \Xi_n$.

Пусть $\Xi_n = (\xi_i \delta_{ij} + \eta_i \delta_{ij-1} + \zeta_i \delta_{ij+1})$, где ξ_i, η_i, ζ_i — вещественные случайные величины, $\eta_i \zeta_i > 0$. Найдем выражение для резольвенты $R_t = (I + it\Xi_n)^{-1}$ такой матрицы. Очевидно, что

$$\operatorname{Sp} R_t = n - t \frac{d}{dt} \ln \det (I + it\Xi_n).$$

Обозначим $d_n(t) = \det(I + it\Xi_n)$. Из (3) следует, что $d_n(t) = (1 + it\xi_1) d_{n-1}(t) + t^2 \eta_1 \zeta_1 d_{n-2}(t)$, где $d_{n-k}(t)$ — детерминант матрицы вида $D_{n-k} = (\xi_i \delta_{ij} + \eta_i \delta_{ij-1} + \zeta_i \delta_{ij+1})$, $i, j = \overline{k+1, n}$, $d_0 \equiv 1$. Согласно [2] $d_{n-1}(t) d_n^{-1}(t) = r_{11}^{(n-1)}(t)$, где $r_{11}^{(n)}(t)$ — элемент резольвенты $(I + it\Xi_n)^{-1}$, а $r_{11}^{(n)}(t) = [1 + it\xi_1 + t^2 \eta_1 \zeta_1 r_{11}^{(n-1)}(t)]^{-1}$, где $r_{11}^{(n)}(t)$ — элемент матрицы $((I + it\xi_{pl})^{-1}$, $p, l = \overline{2, n})$, ξ_{pl} — элемент матрицы Ξ_n. Так как

$$d_n d_0^{-1} = \Pi_{k=0}^{n-1} d_{n-k} d_{n-k-1}^{-1} = \Pi_{k=0}^{n-1} [r_{11}^{(k+1)}(t)]^{-1},$$

то

$$\operatorname{Sp} R_{n-k} = n - k + t \frac{d}{dt} \ln d_{n-k}(t), \tag{14}$$

$$R_{n-k} = (I + it(\xi_i \delta_{ij} + \eta_i \delta_{ij+1} + \zeta_i \delta_{ij+1}))^{-1}, \quad i, j = \overline{k+1, n}.$$

Используя выражение для $\operatorname{Sp} R_{n-k}$, можем записать

$$\operatorname{Sp} R_{n-k} - \operatorname{Sp} R_{n-k-1} = 1 + t \frac{d}{dt} \ln r_{11}^{(k)}(t). \tag{15}$$

Теорема 4. Если случайные векторы (ξ_i, η_i, ζ_i), $i = 1, 2 \ldots$, компоненты которых являются элементами матрицы $\Xi_n = (\xi_{ij} \delta_{ij} + \eta_i \delta_{ij-1} + \zeta_i \delta_{ij+1})$, независимы, одинаково распределены и $\eta_i \zeta_i > 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} M\mu_n(x) = \mu(x),$$

в каждой точке непрерывности неслучайной спектральной функции, преобразование Стилтьеса которой равно

$$\int (1 + itx)^{-1} d\mu(x) = 1 - \int \ldots \int (x_1 + ix_2)(x_3 + ix_4)^{-1} dG_t(x_p, p = \overline{1,4}),$$

функция распределения $G_t(x_p,\ p=\overline{1,4})$, заданная на множестве $|t|<\infty$, $|x_p|\leqslant 2$, $x_3\geqslant 0$, удовлетворяет уравнению

$$G_t(x_p,\rho=\overline{1,4})=\int\dots\int dF(z_i,\ i=\overline{1,3})\,dG_t(p,q,u,v), \tag{16}$$

где интегрирование ведется по области

$$\begin{gathered}\{p,q,u,v:-\operatorname{Re}[itz_1+2z_2z_3t^2(u+iv)+t^3z_2z_3(p+iq)]\times\\ \times[1+itz_1+t^2z_2z_3(u+iv)]^{-2}<x_1,\\ -\operatorname{Im}[itz_1+z_2z_3(2t^2(u+iv)+t^3(p+iq))]\times\\ \times[1+itz_1+t^2z_2z_3(u+iv)]^{-2}<x_2,\\ \operatorname{Re}[1+itz_1+t^2z_2z_3\ (u+iv)]^{-1}<x_3,\\ \operatorname{Im}[1+itz_1+t^2z_2z_3\ (u+iv)]^{-1}<x_4\},\\ u\geqslant 0,\quad |x_p|\leqslant 2,\quad p=\overline{1,4},\quad F(z_i,\ i=\overline{1,3})=\\ =P\{\xi_1<z_1,\ \eta_1<z_2,\ \zeta_1<z_3\}.\end{gathered} \tag{17}$$

Решение уравнения (16) существует и единственно в классе функций распределения $G_t(x_p,\ p=\overline{1,4})$, зависящих от параметра t $(-\infty<t<\infty)$ и удовлетворяющих условию: для любых целых положительных k_p, $p=\overline{1,4}$ $\int\dots\int\Pi_{i=1}^{n}x_i^{k_p}dG_t(x_p,\ p=\overline{1,4})$.

Доказательство. Известно [5], что собственные числа матрицы Ξ_n при $\eta_i\zeta_i>0$ вещественны, поэтому существует $n^{-1}\operatorname{Sp}R_t$. Из (14) получаем

$$n^{-1}M\operatorname{Sp}R_t=1-n^{-1}\Sigma_{k=0}^{n-1}M\left[\frac{d}{dt}r_{11}^{(k+1)}(t)\,(r_{11}^{(k+1)}(t))^{-1}\right].$$

Поэтому для доказательства необходимо найти предел при $n\to\infty$ выражения $M\left[\frac{d}{dt}r_{11}^{(k+1)}(t)\ (r_{11}^{(k+1)}(t))^{-1}\right]$ (символ (t) при $r_{11}^{(k)}(t)$ далее опускаем). Очевидно, что

$$\begin{gathered}t\frac{d}{dt}r_{11}^{(k)}=-[1+it\xi_k+\eta_k\zeta_kt^2r_{11}^{(k-1)}]^{-2}\times\\ \times\left[it\xi_k+2\eta_k\zeta_k\left(t^2r_{11}^{(k-1)}+t^3\frac{d}{dt}r_{11}^{(k)}\right)\right].\end{gathered}$$

Используя это выражение, получаем следующее рекуррентное уравнение:

$$\begin{gathered}G_t^{(k)}(x_p,\ p=\overline{1,4})=P\left\{\operatorname{Re}t\frac{d}{dt}r_{11}^{(k)}<x_1,\ \operatorname{Im}t\frac{d}{dt}r_{11}^{(k)}<x_2,\ \operatorname{Re}r_{11}^{(k)}<x_3,\right.\\ \left.\operatorname{Im}r_{11}^{(k)}<x_4\right\}=\int\dots\int dF(z_1,z_2,z_3)\,dG_t(x_p),\end{gathered} \tag{18}$$

где интегрирование ведется по области (17).

Очевидно, что $r_{11}^{(k)} = H\Lambda H^{-1} = \Sigma_{s=1}^{n}(1+it\lambda_s)^{-1} h_{sk} h_{sk}^{-1}$, где h_{sk}, h_{sk}^{-1} — элементы матриц H и H^{-1} соответственно. Согласно [6] собственные векторы, соответствующие λ_p, ортогональны с весом $(h_{pk}, \beta_p h_{pk}^{-1}) = 0$, где $\beta_p = \beta_1 \Pi_{k=1}^{p-1} \zeta_k \eta_k$ — весовые коэффициенты, β_1 произвольно. Выбирая $\beta_1 > 0$, получаем оценку сверху для $\frac{d}{dt} r_{11}^{(k)} (r_{11}^{(k)})^{-1}$. Обозначим $c_p = h_{pk}^2 \beta_p$,

$$\frac{d}{dt} r_{11}^{(k)} (r_{11}^{(k)})^{-1} \mid = \mid [\Sigma_{p=1}^{n} c_p it\lambda_p (1+it\lambda_p)^{-2}][\Sigma_{p=1}^{n} c_p (1+it\lambda_p)^{-1}]^{-1} \mid =$$

$$= \mid [\Sigma_{p=1}^{n} c_p (1+it\lambda_p)^{-1} - \Sigma_{p=1}^{n} c_p (1+it\lambda_p)^{-2}][\Sigma_{p=1}^{n} c_p (1+ it\lambda_p)^{-1}]^{-1} \mid \leqslant \mid 1 - [\Sigma_{p=1}^{n} c_p (1+it\lambda_p)^{-2}] \times [\Sigma_{p=1}^{n} c_p (1+it\lambda_p)^{-1}] \mid \leqslant 2.$$

Таким образом, находим, что величина $\left| t \frac{d}{dt} \ln r_{11}^{(k)} \right|$ ограничена числом 2.

Покажем, что для всех $|t| \leqslant T$

$$\lim_{k\to\infty} \sup | G_t^{(k-1)}(\cdot)' - G_t^{(k)}(\cdot) | = 0, \tag{19}$$

где T — любое ограниченное число.

Пусть $r_{11}^{(p)}$ и $r_{11}^{(p-1)}$ — случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве, причем $\tilde{r}_{11}^{(p)} \approx r_{11}^{(p)}$, $\tilde{r}_{11}^{(p-1)} \approx r_{11}^{(p-1)}$, а совместное распределение величин $r_{11}^{(p)}$, $r_{11}^{(p-1)}$ произвольно и принадлежит некоторому множеству распределений K. Величины $\tilde{r}_{11}^{(p)}$, $\tilde{r}_{11}^{(p-1)}$ не зависят от ξ_{p+1}. Рассмотрим случайные рекуррентные уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{11}^{(p+1)} &\approx [1 + it\xi_{p+1} + \eta_{p+1}\zeta_{p+1} t^2 \tilde{r}_{11}^{(p)}]^{-1}, \\ \tilde{r}_{11}^{(p)} &\approx [1 + it\xi_{p+1} + \eta_{p+1}\zeta_{p+1} t^2 \tilde{r}_{11}^{(p-1)}]^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что $\tilde{r}_{11}^{(p+1)} \approx r_{11}^{(p+1)}$ и величины $\tilde{r}_{11}^{(p+1)}$, $\tilde{r}_{11}^{(p)}$ имеют некоторое совместное распределение. Из (20) получаем

$$M | \tilde{r}_{11}^{(p+1)} - \tilde{r}_{11}^{(p)} | \leqslant t^2 M | \tilde{r}_{11}^{(p)} - \tilde{r}_{11}^{(p-1)} |.$$

Используя уравнения (20) для величин $\tilde{r}_{11}^{(p+1)}$, $\tilde{r}_{11}^{(p+2)}$, находим

$$M | \tilde{r}_{11}^{(p+2)} - \tilde{r}_{11}^{(p+1)} | \leqslant t^4 M | \tilde{r}_{11}^{(p)} - \tilde{r}_{11}^{(p-1)} |,$$

где $\widetilde{r}_{11}^{(p+2)} \approx r_{11}^{(p+2)}$, $\widetilde{r}_{11}^{(p+1)} \approx r_{11}^{(p+1)}$ и величины $\widetilde{r}_{11}^{(p+1)}$, $\widetilde{r}_{11}^{(p+2)}$ имеют некоторое совместное распределение. Продолжая процесс $k-p$ раз, получаем $M|\widetilde{r}_{11}^{(k)} - \widetilde{r}_{11}^{(k-1)}| \leqslant t^{2(k-p)} M|\widetilde{r}_{11}^{(p)} - \widetilde{r}_{11}^{(p-1)}|$. Отсюда в предположении того, что p — некоторое фиксированное число, при $|t| < 1$ находим

$$\lim_{k\to\infty} M|\widetilde{r}_{11}^{(k)} - \widetilde{r}_{11}^{(k-1)}| = 0.$$

Но тогда выполняется (19) при $|t| < 1$. Так как характеристические функции распределений $G_t^{k-1}(\cdot)$ и $G_t^k(\cdot)$ аналитические по t, то (19) будет выполняться для всех $|t| \leqslant \mathrm{T}$. Из последовательности $G_t^{(m)}(\cdot)$, $m = k, k+1, \ldots$ выберем подпоследовательность $G_t^{(m')}(\cdot)$ такую, что $G_t^{(m')} \Rightarrow G_t(\cdot)$. Тогда в силу (19) $G_t(\cdot)$ будет удовлетворять уравнению (16). Покажем, что это уравнение имеет единственное решение в классе функций, определенных в условиях теоремы. Предположим, что существует два решения $G_t^{(1)}(\cdot)$ и $G_t^{(2)}(\cdot)$ уравнения (16). Вместо уравнения (16) рассмотрим пару случайных функциональных уравнений

$$\begin{aligned} \nu_1^{(p)}(t) + i\nu_2^{(p)}(t) &\approx [it\xi_1 + \eta_1\zeta_1[2t^2(\mu_3^{(p)}(t) + i\mu_4^{(p)}(t)) + t^3(\mu_1^{(p)}(t) + \\ &\quad + i\mu_2^{(p)}(t))]][1 + it\xi_1 + t^2\eta_1\zeta_1(\mu_3^{(p)}(t) + i\mu_4^{(p)}(t)]^{-2}, \\ \nu_3^{(p)}(t) + i\nu_4^{(p)}(t) &\approx [1 + it\xi_1 + \eta_1\zeta_1 t^2(\mu_3^{(p)}(t) + i\mu_4^{(p)}(t))]^{-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Векторы $(\nu_i^{(p)}(t),\ i = \overline{1,4})$ имеют распределение $G_t^{(p)}(\cdot)$, $p = 1, 2, \ldots$ и не зависят от ξ_1.

Совместное распределение двух векторов $(\mu_i^{(1)}, i = \overline{1,4})$, $(\mu_i^{(2)}, i = \overline{1,4})$ имеет произвольный вид. Обозначим множество всех совместных распределений этих векторов через K. Совместные распределения векторов $(\nu_i^{(1)},\ i = \overline{1,4})$, $(\nu_i^{(2)},\ i = \overline{1,4})$ будут принадлежать некоторому множеству $L \subset K$.

Из уравнений (21) получаем при $|t| < 1$

$$\int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_2(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant ct^2 \int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_1(\vec{x}, \vec{y}),$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $F_2(\vec{x}, \vec{y})$ — функция распределения векторов $\nu_i^{(1)}(t)$, $\nu_i^{(2)}(t)$, $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ — функция распределения векторов $\mu_i^{(1)}(t)$, $\mu_i^{(2)}(t)$, которую можем выбирать произвольным образом, но так, чтобы $F_1(\vec{x}, \vec{a}) = G_t^{(1)}(x)$, $F_1(\vec{a}, \vec{x}) = G_t^{(2)}(x)$, где $\vec{a} \doteq (2, 2, 2, 2)$. В частности, подставив вместо F_1 функцию F_2, находим

$$\int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_3(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant ct^2 \int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_2(\vec{x}, \vec{y}),$$

где $F_3(\vec{x}, \vec{y})$ — некоторая функция распределения. Продолжая такой процесс дальше, приходим к последовательности функций распределения $F_k(\vec{x}, \vec{y})$, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющих неравенству

$$\int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_{k+1}(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant ct^2 \int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_k(\vec{x}, \vec{y}).$$

Следовательно,

$$\int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_n(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant (ct^2)^n \int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_1(\vec{x}, \vec{y}).$$

Устремляя n к бесконечности, получаем при $ct^2 < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \int |\vec{x} - \vec{y}|\, dF_n(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Так как характеристическая функция этих распределений аналитическая по t, то это тождество будет справедливо для всех конечных t. Теорема 4 доказана.

Если существует $M \ln r_{11}^{(k)}(t)$, то уравнение (16) можно записать в упрощенной форме.

Следствие 2. Если дополнительно к условиям теоремы 4 для некоторого $\delta > 0$ и любого ограниченного $T > 0$

$$\sup_n \sup_{k=\overline{1,n}} \sup_{|t|\leqslant T} M |\ln r_{11}^{(k)}(t)| \leqslant c,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} M\mu_n(x) = \mu(x)$ в каждой точке непрерывности неслучайной спектральной функции $\mu(x)$, преобразование Стилтьеса которой равно

$$\int (1 + itx)^{-1} d\mu(x) = 1 + t\frac{d}{dt} \iint \ln(y_1 + iy_2)\, dG_t(y_1, y_2),$$

функция распределения $G_t(y_1, y_2)$ (t — параметр), заданная на множестве $0 \leqslant y_1 \leqslant 1$, $|y_2| \leqslant 1$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$G_t(y_1, y_2) = \iiint dG_t(x_1, x_2)\, dF(z_1, z_2, z_3), \tag{22}$$

где интегрирование ведется по области $\{x_1, x_2 : \mathrm{Re}[1 + itz_1 + z_2 z_3 t^2 (x_1 + ix_2)]^{-1} < y_1,\ \mathrm{Im}[1 + itz_1 + z_2 z_3 t^2 (x_1 + ix_2)]^{-1} < y_2\}$, $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $|x_2| < 1$. Решение уравнения (22) существует и единственно в классе функций распределения $G_t(x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию: для любых целых положительных k_1, k_2 $\iint x_1^{k_1} x_2^{k_2} dG_t(x_1, x_2)$ — аналитическая по t.

Следствие 3. Если дополнительно к условиям теоремы 4 либо следствия 2 существует такое $\delta > 0$, что

$$\sup_n n^{-1} \Sigma_{k=1}^n M |\ln|\lambda_k||^{1+\delta} \leqslant c < \infty,$$

то $p\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln|\det \Xi_n| = \int \ln|x|\,d\mu(x)$, функция $\mu(x)$ определена соответственно в теореме 4 и следствии 2.

Все предыдущие рассуждения легко распространяются на случайные матрицы Якоби вида $\Xi_n = (\xi_i\delta_{ij} + \eta_i\delta_{ij-1} + \zeta_i\delta_{ij+1})$, у которых пары случайных величин (ξ_i, η_i) независимы и одинаково распределены. Для этого случая, например, уравнение (12) нужно заменить следующим:

$$G_t(y_1, y_2) = \int \ldots \int dG_t(x_1, x_2)\, dP\{\xi_1 < z_1,\ \eta_1 < z_2\}, \tag{23}$$

где интегрирование ведется по области

$$\{x_1, x_2 : \operatorname{Re}[1 + itz_1 + t^2 z_2^2(x_1 + ix_2)]^{-1} < y_1,$$
$$\operatorname{Im}[1 + itz_1 + t^2 z_2^2(x_1 + ix_2)]^{-1} < y_2\},\quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\quad |x_2| \leqslant 1. \tag{24}$$

Обобщим следствие 2 на случай, когда случайные величины ξ_i, η_i распределены неодинаково.

Следствие 4. Пусть пары элементов (ξ_i, η_i) случайных матриц $H_n = (\xi_i\delta_{ij} + \eta_i\delta_{ij-1} + \zeta_i\delta_{ij+1})$ независимы и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z_1, z_2, u) = F(z_1, z_2, u),\quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

где $F_n(z_1, z_2, u) = P\{\xi_i < z_1,\quad \eta_i < z_2\}$, при $in^{-1} \leqslant u(i+1)n^{-1}$, $F(z_1, z_2, u)$ — функция распределения, непрерывная по параметру u на $[0, 1]$; существует такое $\delta > 0$, что

$$\sup_n \sup_{k=\overline{1,n}, |t|\leqslant T} M|\ln r_{11}^{(k)}|^{1+\delta} \leqslant c < \infty.$$

Тогда с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty} \mu_n(x) = \mu(x)$ в каждой точке непрерывности неслучайной спектральной функции $\mu(x)$, преобразование Стилтьеса которой равно

$$\int (1 + itx)^{-1} d\mu(x) = 1 + t\frac{d}{dt}\int \ldots \int \ln(y_1 + iy_2)\, dG_t(y_1, y_2, u)\, du,$$

функция распределения $G_t(y_1, y_2, u)$ зависит от двух параметров u и t, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $-\infty < t < \infty$, $0 \leqslant y_1 \leqslant 1$, $|y_2| \leqslant 1$ и удовлетворяет интегральному уравнению

$$G_t(y_1, y_2, u) = \int \ldots \int dG_t(y_1, y_2, u)\, dF(z_1, z_2, u),$$

где интегрирование ведется по области (24).

Так как $r_{11}^{(k)}$ и $\frac{d}{dt} r_{11}^{(k)}$ представимы в виде цепных дробей, то аналогичными методами можно доказывать предельные теоремы для некоторых случайных цепных дробей.

1. *Dyson F. J.* The dynamics of a disordered Linear chain.— Phys. Rev., 1953, 92, N 6. 2. *Гирко В. Л.* Случайные матрицы. Киев, 1975. 3. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М., 1961. 4. *Пастур Л. А.* Спектры случайных самосопряженных операторов.— Успехи математических наук, 1973, 28, N 1. 5. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М., 1950. 6. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1977.

Поступила в редколлегию 15.07.79

V. L. Girko, V. V. Vasiliev

LIMIT THEOREMS FOR STOCHASTIC JACOBY MATRICES DETERMINANTS

In the article some general limit theorems for stochastic Jacoby matrices are proved.

УДК 519.21

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, д-р физ.-мат. наук, А. А. КУРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

НАИЛУЧШАЯ ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ТРЕНДА ПРИ НАЛИЧИИ ОШИБОК ТИПА БЕЛОГО ШУМА

В работе получена несмещенная линейная оценка с минимальной в естественном смысле ковариационной матрицей параметров тренда по наблюдению случайного поля на брусе. Наблюдаемое случайное поле аддитивно содержит: тренд, неизвестную мешающую функцию нескольких переменных и ошибки типа белого шума. Рассмотрены примеры. Настоящая статья связана с работой [1].

1. Одна задача минимизации в гильбертовом пространстве. Пусть H — гильбертово пространство, $K \subset H$ его подпространство, $K^{\perp}$ — ортогональное дополнение K в H, P — оператор проектирования на подпространство $K^{\perp}$; $\vec{g}' = (g_1, g_2, \ldots, g_p)$, $\{g_1, g_2, \ldots, g_p\} \subset \subset H$ — известный вектор, элементы $Pg_1, Pg_2, \ldots, Pg_p$ линейно независимы. Требуется определить вектор $\vec{f} \in H^p$ такой, что:

1) $\vec{f}' = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\} \subset K^{\perp}$;

2) $(\vec{f}, \vec{g}') = J$; J — единичная $p \times p$ матрица;

3) для произвольного вектора $\vec{h}$, удовлетворяющего условиям 1), 2), матрица $(\vec{h}, \vec{h}') - (\vec{f}, \vec{f}')$ неотрицательно определена.

Положим $\Phi = (P\vec{g}, P\vec{g}')$. В силу линейной независимости элементов $Pg_1, Pg_2, \ldots, Pg_p$, матрица Φ невырождена.

Теорема 1. Для вектора $\vec{f} = \Phi^{-1}P\vec{g}$ выполняются условия 1) — 3). При этом

$$(\vec{f}, \vec{f}') = \Phi^{-1}. \tag{1}$$