УДК 519.21

Н. М. ЗИНЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ВЫБОРОЧНЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

В статье продолжено изучение выборочных свойств случайных полей с независимыми приращениями, начатое в работах [1, 2], получены неравенства для распределения supremum'а поля на n-мерном интервале в весьма общих предположениях о случайном поле, вид неравенств уточнен для конкретных типов случайных полей с независимыми приращениями, доказан закон больших чисел для однородных полей с независимыми приращениями.

Пусть $\xi(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_n)\in R^n_+$ — случайное поле с независимыми однородными приращениями. Характеристическая функция стохастически непрерывного поля имеет вид $\varphi(\lambda)=\exp\left\{K(\lambda)\prod\limits_{i=1}^{n} t_i\right\}$, где кумулянта поля $K(\lambda)=i\lambda a-\lambda^2 b/2+\int\limits_{R^1-\{0\}}(\exp(i\lambda x)-1-i\lambda x/(1+x^2))\,\Pi(dx)$.
При $K(\lambda)=-|\lambda|^{\alpha}(1+i\beta|\lambda|^{-1}\lambda\omega(\lambda,\alpha))$, $0<\alpha<2$, $|\beta|\leqslant 1$, где $\omega(\lambda,\alpha)=\operatorname{tg}(\pi\alpha/2)$ для $\alpha\neq 1$, $\omega(\lambda,\alpha)=(2/\pi)\ln\lambda$ для $\alpha=1$, имеем устойчивое случайное поле [3], а $K(\lambda)=-\lambda^2/2$ соответствует n-параметрическому броуновскому движению. Обозначим интервалы в R^n_+ через $[a, b]=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$, где $a=(a_1, \ldots, a_n)$, $b=(b_1, \ldots, b_n)$, $a_i\leqslant b_i$, $i=1, \ldots, n$, $[0, T]=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}[0, T_i]$, $T=(t_1, \ldots, t_n)$, а приращения поля $\xi(t)$ на интервале $[a, b]$, через $\xi([a, b])=\prod\limits^{n}\Delta^{(i)}_{a_i, b_i}\xi$, где $\Delta^{(i)}_{x_i, y_i}f=f(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)-f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots y_n)$.

Для вероятности $\mathbf{P}\{\sup\limits_{t\in[0,T]}\xi(t)\geqslant z\}$ получим оценки сверху вида $\mathbf{P}\{\sup\limits_{t\in[0,T]}\xi(t)\geqslant z\}\leqslant C(n)\mathbf{P}\{\xi(T)\geqslant z\}$. Такие неравенства применялись в работах [1, 2] для изучения локальных свойств случайных полей с независимыми приращениями. Подобные неравенства для некоторых классов полей другим способом получены в статьях [3, 4].

Как и случайные процессы, случайные поля с независимыми приращениями являются естественными обобщениями сумм независимых случайных величин, но уже с мультииндексами, на случай непрерывного параметра. Поэтому ряд свойств полей получается из соответствующих утверждений для сумм независимых случайных величин. Докажем два полезных неравенства для максимума сумм независимых случайных величин с n-мерными индексами, аналогичные известным неравенствам [5] для сумм обычных случайных величин.

Всюду далее k, i, j, N — многомерные индексы вида $k=(k_1, \ldots, k_n)$, неравенство $k<N$ $(k\leqslant N)$ означает, что $k_m\leqslant N_m$ $(k_m\leqslant N_m)$, $m=1, \ldots, n$. Отношение $k<N$ задает частичный порядок в R_+^n. Пусть η_k, $k\leqslant N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $S(i)=S(i_1, \ldots, i_n)=\sum\limits_{k\leqslant i}\eta_k$, $\alpha_\varepsilon=\min\limits_{i\leqslant N}\mathbf{P}\{S(i)\geqslant-\varepsilon\}$, $\gamma_\varepsilon=\min\limits_{i\leqslant N}\mathbf{P}\{|S(i)|\leqslant\varepsilon\}$.

Лемма 1. Если при $\varepsilon>0$ $\alpha_\varepsilon>0$, то

$$\mathbf{P}\{\max_{i\leqslant N}S(i)\geqslant z+n\varepsilon\}\leqslant\alpha_\varepsilon^{-n}\mathbf{P}\{S(N)\geqslant z\}, \tag{1}$$

а при $\gamma_\varepsilon>0$ справедливо

$$\mathbf{P}\{\max_{i\leqslant N}|S(i)|\geqslant z+n\varepsilon\}\leqslant\gamma_\varepsilon^{-n}\mathbf{P}\{|S(N)|\geqslant z\}. \tag{2}$$

Доказательство. Доказательство (1) для $n=2$ дано в работе [2], а в общем случае может быть проведено индукцией по размерности параметра n. Введем на множестве мультииндексов $k\leqslant N$ какой-либо порядок $k\prec i$, например, лексикографический. Определим непересекающиеся события $V(j)=\{S(i)<z+n\varepsilon,\ i\prec j,\ S(j)\geqslant z+\varepsilon n\}$ и положим $D(j)=\{S(j_1, \ldots, j_{n-1}, N_n)-S(j)>-\varepsilon\}$. Для любого j события $V(j)$ и $D(j)$ независимы и $\{\max\limits_{j_1,\ldots,j_{n-1}}S(j_1, \ldots, j_{n-1}, N_n)\geqslant z+(n-1)\varepsilon\}\supset\bigcup\limits_j\{D(j)\cap V(j)\}$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\max_{i\leqslant N}S(i)\geqslant z+n\varepsilon\}\leqslant\alpha_\varepsilon^{-1}\sum_{j\leqslant N}\mathbf{P}(D(j))\mathbf{P}(V(j))\leqslant$$

$$\leqslant\alpha_\varepsilon^{-1}\mathbf{P}\{\max_{\substack{1\leqslant j_m\leqslant N_m\\ m=\overline{1,n-1}}}S(j_1, \ldots, j_{n-1}, N_n)\geqslant z+(n-1)\varepsilon\}$$

и предположение индукции завершает доказательство (1). Аналогично доказывается (2).

Теорема 1. Если поле $\xi(t)$ таково, что при $t\in[0, T]$, $\varepsilon>0$ $\mathbf{P}\{\xi(t)>-\varepsilon\}\geqslant\alpha_\varepsilon>0$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}\xi(t)\geqslant z+n\varepsilon\}\leqslant\alpha_\varepsilon^{-n}\mathbf{P}\{\xi(T)\geqslant z\}; \tag{3}$$

если же $\mathbf{P}\{|\xi(t)|<\varepsilon\}\geqslant\gamma_\varepsilon>0$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi(t)|\geqslant z+n\varepsilon\}\leqslant\gamma_\varepsilon^{-n}\mathbf{P}\{|\xi(T)|\geqslant z\}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\xi(i)=\xi(i_1T_12^{-m}, \ldots, i_nT_n2^{-m})$, $0\leqslant i_r\leqslant 2^m$, $r=1, \ldots, n$. Обозначим через $\eta(k)$ приращения поля на интервале $\Delta(k) = \overset{n}{\underset{r=1}{\times}} [k_r T_r \cdot 2^{-m}, (k_r+1) T_r 2^m]$. Все $\eta(k)$ независимы и одинаково распределены, а $\xi(i) = \sum_{k<i} \eta(k)$, $\min_{i \leqslant N} \mathbf{P}\{\xi(i) \geqslant -\varepsilon\} \geqslant \alpha_\varepsilon$, $\min_{i \leqslant N} \mathbf{P}\{|\xi(i)| \leqslant \varepsilon\} \geqslant \gamma_\varepsilon$. Для доказательства теоремы теперь достаточно использовать (2) или (3) и заметить, что $\bigcup_m L_m$, где $L_m = \{i : i = (i_1 T_1 2^{-m}, \ldots, i_n T_n 2^{-m}), 0 \leqslant i_r \leqslant 2^m, r = 1, \ldots, n\}$ образует множество сепарабельности стохастически непрерывного случайного поля $\xi(t)$.

Следствие 1. Если $\xi(t)$ имеет симметричное распределение, то $\mathbf{P}\{\sup_{t \in [0,T]} \xi(t) \geqslant z\} \leqslant 2^n \mathbf{P}\{\xi(T) \geqslant z\}$. Действительно, $\mathbf{P}\{\xi(t) \geqslant -\varepsilon\} \geqslant \geqslant 1/2$ и в (2) полагаем $\varepsilon \to 0$.

Следствие 2. Если $\xi(t)$ — устойчивое случайное поле с $\mathbf{P}_1(\varepsilon) = \mathbf{P}\{\xi(1) \geqslant -\varepsilon_1\} > 0$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon \left(\prod_{i=1}^{n} T_i\right)^{-1/\alpha}$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \in [0,T]} \xi(t) \geqslant z + n\varepsilon\} \leqslant (1 - \mathbf{P}_1(\varepsilon))^{-n} \mathbf{P}\{\xi(T) \geqslant z\}.$$

Действительно,

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \geqslant -\varepsilon\} = \mathbf{P}\left\{\xi(1) \geqslant -\varepsilon \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{-1/\alpha}\right\} \geqslant \mathbf{P}_1(\varepsilon) > 0.$$

Следствие 3. Если $\mathbf{P}_1(0) > 0$, то

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}\{\sup_{t \in [0,T]} \xi(t) \geqslant z\} \leqslant (1 - \mathbf{P}_1(0))^{-n} \mathbf{P}\{\xi(T) \geqslant z\}.$$

Подобная оценка $\mathbf{P}_2$ приводится в работе [3] с дополнительным множителем $n!$.

В книге [5] для однородного процесса $\xi_1(t)$ с независимыми приращениями с кумулянтой $K(\lambda) = t\ V(i\lambda)$, $t \in \mathrm{R}^1$,

$$V(z) = bz^2/2 + \int_{-\infty}^{0} (\exp(zx) - 1 - zx)\,\Pi(dx) \tag{5}$$

доказано, что для любого $t \in \mathrm{R}^1$ $\mathbf{P}\{\xi_1(t) > 0\} \geqslant 1/16$. Так как доказательство [5] использует только свойства функции $V(z)$, аналогичное утверждение справедливо для случайных полей.

Лемма 2. Если $\xi_2(t)$, $t \in \mathrm{R}^n_+$ — случайное поле с кумулянтой $K(\lambda) = V(i\lambda) \prod_{i=1}^{n} t_i$, где $V(\cdot)$ удовлетворяет (5), то для любого t $\mathbf{P}\{\xi_2(t) > 0\} \geqslant 1/16$.

Следствие 4. Если кумулянта поля такая, как в лемме 2, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]} \xi(t) \geqslant z\} \leqslant (16)^n \mathbf{P}\{\xi(T) \geqslant z\}.$$

Следствие 5. Для устойчивых полей с $\beta = 1$

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]} \xi(t) \geqslant z\} \leqslant (16)^n \mathbf{P}\{\xi(T) \geqslant z\}.$$

Теорема 2. (Закон больших чисел для однородных полей с независимыми приращениями). Если для поля $\xi(t)$ существует $\mathbf{M}|\xi(1)|(\log^+|\xi(1)|)^{n-1}$, то

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{\substack{t_i\to\infty\\ i=\overline{1,n}}} \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{-1} \xi(t) = \mathbf{M}\xi(1)\right\} = 1. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $N = (N_1, \ldots, N_n)$, обозначим $\delta(N) = \prod_{m=1}^n N_m$. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с многомерными индексами [6] дает

$$\mathbf{P}\{\lim_{\substack{N_i\to\infty\\ i=\overline{1,n}}} \xi(N)/\delta(N) = \mathbf{M}\xi(1)\} = \mathbf{P}\left\{\lim_{N_i\to\infty} \sum_{k\leqslant N} \xi([k-1, k))/\delta(N) = \right.$$

$$\left. = \mathbf{M}\xi(1)\right\} = 1,$$

где $\xi([k-1, k))$ — приращения поля на интервале $\mathop{\times}\limits_{i=1}^n [k_i - 1, k_i]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\{\lim_{N_i\to\infty} \sup_{N_i\leqslant t_i\leqslant N_i+1, i=\overline{1,n}} |\xi(t) - \xi(N)|/\delta(N) = 0\} = 1. \tag{7}$$

Выполнение (7) обеспечивается сходимостью для любого $\varepsilon > 0$ ряда

$$\sum_{N_1,\ldots,N_r} \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t_i\leqslant 1, i=\overline{1,r}} |\xi(t)(r)| \geqslant \varepsilon\delta(N)/(2^n-1)\}.$$

где у вектора $t\,(r)$ любые r координат равны соответствующим t_i, а остальные $n-r$ координат — N_i, $r = \overline{1,n}$.
Поэтому достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{N_1,\ldots N_n} \mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,1]^n} |\xi(t)| > \varepsilon_2\delta(N)\}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon/2^n - 1.$$

Выберем $c>0$ так, чтобы при $t\in[0, 1]^n$ выполнялось $\mathbf{P}\{|\xi(t)|>c\}\leqslant 1/2$. Тогда по (4)

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,1]^n} |\xi(t)|>\varepsilon_2\delta(N)\}\leqslant 2^n\mathbf{P}\{|\xi(1)|>\varepsilon_2\delta(N)-nc\}.$$

Но

$$\sum_{N_1,\ldots,N_n}\mathbf{P}\{|\xi(1)|>\varepsilon_2\delta(N)-nc\}\leqslant\sum_{N_1,\ldots,N_n}\mathbf{P}\{\varepsilon_2^{-1}(|\xi(1)|+nc)>\delta(N)\}\leqslant$$

$$A_n\leqslant\varepsilon_2^{-1}[\mathbf{M}|\xi(1)|(\log^+|\xi(1)|)^{n-1}]<\infty.$$

Доказательство теоремы завершено.

Следствие 6. Если $\mathbf{M}|\xi(1)|<\infty$, то при $N_i\to\infty$, $i=\overline{1, n}$ $\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{-1}\xi(t)\to\mathbf{M}\xi(1)$ по вероятности.

Доказательство. Условие $\mathbf{M}|\xi(1)|(\log^+|\xi(1)|)^{n-1}<\infty$ обеспечивает выполнение усиленного закона больших чисел для слагаемых с n-мерными индексами, а для выполнения закона больших чисел достаточно, чтобы $\mathbf{M}|\xi(1)|<\infty$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше.

Следствие 7. Если $\mathbf{M}|\xi(1)|<\infty$, то при $\mathbf{M}\xi(1)<0$

$$\mathbf{P}\{\sup_t\xi(t)<+\infty\}=1,$$

а при $\mathbf{M}\xi(1)>0$ $\mathbf{P}\{\sup_t\xi(t)=+\infty\}=1.$

1. *Зинченко Н. М.* Локальный рост случайных полей с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, вып. 1. 2. *Зинченко Н. М.* О верхних и нижних функциях случайных полей с независимыми приращениями.— Теория случайных процессов, 1979, вып. 7. 3. *Калинаускайте Н. Б.* О максимуме устойчивых случайных полей с независимыми приращениями.— Литовский математический сборник, 1978, 18, № 4. 4. *Калинаускайте Н. Б.* О локальном росте случайных полей. I.— Литовский математический сборник, 1979, 19, № 1. 5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов т. 2. М., 1973. 6. *Smythe R. T.* Strong laws of numbers for r-dimensional arrays of random variables.— Ann. Probab., 1973, 1, N 1.

Поступила в редколлегию 05.09.79

N. M. Zinchenko

SAMPLE PATH PROPERTIES OF THE RANDOM FIELDS WITH INDEPENDENT INCREMENTS

For the random fields with independent increments unequalities for the distribution of supremum are obtained. With their help the laws of large numbers for such fields are proved.