A. G. Kukush

CENTRAL LIMIT THEOREM IN HILBERT SPACE IN TERMS OF LEVY — PROKHOROV'S DISTANCE

The paper deals with probability measures in Hilbert space. The inequalities ›r Levy—Prokhorov's distance and measures' variation at convex closed subsets re obtained. Some estimations for product measures in terms of Levy—Prokhorov's istance and of one-dimensional semiinvariants are given. At some additional condiions of distribution' nonatomicity the rate of convergence in terms of Levy—Prohorov's distance in the central limit theorem for i. i. d. random variables valued in Iilbert space is considered.

'ДК 519.21

Ч. Н. ЛЕОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук, М. И. ЯДРЕНКО, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе исследованы случайные поля в гильбертовом ıространстве, распределения которых инвариантны относительно ·руппы изометричных преобразований гильбертова пространства в :ебя. Приведены спектральные представления таких полей и их семиıнвариантов. Для средних по сфере или по шару от таких полей укаıаны условия применимости эргодических теорем и центральной ıредельной теоремы.

1. Спектральное представление случайного поля второго поıядка. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово про:транство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скаıярное произведение в H, $G = \{g\}$ — группа движений в H, т. е. :овокупность всех взаимно-однозначных и изометричных преобразований H в себя. Символом R^n будем обозначать вещественное конечномерное евклидово пространство размерности $n \geqslant 1$. Над основным вероятностным пространством $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ рассмотрим вещественное случайное поле $\xi(x) = \xi(\omega, x) : \Omega \times H \to R^1$.

Здесь и далее символами c, c_i будем обозначать положительные константы, не всегда одни и те же. Пусть $T^{(k)}$ — класс случайных полей $\xi(x)$, $x \in H$, для которых $M|\xi(x)|^k \leqslant c_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $\xi(x) \in T^{(k)}$, $x_j \in H$, $1 \leqslant j \leqslant m \leqslant k$, то обозначим символами

$$e^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) = M \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \xi(x_j);$$

$$s^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) = (-i)^m \ln M \exp\left\{i \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \alpha_j \xi(x_j)\right\}\Bigg|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0}$$

моменты и семиинварианты порядка m случайного поля $\xi(x)$, $x \in H$. Случайное поле $\xi(x) \in T^{(2)}$ будем называть инвариантным относительно движений метрики второго порядка, если $M\xi(x) = m = \text{const}$ и $M[\xi(gx) - m][\xi(gy - m)] = M[\xi(x) - m][\xi(y) - m] = B(x, y) = s^{(2)}(x, y)$ для любых $x, y \in H$, $g \in G$.

А. Пусть $\xi(x)$, $x \in H$ — вещественное, измеримое, непрерывное в среднем квадратическом и инвариантное относительно движений метрики второго порядка случайное поле.

Если выполнено предположение A, то корреляционная функция $B(x, y)$ будет положительно-определенным, непрерывным, инвариантным относительно группы G ядром на $H \times H$. Поэтому в силу теоремы Шенберга о структуре таких ядер

$$B(x, y) = B(r_{xy}) = \int_0^\infty \exp\{-\lambda r_{xy}^2\} d\Phi^{(2)}(\lambda), \tag{1}$$

где $r = r_{xy} = \|x - y\|$ — расстояние между точками $x, y \in H$, $\Phi^{(2)}(\lambda)$ — некоторая неубывающая функция ограниченной вариации на $[0, \infty)$.

Так как всякое сепарабельное гильбертово пространство изоморфно и изометрично пространству $l_2 = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots): \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\right\}$, то в дальнейшем под H будем, как правило, понимать пространство l_2.

Пусть $L_m = \left\{\nu = (i_1, \ldots, i_m; k_1, \ldots, k_m) : i_j = \overline{1, \infty};\ k_j = \overline{1, \infty};\ \sum_{1 \leq j \leq m} k_j = m\right\}$, $m = \overline{0, \infty}$ и

$$\psi_\nu(x, \lambda, m) = e^{-\lambda\langle x, x\rangle} (2\lambda)^{m/2} \prod_{1 \leq j \leq m} [x_{i_j}^{k_j} / \sqrt{k_j!}]. \tag{2}$$

Тогда

$$B(x, y) = \int_0^\infty \exp(-\lambda \|x - y\|^2\} d\Phi^{(2)}(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda\langle x, x\rangle} e^{-\lambda\langle y, y\rangle} \sum_{m=0}^\infty \frac{(2\lambda)^m}{m!} \left(\sum_{k=0}^\infty x_k y_k\right)^m d\Phi^{(2)}(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda\langle x, x\rangle} e^{-\lambda\langle y, y\rangle} \sum_{m=0}^\infty \sum_{\nu \in L_m} \frac{(2\lambda)^m}{k_1! \ldots k_m!} \prod_{1 \leq j \leq m} (x_{i_j} y_{i_j})^{k_j} d\Phi^{(2)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \sum_{\nu \in L_m} \int_0^\infty \psi_\nu(x, \lambda, m) \psi_\nu(y, \lambda, m) d\Phi^{(2)}(\lambda). \tag{3}$$

Поскольку в (3) переменные мультипликативно разделены, то в силу теоремы Карунена [1] получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполнено предположение A, то

$$\xi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu \in L_m} \int_0^{\infty} \psi_\nu(x, \lambda, m) Z_m^\nu(d\lambda), \tag{4}$$

де $Z_m^\nu(\cdot)$, $\nu \in L_m$ — последовательность случайных аддитивных)ункций множества на σ-алгебре борелевских множеств $[0, \infty)$, акая, что $MZ_m^\nu(S) = 0$,

$$MZ_m^\nu(S_1) Z_{m'}^{\nu'}(S_2) = \delta_m^{m'} \delta_\nu^{\nu'} \Phi^{(2)}(S_1 \cap S_2)$$

$\delta_m^{m'}$ — символ Кронекера), а стохастический интеграл понимается в мысле среднеквадратической сходимости (см., например, [1]). Отıетим, что функции (1) играют роль, аналогичную роли сферичесих функций в случае конечномерных пространств.

2. Спектральное представление семиинвариантов однородного и зотропного случайного поля в конечномерном пространстве. По налогии с работой [2] введем классы Форте и Блан—Лапьера для лучайных полей $\xi(\omega, x^{(n)}) : \Omega \times R^n \to R$ в конечномерном евклиıовом пространстве.

Известно (см., например, [1]), что если $\xi(x^{(n)})$, $x^{(n)} \in R^n$ — однородное и изотропное случайное поле второго порядка, $M\xi(x^{(n)}) = 0$, $M\xi^2(x^{(n)}) < \infty$, то его корреляционная функция $B(r^{(n)}) = M\xi(0) \times \times \xi(x^{(n)})$ допускает представление

$$B(r^{(n)}) = \int_0^{\infty} Y_n(\lambda r^{(n)}) \, d\Phi_n^{(2)}(\lambda), \tag{5}$$

де

$$Y_n(z) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(z) \, z^{\frac{2-n}{n}}, \tag{6}$$

$J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν, $\Phi_n^{(2)}(\lambda)$ — некоорая ограниченная неубывающая функция на $[0, \infty)$.

Пусть $T = \{\tau\}$ — группа сдвигов пространства R^n, $V = \{v\}$ — руппа вращений вокруг фиксированной точки пространства R^n. Если $\xi(x^{(n)}) \in T^k = \{\xi(x^{(n)}) : M|\xi(x^{(n)})|^k \leqslant c_k < \infty\}$, а $x_j^{(n)} \in R^n$, $1 \leqslant \leqslant j \leqslant m \leqslant k$, то $e^m(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ и $s^{(m)}(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ — момент и сеиинвариант случайного поля $\xi(x^{(n)})$, $x^{(n)} \in R^n$ соответственно.

Будем писать $\xi(x^{(n)}) \in S_n^p(T)$ $(\xi(x^{(n)}) \in S_n^p(V))$, если $\xi(x^{(n)}) \in T^{(p)}$ и ля всех $x_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant m \leqslant p$; $\tau \in T$ $(v \in V)$ $s^{(m)}(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) = s^{(m)}(\tau x_1^{(n)}, \ldots, \tau x_m^{(n)})$ $(s^{(m)}(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) = s^{(m)}(v x_1^{(n)}, \ldots, v x_m^{(n)}))$. Если $\xi(x^{(n)}) \in S_n^p(T) \cap \cap S_n^p(V)$, будем писать $\xi(x^{(n)}) \in S_n^p$. В этом случае моменты и семинварианты до порядка m случайного поля $\xi(x^{(n)})$, $x^{(n)} \in R^n$ инваиантны относительно всех изометрических преобразований R^n в эбя.

Будем писать $\xi(x^{(n)}) \in \Phi_n^{(p)}(T)$, если $\xi(x^{(n)}) \in T$
$1 \leqslant m \leqslant p$ существует вполне конечная комплек
определенная на системе $\mathfrak{B}^{mn}$ всех борелевских м
кая, что для всех $x_j^{(n)}$, $1 \leqslant j \leqslant m$ выполнено соо

$$s^{(m)}(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) = \int\limits_{R^{mn}} \exp\left\{ i \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \langle x_j^{(n)}, \lambda_j^{(n)} \rangle \right\} dF_n^{(r}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в R^n.

Пусть $L^{(m)}\{0\}$ — подпространство, определя
$\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_j^{(n)} = 0$.

Если $\xi(x^{(n)}) \in \Phi_n^{(p)}(T)$, то $\xi(x^{(n)}) \in S_n^{(p)}(T)$ тогда
когда для всех $1 \leqslant m \leqslant p$ $F_n^{(m)}(\Lambda) = F_n^{(m)}(\Lambda \cap L^{(}$
что поле $\xi(x^{(n)}) \in \Phi_n^{(p)}(T) \cap S_n^{(p)}(V)$ тогда и только
любого $v \in V$ $F_n^{(m)}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_m^{(n)}) = F_n^{(m)}(v\lambda_1^{(n)}, \dots, v$
$\xi(x^{(n)}) \in \Phi_n^{(p)}(T) \cap S_n^{(p)}$ тогда и только тогда, когд
отношение выполняется на $L^{(m)}\{0\}$.

Лемма 1. Если $\xi(x^{(n)}) \in \Phi_n^{(p)}(T) \cap S_n^p$, то семи
ции m-го порядка $(1 \leqslant m \leqslant p)$ зависят только о
$\leqslant j \leqslant m-1$ и

$$s^{(m)}(x_1^{(n)}, \dots, x_{m-1}^{(n)}, 0) = s^{(m)}(\rho_1^{(n)}, \dots, \rho$$

$$= \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty \prod_{1 \leqslant j \leqslant m-1} Y_n(\mu_j \rho_j^{(n)})\, d\Phi_n^{(m)}(\mu_1, \dots$$

где $\Phi_n^{(m)}(\mu_1, \dots, \mu_{m-1}) = \int\limits_{\{\|\lambda_j^{(n)}\| \leqslant \mu_j, j=\overline{1, m-1}} dF_n^{(m)}(\lambda_1^{(n)}$

Для доказательства леммы 1 надо проинтегр
раз по поверхностям сфер $S_{\rho_j} = \{x^{(n)} \in R^n : \|x^{(n)}\|$
и использовать формулу (8) § 2 гл. IV [1]. Предс
аналогично (5).

Лемма 2. Функции $Y_n(z)$, определяемые
следующими свойствами:

а) $|Y_n(z)| \leqslant 1$,

б) $\frac{d}{dz} Y_n(z) = -zY_{n+2}(z)/n$,

в) $\lim\limits_{n \to \infty} Y_n(z\sqrt{2n}) = \exp\{-z^2\}$ равномерно в
интервале $|z| \leqslant N$.

Доказательство леммы 2 содержится, наприм

3. Спектральное представление семиинвариан ля в гильбертовом пространстве. Пусть $\xi(x)$, $x \in$

ертовом пространстве. Будем писать $\xi(x)\in S^{(p)}$, если $\xi(x)\in T^{(p)}$ и для всех x_j, $1\leqslant j\leqslant m\leqslant p$ и $g\in G$ $s^{(m)}(gx_1,\ldots,gx_m)=s^{(m)}(x_1,\ldots,x_m)$. Пусть $x_k=\langle x, e_k\rangle$. Будем обозначать $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n,\ldots)=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k$ разложение вектора $x\in H$ по ортонормированному базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а через $x^{(n)}=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$. Будем писать $\xi(x)\in\Phi^{(p)}$, если $\xi(x)\in T^{(p)}$ и для любого $n\geqslant 1$ $\xi(x^{(n)})\in\Phi_n^{(p)}(T)$. Если $\xi(x)\in S^{(p)}\cap\Phi^{(p)}$, то для любого $n>1$ $s^{(m)}(x_1^{(n)},\ldots,x_m^{(n)})=s^{(m)}(x_1^{(n)}-x_m^{(n)},\ldots,x_{m-1}^{(n)}-x_m^{(n)},0)=s^{(m)}(\rho_1^{(n)},\ldots,\rho_{m-1}^{(n)})$ зависят только от $\rho_j^{(n)}=\|x_j^{(n)}-x_m^{(n)}\|$, $1\leqslant j\leqslant m-1$. Обозначим $\xi(x)\in I^{(p)}$, если $\xi(x)\in S^{(p)}\cap\Phi^{(p)}$ и семиинварианты $s^{(m)}(\rho_1^{(n)},\ldots,\rho_{m-1}^{(n)})$ непрерывны для любого $n\geqslant 1$, $1\leqslant m\leqslant p$.

Лемма 3. Пусть $\xi(x)\in I^{(p)}$, $p\geqslant 2$. Тогда семиинварианты m-го порядка ($1\leqslant m\leqslant p$) зависят только от $\rho_j=\|x_j\|$, $1\leqslant j\leqslant m-1$ и существует вполне конечная мера $\Phi^{(m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1})$, $\lambda_j\geqslant 0$, $j=\overline{1, m-1}$ такая, что

$$s^{(m)}(x_1,\ldots,x_{m-1},0)=s^{(m)}(\rho_1,\ldots,\rho_{m-1})=$$
$$=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty\exp\left\{-\sum_{1\leqslant j\leqslant m-1}\lambda_j\rho_j^2\right\}d\Phi^{(m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}). \tag{9}$$

Доказательство. Как уже отмечалось, для любого $n\geqslant 1$ $\xi(x^{(n)})\in\Phi_n^{(p)}\cap S_n^{(p)}$ и, следовательно, для семиинварианта $s^{(m)}(x_1^{(n)},\ldots x_{m-1}^{(n)},0)$ поля $\xi(x^{(n)})$ в силу леммы 1 справедливо представление (8). Сделаем в (8) замену переменных $\mu_j=\sqrt{2n\lambda_j}$ и перейдем к пределу при $n\to\infty$. Так как из соотношения а) леммы 2 вытекает равномерная ограниченность $\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1}Y_n(z_j)$, то представление (9) будет вытекать из представления (8) и соотношения в) леммы 2, если только мы докажем компактность семейства мер

$$\tilde{\Phi}_n^{(m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1})=\Phi_n^{(m)}(\sqrt{2n\lambda_1},\ldots,\sqrt{2n\lambda_{m-1}}). \tag{10}$$

Лемма 4. Семейство мер $\tilde{\Phi}_n^{(m)}(\cdot)$, определяемое соотношением (10), слабо компактно.

Доказательство. Рассмотрим интервал $I[0,a)=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{m-1}[0,a_i)$.

Из соотношения б) леммы 2 следует, что при $n\geqslant 3$, $\lambda_ja_j\geqslant 2$

$$\varphi_n(\lambda_j,a_j)=2a_j^{-2}\int_0^{a_j}Y_n(t_j\sqrt{2n\lambda_j})\,t_jdt_j\leqslant 1/2. \tag{11}$$

Из условия $\xi(x)\in I^{(p)}$ вытекает

$$2^{m-1}\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1} a_j^{-2}\int\limits_0^{a_1}\cdots\int\limits_0^{a_{m-1}}[s^{(m)}(0,\ldots,0)-s^{(m)}(\rho_1^{(n)},\ldots,\rho_{m-1}^{(n)})]\times$$
$$\times\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1}\rho_j^{(n)}d\rho_j^{(n)}\leqslant\varepsilon. \tag{12}$$

Умножив соотношение

$$s^{(m)}(0,\ldots,0)-s^{(m)}(\rho_1^{(n)},\ldots,\rho_{m-1}^{(n)})=$$
$$=\int\limits_0^{\infty}\cdots\int\limits_0^{\infty}[1-\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1}Y_n(\rho_j^{(n)}\sqrt{2n\lambda_j})]\,d\tilde{\Phi}_n^{(m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1})\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{2/a_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{2/a_{m-1}}^{\infty}[1-\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1}Y_n(\rho_j^{(n)}\sqrt{2n\lambda_j})]\,d\tilde{\Phi}_n^{(m)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1})$$

на $\rho_j^{(n)}$, $1\leqslant j\leqslant m-1$, проинтегрировав $m-1$ раз от 0 до a_j и использовав соотношение (11), получим

$$2^{m-1}\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1} a_j^{-2}\int\limits_0^{a_1}\cdots\int\limits_0^{a_{m-1}}[s^{(m)}(0,\ldots,0)-s^{(m)}(\rho_1^{(n)},\ldots,\rho_{m-1}^{(n)})]\times$$
$$\times\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1}\rho_j^{(n)}d\rho_j^{(n)}\geqslant\int\limits_{2/a_1}^{\infty}\cdots\int\limits_{2/a_{m-1}}^{\infty}[1-\prod_{1\leqslant j\leqslant m-1}\varphi_n(\lambda_j,a_j)]\,d\tilde{\Phi}_n^{(m)}(\lambda_1,\ldots$$
$$\ldots,\lambda_{m-1})\geqslant 1-2^{-m+1}\Phi_n^{(m)}(I[0,a)). \tag{13}$$

Из (12) и (13) и теоремы 1 (§ 1 гл. 1 [1]) вытекает утверждение леммы 4.

4. Среднее значение случайного поля в гильбертовом пространстве. Определим среднее $\eta_R(y)$, $y\in H$ случайного поля $\xi(x)$, $x\in H$ по сфере $S_R(y)=\{x\in H:\|y-x\|=R\}$ радиусом R с центром в точке $y\in H$ как среднеквадратический предел

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\omega_n(R)}\int\limits_{S_R^{(n)}(y)}\xi(x^{(n)})\,m_R^{(n)}(dx^{(n)})=\eta_R(y), \tag{14}$$

где $S_R^{(n)}(y)=S_R(y)\cap R^n$ — сфера в конечномерном пространстве R^n, $\omega_n(R)$ — площадь поверхности этой сферы, $m_R^{(n)}(\cdot)$ — мера Лебега на сфере $S_R^{(n)}(y)$.

Теорема 2. Если для поля $\xi(x)$, $x\in H$ выполнено условие A, то предел (14) существует.

Доказательство. Последовательность случайных величин

$$z_n = \hat{M}\{\xi(y)/\xi(x^{(n)}),\ x^{(n)} \in S_R^{(n)}(y)\} \tag{15}$$

образует мартингал (z_n есть проекция $\xi(y)$ на замкнутое линейное многообразие, порожденное случайными величинами $\{\xi(x^{(n)}),\ x^{(n)} \in S_R^{(n)}(y)\}$). Из предельной теоремы для мартингалов следует существование предела

$$\text{l. i. m. } z_n = z_\infty = \hat{M}\{\xi(y)/\xi(x),\ x \in S_R(y)\}.$$

Далее воспользуемся тем, что

$$z_n = \hat{M}\{\xi(y)/\xi(x^{(n)}),\ x^{(n)} \in S_R^{(n)}(y)\} =$$

$$= \frac{B(R)}{\int\limits_{S_R^{(n)}(y)} B(r_{ax^{(n)}})\, m_R^{(n)}(dx^{(n)})} \int\limits_{S_R^{(n)}(y)} \xi(x^{(n)})\, m_R^{(n)}(dx^{(n)}) =$$

$$= \frac{B(R)\,\omega_n(R)}{\int\limits_{S_R^{(n)}(y)} B(r_{ax^{(n)}})\, m_R^{(n)}(dx^{(n)})} \cdot \frac{1}{\omega_n(R)} \int\limits_{S_R^{(n)}(y)} \xi(x^{(n)})\, m_R^{(n)}(dx^{(n)}), \tag{16}$$

где a — «северный полюс» $S_R^{(n)}(y)$. Переходя в (16) к сферическим координатам, получаем

$$\frac{B(R)\,\omega_n(R)}{\int\limits_{S_R^{(n)}(y)} B(r_{ax^{(n)}})\, m_R^{(n)}(dx^{(n)})} = \frac{B(R)}{\int\limits_0^\pi \delta_n(\theta)\, B(\sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\theta})\, d\theta},$$

где $\delta_n(\theta) = \pi^{-1/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sin^{n-2}\theta$.

Последовательность $\delta_n(\theta)$ обладает следующими свойствами:

а) $\int\limits_0^\pi \delta_n(\theta)\, d\theta = 1$;

б) в каждом интервале $\left(0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \pi\right)$ последовательность $\delta_n(\theta)$ равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$ $(\varepsilon > 0)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$.

В силу свойств а) — в)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(R)\,\omega_n(R)}{\int\limits_{S_R^{(n)}(y)} B(r_{ax^{(n)}})\, m_R^{(n)}(dx^{(n)})} = \frac{B(R)}{B(R\sqrt{2})} \neq 0.$$

Отсюда и следует существование предела (14), а также равенство

$$z_\infty = M\{\xi(y)/\xi(x),\ x\in H,\ x\in S_R(y)\} = \frac{B(R)}{B(R\sqrt{2})}\,\eta_R(y).$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если выполнено предположение A, то имеют место равенства

$$M\eta_{R_1}(x_1)\,\eta_{R_2}(x_2) = \int_0^\infty \exp\{-\lambda(R_1^2+R_2^2+r_{x_1x_2}^2)\}\,d\Phi^{(2)}(\lambda) =$$

$$= B(\sqrt{R_1^2+R_2^2+r_{x_1x_2}^2}); \tag{17}$$

$$M\eta_R(x_1)\,\xi(x_2) = B(\sqrt{R^2+r_{x_1x_2}^2}). \tag{18}$$

В частности,

$$\mathbf{D}\eta_R(y) = B(R\sqrt{2}). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots)\in H$; $x^{(n)} = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)\in R^n$;

$$\eta_R^{(n)}(x) = \frac{1}{\omega_n(R)}\int\limits_{S_R^{(n)}(y)} \xi(u^{(n)})\,m_R^{(n)}(du^{(n)}).$$

Тогда согласно [3]

$$M\eta_{R_1}(x_1)\,\eta_{R_2}(x_2) = \lim_{n\to\infty} M\eta_{R_1}^{(n)}(x_1^{(n)})\,\eta_{R_2}^{(n)}(x_2^{(n)}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty Y_n(\lambda R_1)\,Y_n(\lambda R_2)\,Y_n(\lambda r_{x_1^{(n)}x_2^{(n)}})\,d\Phi_n^{(2)}(\lambda),$$

где $\Phi_n^{(2)}(\lambda)$ определятся по (5).

Выполним в последнем соотношении замену переменных $\lambda=\sqrt{2nz}$, используя соотношение в) леммы 2, а также слабую сходимость $\Phi_n^{(2)}(\sqrt{2nz})$ к $\Phi^{(2)}(z)$ (см. леммы 3, 4). Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим (17). Соотношение (18) доказывается аналогично.

Заметим, что в определении сферического среднего можно рассматривать не последовательность сфер $S_R^{(n)}(y)$, а последовательность $S_R^{(n)}(y)\cap L$, L — любое бесконечномерное пространство в H. Теоремы 2 и 3 остаются при этом в силе.

Пусть $\gamma_n(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi(Re_k)$, где $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ —ортонормированный базис в H. Используя теорему 3, легко проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} M[\eta_R^{(n)}(0) - \gamma_n(0)]^2 = 0.$$

'аким образом, дополнительно к теореме 2 имеет место следующее тверждение.

Следствие 1. При условии A существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi(Re_k),$$

овпадающий с вероятностью единица с $\eta_R(0)$.

Для $y \in H$ определим среднее случайного поля $\xi(x)$, $x \in H$ о шару $V_R(y) = \{x \in H : \| y - x \| \leqslant R\}$ радиусом R с центром в очке y как среднеквадратический предел

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{v_n(R)} \int\limits_{V_R^{(n)}(y)} \xi(x^{(n)})\, dx^{(n)} = \zeta_R(y), \tag{20}$$

де $V_R^{(n)}(y) = V_R(y) \cap R^n$ — шар в конечномерном пространстве R^n, $_n(R)$ — объем этого шара.

Теорема 4. Если выполнено предположение А, то предел 20) существует.

Доказательство. Так же, как и в работе [3], получаем ри $n > m$

$$b_{m,n} = M\zeta_R^{(n)}(y)\, \zeta_R^{(m)}(y) = \int\limits_0^\infty Y_{n+2}(\lambda R)\, Y_{m+2}(\lambda R)\, d\Phi_n^{(2)}(\lambda).$$

Используя леммы 2 — 4, находим

$$M[\zeta_R^{(n)}(y) - \zeta_R^{(m)}(y)]^2 = b_{m,m} + b_{n,n} - 2b_{m,n} =$$

$$= \int\limits_0^\infty Y_{n+2}^2(\lambda R)\, d\Phi_n^{(2)}(\lambda) + \int\limits_0^\infty Y_{m+2}^2(\lambda R)\, d\Phi_m^{(2)}(\lambda) -$$

$$- 2\int\limits_0^\infty Y_{n+2}(\lambda R) Y_{m+2}(\lambda R)\, d\Phi_n^{(2)}(\lambda) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\to \int\limits_0^\infty [e^{-2\lambda R^2} + e^{-2\lambda R^2}]\, d\Phi^{(2)}(\lambda) - 2\int\limits_0^\infty e^{-2\lambda R^2} d\Phi^{(2)}(\lambda) = 0,$$

ткуда и вытекает фундаментальность в смысле среднеквадратичес-ой сходимости последовательности

$$\zeta_R^{(n)}(y) = \frac{1}{v_n(R)} \int\limits_{V_R^{(n)}(y)} \xi(x^{(n)})\, dx^{(n)},$$

ледовательно, и существование предела (20).

Теорема 5. При условии А $D\zeta_R(y) = B(R\sqrt{2})$.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 3 с использованием формулы (10) из работы [3].

5. Эргодические свойства. Рассмотрим предельное поведение при $R \to \infty$ сферических средних $\eta_R(y)$, а также средних по шару $\zeta_R(y)$, определенных в п. 4.

Будем говорить, что случайное поле $\xi(x)$, $x \in H$, $M\xi(x) = 0$ эргодично по отношению к математическому ожиданию при усреднении по сферам (шарам), если существует сферическое среднее $\eta_R(y)$, (среднее по шару $\zeta_R(y)$) и $\underset{R\to\infty}{\text{l. i. m.}}\, \eta_R(y) = m$ $(\underset{R\to\infty}{\text{l. i. m.}}\, \zeta_R(y) = m)$ для всех $y \in H$.

Для любого $n \geqslant 1$ обозначим символами

$$B_{R,y}^{(n)}(r) = \frac{1}{\omega_n(R)} \int\limits_{S_R^{(n)}(y)} \xi\left(x^{(n)} + \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}\right) \xi(x^{(n)})\, m_R^{(n)}(dx^{(n)}),$$

$$\hat{B}_{R,y}^{(n)}(r) = \frac{1}{v_n(R)} \int\limits_{V_R^{(n)}(y)} \xi\left(x^{(n)} + \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}\right) \xi(x^{(n)})\, dx^{(n)}.$$

При условии A назовем случайное поле $\xi(x)$, $x \in H$, $M\xi(x) = 0$ эргодичным по отношению к корреляционной функции $B(r)$, $r \geqslant 0$ при усреднении по сферам (шарам), если существует $\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\, B_{R,y}^{(n)}(r) = B_{R,y}(r)$ (существует $\underset{n\to\infty}{\text{l. }i\text{. m.}}\, \hat{B}_{R,y}^{(n)}(r) = \hat{B}_{R,y}(r)$) и для любого $y \in H$ $\underset{R\to\infty}{\text{l. i. m.}}\, B_{R,y}(r) = B(r)$ $(\underset{R\to\infty}{\text{l. i. m.}}\, \hat{B}_{R,y}(r) = B(r))$.

B_1. Пусть выполнено условие A и $\lim\limits_{r\to\infty} B(r) = 0$.

B_2. Пусть выполнено условие A и спектральная функция $\Phi^{(2)}(\lambda)$ поля $\xi(x)$ непрерывна в точке $\lambda = 0$.

B_3. Пусть выполнено A и $\lim\limits_{R\to\infty} R^{-1} \int\limits_0^R B(r)\, dr = 0$.

Под условием B будем понимать дизъюнкцию высказываний B_i, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 6. Если выполнено предположение B, то случайное поле $\xi(x)$, $x \in H$ эргодично по отношению к математическому ожиданию при усреднении по сферам или шарам.

Утверждения теоремы 6 в случае, если выполнено условие B_1, вытекают из теорем 3 и 5. Без ограничения общности рассмотрим случай $y = 0$, $m = 0$. Из результатов п. 4, а также лемм 2 и 4 следует

$$D\eta_R(y) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left[\int\limits_0^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \right] Y_n^2(\lambda R)\, d\Phi_n^{(2)}(\lambda) \right\} \leqslant \int\limits_0^{\varepsilon} d\Phi(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} e^{-2\lambda R^2} d\Phi^{(2)}(\lambda) \leqslant \Phi^{(2)}(\varepsilon) - \Phi^{(2)}(0) + M\xi^2(x)\, e^{-2\varepsilon R^2}.$$

[И]з последнего соотношения вытекает утверждение теоремы 6 в слу[ч]ае, если усреднения производятся по сферам. Для средних по ша[р]у доказательство аналогично. Утверждения теоремы 6 при выпол[н]ении условия B_3 доказываются аналогично, только в выраже[н]ии для дисперсии $D\eta_R(0)$, записанном в терминах интеграла от кор[р]еляционной функции, надо один раз выполнить интегрирование по [ч]астям, а затем перейти к пределу при $n \to \infty$.

Теорема 7. Пусть гауссовское случайное поле $\xi(x)$, $x \in H$ с $M\xi(x) = 0$ удовлетворяют условию B_1. Тогда оно эргодично по от[н]ошению к корреляционной функции при усреднении по сферам [и]ли шарам.

Доказательство. Рассмотрим случайное поле $\eta(x) = \xi(x + e\tau)\xi(x)$, где $\tau \geqslant 0$, а $e \in H$, причем $\|e\| = 1$. Тогда для фикси[р]ованного $\tau \geqslant 0$ $M\eta(x) = B(\tau)$; $M[\eta(x) - B(\tau)][\eta(y) - B(\tau)] = B^2(r_{xy}) + B(r_{xy} + \tau)B(r_{xy} - \tau)$. Таким образом, утверждение [т]еоремы 7 вытекает из теоремы 6.

Если $f(x_1, x_2, x_3): R^3 \to R^1$ — функция 3 переменных, то

$$\Delta_f^{(3)}[0, \varepsilon] = \sum_{\nu} (-1)^d f(\nu_1\varepsilon_1, \nu_2\varepsilon_2, \nu_3\varepsilon_3), \tag{21}$$

[г]де суммирование распространяется на все возможные значения бу[л]евого вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, а $d = 3 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3$.

Теорема 8. Пусть случайное поле $\xi(x)$, $x \in H$ с $M\xi(x) = 0$ [у]довлетворяет условию B_2, $\xi(x) \in I^{(4)}$ и $\lim \Delta^{(3)}_{\Phi^{(4)}(\cdot)}[0, \varepsilon] = 0$ при [м]ах$\{\varepsilon_i, i = \overline{1, 3}\} \to 0$, где $\Phi^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ определяется по (9). Тогда [п]оле $\xi(x)$, $x \in H$ эргодично по отношению к корреляционной функ[ц]ии при усреднении по сферам или шарам.

Доказательство. Рассмотрим случай сфер. Имеем

$$M[B_{R,0}(r) - B(r)]^2 = \lim_{n\to\infty} M[B_{R,0}^{(n)}(r) - B(r^{(n)})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n^2(R)} \int\limits_{S_R^{(n)}(0)} \int\limits_{S_R^{(n)}(0)} M\xi(x^{(n)})\, \xi\left(x^{(n)} + \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}\right)\xi(y^{(n)}) \times \right.$$

$$\left.\times\, \xi\left(y^{(n)} + \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}\right) m_R^{(n)}(dx^{(n)})\, m_R^{(n)}(dy^{(n)}) - B^2(r^{(n)})\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n^2(R)} \int\limits_{S_R^{(n)}(0)} \int\limits_{S_R^{(n)}(0)} \left[s^{(4)}\left(x^{(n)}, x^{(n)} + \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}, y^{(n)}, y^{(n)} + \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}\right) + \right.\right.$$

$$+ B^2(\|x^{(n)} - y^{(n)}\|) + B\left(\left\|x^{(n)} - y^{(n)} + \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}\right\|\right) B\left(\left\|x^{(n)} - y^{(n)} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.- \frac{r^{(n)}}{\sqrt{n}}\right\|\right)\right] m_R^{(n)}(dx^{(n)})\, m_R^{(n)}(dy^{(n)}) = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty Y_n(\lambda_1 R) Y_n(\lambda_2 R) \times\right.$$

$$\times Y_n(\lambda_2 r^{(n)}) Y_n(\lambda_3 r^{(n)})\, d\Phi_n^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \left[\int_0^\infty Y_n^2(\lambda R) d\Phi_n^{(2)}(\lambda)\right]^2 +$$

$$\left. + \int_0^\infty Y_n(\lambda R) Y_n(\lambda r^{(n)})\, d\Phi_n^{(2)}(\lambda) \int_0^\infty Y_n(\lambda R) Y_n(\lambda r^{(n)})\, d\Phi_n^{(2)}(\lambda)\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-\lambda_1 R^2 - \lambda_2 R^2 - (\lambda_2 + \lambda_3) r^2\}\, d\Phi^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) +$$

$$+ \left[\int_0^\infty e^{-2\lambda R^2} d\Phi^{(2)}(\lambda)\right]^2 + \left[\int_0^\infty e^{-2\lambda(R^2+r^2)}\, d\Phi^{(2)}(\lambda)\right]^2.$$

Если в последнем представлении каждый из интегралов разбить на два, в одном из которых интегрирование производится от 0 до εj, а в другом от εj до ∞, то из условий теоремы будет вытекать, что все слагаемые стремятся к нулю. Для шаров доказательство аналогично.

6. Семиинвариантные условия применимости центральной предельной теоремы. Нас будут интересовать условия, выраженные в терминах семиинвариантов или спектральных мер старших порядков, при которых имеют место соотношения

$$\lim_{R\to\infty} P\left\{\eta_R(y) < u\sqrt{B(R\sqrt{2})}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt \tag{22}$$

или

$$\lim_{R\to\infty} P\{\zeta_R(y) < u\sqrt{B(R\sqrt{2})}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt. \tag{23}$$

C_1. Пусть $\xi(x) \in T^{(\infty)}$ и для всех $k \geqslant 3$

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} [\omega_n(R)]^{-k/2} \int_{S_R^{(n)}(y)} \dots \int_{S_R^{(n)}(y)} s^{(k)}(x_1^{(n)}, \dots x_k^{(n)}) \prod_{1\leqslant i\leqslant k} m_R^{(n)}(dx_i^{(n)}) = 0.$$

C_2. Пусть $\xi(x) \in T^{(\infty)}$ и для всех $k \geqslant 3$

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} [v_n(R)]^{-k/2} \int_{V_R^{(n)}(y)} \dots \int_{V_R^{(n)}(y)} s^{(k)}(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}) \prod_{1\leqslant i\leqslant k} dx_i^{(n)} = 0.$$

D_1. Пусть $\xi(x) \in I^{(\infty)}$, причем

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty |s^{(k)}(\rho_1, \dots, \rho_{k-1})|\, d\rho_1 \dots d\rho_{k-1} < \infty$$

для любого $k \geqslant 3$.

D_2. Пусть $\xi(x) \in I^{(\infty)}$, причем выполнено A, и

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left(\prod_{1 \leqslant j \leqslant k-1} \lambda_j \right)^{-1/2} d\Phi^{(k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}) < \infty$$

для всех $k \geqslant 3$.

Теорема 9. Если выполнены условия A и C_1, то справедливо соотношение (22).

Теорема 10. Если выполнены условия A и C_2, то справедливо соотношение (23).

Теорема 11. Для справедливости соотношений (22) и (23) достаточно, чтобы выполнялось одно из условий D_1 или D_2.

Доказательство теорем 9 и 10 очевидно (см., например, [4], гл. IV). Докажем теорему 10 при выполнении условия D_1. Тогда для случая сфер

$$\int_{S_R^{(n)}(y)} \ldots \int_{S_R^{(n)}(y)} s^{(k)}(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}) \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} m_R^{(n)}(dx_i^{(n)}) = O(\omega_n(R)) = o([\omega_n(R)]^{k/2})$$

при всех $k \geqslant 3$. Аналогичное соотношение можно выписать и для случая шаров. Из этих соотношений и теорем 9 и 10 и вытекает утверждение теоремы 11 при условии D_1. Доказательство теоремы 11 при условии D_2 сводится к проверке условия D_1 с использованием интеграла Пуассона и леммы 3. В самом деле, при $k \geqslant 3$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{k-1} d\rho_j \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left\{-\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \rho_i^2\right\} d\Phi^{(k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}) = 2^{-k+1} \pi^{(k-1)/2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left(\prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j \right)^{-1/2} d\Phi^{(k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}).$$

Отсюда нетрудно прийти к утверждению теоремы 11 при условии D_2.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971.
2. *Ширяев А. Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. — Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, вып. 4.
3. *Попов Ю. Д., Ядренко М. И.* Некоторые вопросы спектральной теории однородных и изотропных случайных полей. — Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, вып. 3.
4. *Леонов В. П.* Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов. М., 1964.

Поступила в редколлегию 12.07.80

N. N. Leonenko, M. I. Yadrenko

THE LIMIT THEOREMS FOR THE RANDOM FIELDS ON THE HILBERT SPACE

The spectral representations of the random fields on the Hilbert space are considered. Some ergodic characteristics of means with respect to the sphere and the ball are investigated. The spectral conditions for the central limit theorem are given.

УДК 519.21

Ю. Н. ЛИНЬКОВ, канд. физ.-мат. наук
Институт прикладной математики и механики АН УССР

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК И КРИТЕРИЕВ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Вопросам статистики случайных процессов с непрерывным временем посвящено довольно много работ. Однако в большинстве из них рассматриваются либо процессы с непрерывными траекториями, либо процессы с чисто разрывными траекториями. В настоящей работе рассмотрим марковские процессы, которые могут иметь как непрерывную, так и разрывную составляющие. Для решения асимптотических задач статистики таких процессов докажем асимптотическую нормальность случайных процессов, представимых в виде суммы стохастического интеграла по винеровскому процессу и стохастического интеграла по локальной мартингальной мере. Затем это утверждение применим для исследований асимптотического поведения статистических оценок, критериев и шенноновой информации в процессе относительно параметра.

1. Асимптотическая нормальность стохастических интегралов. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathfrak{F}_t$, $t\geqslant 0$ — семейство неубывающих непрерывных справа пополненных σ-алгебр, $\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{F}$, $w(t)$, $t\geqslant 0$ — n-мерный винеровский процесс относительно $\mathfrak{F}_t$, $q(t, A)$, $t\geqslant 0$, $A\subset R^m$ — локальная мартингальная мера с характеристикой $\pi(t, A)$, которая при каждом $A\subset R^m$ является непрерывной функцией t [1]. Теми же буквами q и π будем обозначать меры $q((s, t],A)=q(t, A)-q(s, A)$, $\pi((s, t], A)=\pi(t, A)-\pi(s, A)$, $0\leqslant s<t<\infty$ на $[0, \infty)\times R^m$. Пусть $H_2[0, T]$ — пространство функций $f(t)=f(t, \omega)$ со значениями в R^n, измеримых по совокупности переменных $(t, \omega)\in[0, T]\times\Omega$, $\mathfrak{F}_t$-измеримых при каждом $t\in[0, T]$ и таких, что $\int_0^T |f(t)|^2dt<\infty$ с вероятностью 1. Через $H_2^{\pi}[0, T]$ обозначим пространство функций $g(t, x)=g(t, x, \omega)$, измеримых по совокупности переменных $(t, x, \omega)\in[0, T]\times R^m\times\Omega$, $\mathfrak{F}_t$-измеримых при всех $(t, x)\in[0, T]\times R^m$, для которых существует последователь-