N. N. Leonenko, M. I. Yadrenko

THE LIMIT THEOREMS FOR THE RANDOM FIELDS ON THE HILBERT SPACE

The spectral representations of the random fields on the Hilbert space are considered. Some ergodic characteristics of means with respect to the sphere and the ball are investigated. The spectral conditions for the central limit theorem are given.

УДК 519.21

Ю. Н. ЛИНЬКОВ, канд. физ.-мат. наук
Институт прикладной математики и механики АН УССР

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК И КРИТЕРИЕВ ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Вопросам статистики случайных процессов с непрерывным временем посвящено довольно много работ. Однако в большинстве из них рассматриваются либо процессы с непрерывными траекториями, либо процессы с чисто разрывными траекториями. В настоящей работе рассмотрим марковские процессы, которые могут иметь как непрерывную, так и разрывную составляющие. Для решения асимптотических задач статистики таких процессов докажем асимптотическую нормальность случайных процессов, представимых в виде суммы стохастического интеграла по винеровскому процессу и стохастического интеграла по локальной мартингальной мере. Затем это утверждение применим для исследований асимптотического поведения статистических оценок, критериев и шенноновой информации в процессе относительно параметра.

1. Асимптотическая нормальность стохастических интегралов. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathfrak{F}_t$, $t \geqslant 0$ — семейство неубывающих непрерывных справа пополненных σ-алгебр, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, $w(t)$, $t \geqslant 0$ — n-мерный винеровский процесс относительно $\mathfrak{F}_t$, $q(t, A)$, $t \geqslant 0$, $A \subset R^m$ — локальная мартингальная мера с характеристикой $\pi(t, A)$, которая при каждом $A \subset R^m$ является непрерывной функцией t [1]. Теми же буквами q и π будем обозначать меры $q((s, t], A) = q(t, A) - q(s, A)$, $\pi((s, t], A) = \pi(t, A) - \pi(s, A)$, $0 \leqslant s < t < \infty$ на $[0, \infty) \times R^m$. Пусть $H_2[0, T]$ — пространство функций $f(t) = f(t, \omega)$ со значениями в R^n, измеримых по совокупности переменных $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, $\mathfrak{F}_t$-измеримых при каждом $t \in [0, T]$ и таких, что $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ с вероятностью 1. Через $H_2^\pi[0, T]$ обозначим пространство функций $g(t, x) = g(t, x, \omega)$, измеримых по совокупности переменных $(t, x, \omega) \in [0, T] \times R^m \times \Omega$, $\mathfrak{F}_t$-измеримых при всех $(t, x) \in [0, T] \times R^m$, для которых существует последовательность простых $\mathfrak{F}_t$-измеримых функций $g_N(t, x)$ таких, что

$$\mathbf{P}-\lim_{N\to\infty}\int_0^T\int |g(t, x)-g_N(t, x)|^2\pi(dt, dx)=0.$$

Если $f(t)\in H_2[0, T]$ и $g(t, x)\in H_2^\pi[0, T]$, то определен случайный процесс

$$\zeta_t=\int_0^t (f(s), dw(s))+\int_0^t\int g(s, x)\,q(ds, dx),\quad t\in[0, T],$$

где (f, w) — скалярное произведение в R^n, $|f|^2=(f, f)$.

Лемма 1. Пусть $f(t)\in H_2[0, T]$ и $g(t, x)\in H_2^\pi[0, T]$ для всех $T<\infty$ и выполняются условия:

1) $$\mathbf{P}-\lim_{T\to\infty}\varphi_T^{-2}\left[\int_0^T |f(t)|^2\,dt+\int_0^T\int g^2(t, x)\,\pi(dt, dx)\right]=1,$$

где $\varphi_T>0$ и $\varphi_T\to\infty$ при $T\to\infty$;

2) для некоторого $a\in(0, 1]$

$$\lim_{T\to\infty}\varphi_T^{-2-a}\mathbf{E}\int_0^T\int |g(t, x)|^{2+a}\pi(dt, dx)=0.$$

Тогда процесс ζ_T при $T\to\infty$ асимптотически нормален с параметрами $(0, \varphi_T^2)$.

Доказательство. Пусть $q^*(t, A)$, $t\in[0, T+1]$, $A\subset R^m$ — локальная мартингальная мера с характеристикой $\pi^*(t, A)$, равной $\pi(t, A)$ при $t\in[0, T]$ и $\pi(T, A)+T(t-T)\Pi(A)$ при $t\in[T, T+1]$, где $\Pi(A)$ — неслучайная конечная мера на R^m, так что $q^*(t, A)=q(t, A)$ при $t\in[0, T]$. Положим $g^*(t, x)=g(t, x)$ при $t\in[0, T]$ и $g^*(t, x)=\varphi_T(T\Pi(R^m))^{-1/2}$ при $t\in(T, T+1]$. Докажем сначала асимптотическую нормальность для

$$G_T=\varphi_T^{-1}\left[\int_0^{\tau_T}(f(t), dw(t))+\int_0^{\tau_T}\int g^*(t, x)\,q^*(dt, dx)\right]$$

при $T\to\infty$, где

$$\tau_T=\inf\left\{\tau:\int_0^\tau |f(t)|^2\,dt+\int_0^\tau\int |g^*(t, x)|^2\pi^*(dt, dx)=\varphi_T^2\right\}.$$

Рассмотрим случайный процесс

$$\eta_T(t)=\exp\left\{i\lambda\varphi_T^{-1}\left[\int_0^t (f(s))\,dw(s)+\int_0^t\int g^*(s, x)\,q^*(ds, dx)\right]+\right.$$
$$\left.+\,2^{-1}\lambda^2\varphi_T^{-2}\left[\int_0^t |f(s)|^2ds+\int_0^t\int |g^*(s, x)|^2\pi^*(ds, dx)\right]\right\}$$

при $t \in [0, T+1]$, $\lambda \in R^1$. По обобщенной формуле Ито [1]

$$\eta_T(t) = 1 + i\lambda\varphi_T^{-1} \int_0^t \eta_T(s)\,(f(s), dw(s)) +$$

$$+ \int_0^t \int \eta_T(s)\,[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1} g^*(s, x) - 1]\, q^*(ds, dx) +$$

$$+ \int_0^t \int \eta_T(s)\,[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1} g^*(s, x)) - 1 - i\lambda\varphi_T^{-1} g^*(s, x) +$$

$$+ 2^{-1}\lambda^2\varphi_T^{-2}\,|g^*(s, x)|^2]\,\pi^*(ds, dx).$$

Так как

$$\varphi_T^{-2} \int_0^{\tau_T} |\eta_T(t)|^2 |f(t)|^2 dt \leqslant \varphi_T^{-2} |\eta_T(\tau_T)|^2 \int_0^{\tau_T} |f(t)|^2 dt \leqslant e^{\lambda^2},$$

$$\int_0^{\tau_T} \int |\eta_T(t)\,[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1} g^*(t, x)) - 1]\,|^2 \pi^*(dt, dx) \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda\varphi_T^{-1}\eta_T(\tau_T)|^2 \int_0^{\tau_T} \int |g^*(t, x)|^2 \pi^*(dt, dx) \leqslant \lambda^2 e^{\lambda^2},$$

то в силу свойств стохастических интегралов

$$\mathbf{E}\eta_T(\tau_T) = 1 + \mathbf{E} \int_0^{\lambda_T} \int \eta_T(t)\,[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1} g^*(t, x)) - 1 - i\lambda\varphi_T^{-1} g^*(t, x) +$$

$$+ 2^{-1}\lambda^2\varphi_T^{-2}\,|g^*(t, x)|^2]\,\pi^*(dt, dx).$$

Используя элементарное неравенство $|e^{ix} - 1 - ix + x^2/2 \leqslant c\,|x|^{2+a}$, $a \in (0, 1]$, $x \in R^1$, получаем

$$|\mathbf{E}\eta_T(\tau_T) - 1| \leqslant c e^{\lambda^2/2} \varphi_T^{-2-a} \mathbf{E} \int_0^{\tau_T} \int |\lambda g^*(t, x)|^{2+a} \pi^*(dt, dx),$$

где правая часть в силу условия 2 стремится к нулю при $T \to \infty$. Так как $\mathbf{E}\eta_T(\tau_T) = \exp(\lambda^2/2)\,\mathbf{E}\exp(i\lambda G_T)$, то отсюда получаем $\mathbf{E}\exp(i\lambda G_T) \to \exp(-\lambda^2/2)$ при $T \to \infty$, т. е. интеграл G_T при $T \to \infty$ асимптотически нормален с параметрами (0, 1). Но для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$

$$\mathbf{P}\{|\varphi_T^{-1}\zeta_T - G_T| > \varepsilon\} \leqslant N\varepsilon^{-2} + \mathbf{P}\left\{\varphi_T^{-2}\left[\int_0^{T+1} |f(t)|^2 \chi_{[0,T]}(t) - \right.\right.$$

$$-\chi_{[0,\tau_T]}(t)\,|\,dt+\int\limits_0^{T+1}\int|g^*(t,x)|^2\,|\,\chi_{[0,T]}(t)-\chi_{[0,\tau_T]}(t)\,|\,\pi^*(dt,dx)\Bigg]>N\Bigg\}=$$

$$+N\varepsilon^{-2}+\mathbf{P}\left\{\left|\varphi_T^{-2}\left[\int\limits_0^T|f(t)|^2dt+\int\limits_0^T\int g^2(t,x)\,\pi(dt,dx)\right]-1\right|>N\right\},$$

где $\chi_A(t)$ — индикатор множества A. Искомая асимптотическая нормальность для ζ_T следует теперь из условия 1 и произвольности ε и N. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Аналогично лемме 2 [2] можно доказать асимптотическую нормальность ζ_t в условиях леммы 1, заменив условие 2 леммы 1 условием типа Линдеберга.

2. Проверка простых гипотез для марковских процессов. Пусть $\xi_\theta(t)$, $t\geqslant 0$ — случайный процесс со значениями в R^m, являющийся решением стохастического уравнения

$$\xi_\theta(t)=\eta+\int\limits_0^t a(s,\xi_\theta(s),\theta)\,ds+\int\limits_0^t b(s,\xi_\theta(s))\,dw(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|u|\leqslant 1}c(s,\xi_\theta(s),u,\theta)\,q(ds,du)+\int\limits_0^t\int\limits_{|u|>1}c(s,\xi_\theta(s),u,\theta)\,p(ds,du),\quad(1)$$

где $a(t,x,\theta)$, $c(t,x,u,\theta)$ — известные m-мерные векторы, а $b(t,x)$ — известная матрица размера $m\times n$, определенные для $(t,x,u,\theta)\in[0,\infty)\times R^m\times R^m\times\Theta$, $w(t)$ — n-мерный винеровский процесс, $p(A)$ — независимая от $w(t)$ пуассоновская мера с параметром $\pi(A)=\int\limits_A|u|^{-m-1}dtdu$, $q(A)=p(A)-\pi(A)$, $A\subset[0,\infty)\times R^m$, η — начальное значение $\xi_\theta(t)$, не зависящее от θ, $w(t)$ и $p(A)$, θ — неизвестный параметр, принимающий значения из Θ. Будем предполагать, что коэффициенты $a(t,x,\theta)$, $b(t,x)$ и $c(t,x,u,\theta)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения (1) для каждого $\theta\in\Theta$ [3].

Обозначим через $\mathbf{D}=\mathbf{D}[0,T]$ пространство функций без разрывов 2-го рода со значениями в R^m, определенных на $[0,T]$, имеющих при каждом $t\in(0,T]$ предел слева и непрерывных справа при $t\in[0,T)$, а через μ_θ^T — вероятностную меру на $\mathbf{D}$, порожденную процессом $\xi_\theta(t)$. Предположим, что выполняются условия, обеспечивающие эквивалентность мер μ_θ^T при различных $\theta\in\Theta$ [3]. Тогда можно показать, что для любых $y,z\in\Theta$ при некоторых дополнительных ограничениях

$$\ln\rho_T(\xi_y;z,y)=\ln\frac{d\mu_z^T}{d\mu_y^T}(\xi_y)=\int\limits_0^T(\alpha(t,\xi_y(t),z,y),\,dw(t))-$$

$$-2^{-1}\int_0^T |\alpha(t, \xi_y(t), z, y)|^2 dt + \int_0^T\int \ln r(t, u, \xi_y(t), z, y)\, q(dt, du) -$$

$$-\int_0^T\int [r(t, u, \xi_y(t), z, y) - 1 - \ln r(t, u, \xi_y(t), z, y)]\, \pi(dt, du),$$

где $\alpha(t, x, z, y)$ — вектор, определяемый соотношением $a(t, x, z) - a(t, x, y) - \int_{|u|\leqslant 1} [c(t, x, u, z) - c(t, x, u, y)]\, |u|^{-m-1} du = b(t, x)\, \alpha(t, x, z, y)$, $r(t, u, x, z, y) = \varkappa(t, x, c(t, x, u, y), z, y)$, $\varkappa(t, x, u, z, y)$ — положительная функция такая, что для любого $A \subset R^m$

$$\int_{\{u: c(t,x,u,z)\in A\}} |u|^{-m-1} du = \int_{\{u: c(t,x,u,y)\in A\}} \varkappa(t, x, u, z, y)\, |u|^{-m-1} du$$

для всех $(t, x) \in [0, T] \times R^m$, ξ_y — траектория процесса $\xi_y(t)$ при $t \in [0, T]$.

Пусть сначала $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ и по результатам наблюдения процесса $\xi(t) = \xi_\theta(t)$, $t \in [0, T]$ необходимо принять решение, какая из двух гипотез $H_i: \theta = \theta_i$, $i = 0, 1$ верна.

Пусть $\delta(x)$ — вообще говоря, случайная функция на $\mathbf{D}$, принимающая значения 0 и 1. Случайную величину $\delta = \delta(\xi)$ будем называть критерием, по которому в случае $\delta = i$ принимается гипотеза H_i. Обозначим через $\alpha_i(\delta)$ условную вероятность ошибки критерия δ при условии, что верна гипотеза H_i, а через $\alpha_i^*(\varepsilon)$ — минимальное значение $\alpha_i(\delta)$ среди всех критериев δ с $\alpha_{1-i}(\delta) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon \in [0, 1]$.

Изучим поведение $\alpha_i^*(\varepsilon)$ при $T \to \infty$ для $\varepsilon \in (0, 1)$. Обозначим

$$F_{iT} = \ln \rho_T(\xi_{\theta_i};\ \theta_{1-i}, \theta_i) = \eta_{iT} - V_{iT}, \tag{2}$$

$$\eta_{iT} = \int_0^T (\alpha_i(t), dw(t)) + \int_0^T\int \ln r_i(t, u)\, q(dt, du),$$

$$V_{iT} = 2^{-1}\int_0^T |\alpha_i(t)|^2 dt + \int_0^T\int [r_i(t, u) - 1 - \ln r_i(t, u)]\, \pi(dt, du),$$

$$U_{iT} = \int_0^T |\alpha_i(t)|^2 dt + \int_0^T\int |\ln r_i(t, u)|^2 \pi(dt, du).$$

где $\alpha_i(t) = \alpha(t, \xi_{\theta_i}(t), \theta_{1-i}, \theta_i)$, $r_i(t, u) = r(t, u, \xi_{\theta_i}(t), \theta_{1-i}, \theta_i)$.

Теорема 1. Пусть для фиксированного i выполняются условия:

1) $U_{iT} < \infty$ с вероятностью 1 для всех $T < \infty$ и $\mathbf{P} - \lim_{T\to\infty} \varphi_{iT}^{-2} U_{iT} = 1$, где $\varphi_{iT} \to \infty$ при $T \to \infty$;

2) для некоторого $\gamma \in (0, 1]$

$$\lim_{T\to\infty} \varphi_{iT}^{-2-\gamma} \mathbf{E} \int_0^T \int |\ln r_i(t, u)|^{2+\gamma} \pi(dt, du) = 0;$$

3) $\mathbf{P} - \lim_{T\to\infty} \varphi_{iT}^{-1}(V_{iT} - \varkappa_{iT}) = 0$, где $\varkappa_{iT} > 0$ и $\lim_{T\to\infty} \varphi_{iT}^{-1}\varkappa_{iT} = \infty$.

Тогда $\lim_{T\to\infty} \varkappa_{iT}^{-1} \ln \alpha_i^*(\varepsilon) = -1$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 1 из работы [4]. Необходимо лишь учесть, что $\varkappa_{iT}^{-1} F_{iT} \to 1$ по вероятности при $T \to \infty$ и в силу леммы 1 величина F_{iT} при $T \to \infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(-\varkappa_{iT}, \varphi_{iT}^2)$.

Пусть теперь $\Theta = \Theta_T = \{\theta_0, \theta_1\} \subset R^1$, где $\theta_1 = \theta_0 = \Delta_T$ и $\Delta_T \to 0$ при $T \to \infty$, а θ_0 не зависит от T. Обозначим $\alpha(t, x, \theta) = \alpha(t, x, \theta, \theta_0)$, $\alpha(t, \theta) = \alpha(t, \xi_{\theta_0}(t), \theta)$, $r(t, u, x, \theta) = r(t, u, x, \theta, \theta_0)$, $r(t, u, \theta) = r(t, u, \xi_{\theta_0}(t), \theta)$. Заметим, что $\alpha(t, \theta_0) = 0$, $r(t, u, \theta_0) = 1$. Для функций $\alpha(t, x, \theta)$ и $r(t, u, x, \theta)$, дифференцируемых по θ, положим $k(t, u, \theta) = h(t, u, \theta)/r(t, u, \theta)$ и

$$R_T = \int_0^T |\beta(t, \theta_0)|^2 dt + \int_0^T \int h^2(t, u, \theta_0) \pi(dt; du),$$

где $\beta(t, \theta) = \beta(t, \xi_{\theta_0}(t), \theta)$, $h(t, u, \theta) = h(t, u, \xi_{\theta_0}(t), \theta)$,

$$\beta(t, x, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \alpha(t, x, \theta), \quad h(t, u, x, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} r(t, u, x, \theta).$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия:

1) функции $\alpha(t, \theta)$ и $r(t, u, \theta)$ дифференцируемы по θ в некоторой окрестности θ_0 и $\int_0^T |\beta(t, \theta)|^2 dt < \infty$, $\int_0^T \int h^2(t, u, \theta) \pi(dt, du) < \infty$, $\int_0^T \int k^2(t, u, \theta) \pi(dt, du) < \infty$ с вероятностью 1 для θ из некоторой окрестности θ_0;

2) существует такое $\psi_T > 0$, что $\psi_T \to \infty$ при $T \to \infty$ и

$$\mathbf{P} - \lim_{T\to\infty} (|\Delta_T| \psi_T \vee 1)(\psi_T^{-2} R_T - 1) = 0,$$

где $a \vee b = \max(a, b)$;

3) для некоторого $\lambda \in (0, 1]$

$$\lim_{T\to\infty} \psi_T^{-2-\lambda} \mathbf{E} \int_0^T \int |h(t, u, \theta_0)|^{2+\lambda} \pi(dt, du) = 0;$$

4) $$\mathbf{P} - \lim_{T\to\infty} (\psi_T^{-2} \vee \Delta_T^2) \sup_{|y-\theta_0| \le |\Delta_T|} \int_0^T |\beta(t, y) - \beta(t, \theta_0)|^2 dt = 0,$$

$$\mathbf{P}-\lim_{T\to\infty}(\psi_T^{-2}\vee\Delta_T^2)\sup_{(y,z)\in D_T}\int_0^T\int|k(t,u,y)-h(t,u,z)|^2\pi(dt,du)=0,$$

где $D_T=\{(y,z):|y-\theta_0|\vee|z-\theta_0|\leqslant|\Delta_T|\}$.

Тогда величина F_{0T} при $T\to\infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(-2^{-1}\Delta_T^2\psi_T^2,\ \Delta_T^2\psi_T^2)$.

Доказательство. Положим $\eta_{0T}=\psi_T\Delta_T(M_T+L_T)$, где

$$M_T=\psi_T^{-1}\left[\int_0^T(\beta(t,\theta_0),\ dw(t))+\int_0^T\int h^2(t,u,\theta_0)\,q(dt,du)\right]. \qquad (3)$$

В силу условий 2, 3 и леммы 1 величина M_T при $T\to\infty$ асимптотически нормальна с параметрами (0, 1). Далее, очевидно,

$$L_T=(\Delta_T\psi_T)^{-1}(\eta_{0T}-\Delta_T\psi_TM_T)=(\Delta_T\psi_T)^{-1}\left[\int_0^T\left(\int_{\theta_0}^{\theta_1}\beta(t,y)\,dy,\ dw(t)\right)+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\int\int_{\theta_0}^{\theta_1}(k(t,u,y)-h(t,u,\theta_0))\,dy\,q(dt,du)\right].$$

Используя свойства стохастических интегралов и неравенство Коши-Буняковского, для любых $\varepsilon>0$ и $N>0$ находим

$$\mathbf{P}\{|L_T|>\varepsilon\}\leqslant N\varepsilon^{-2}+\mathbf{P}\left\{(\psi_T\Delta_T)^{-2}\left[\int_0^T\left|\int_{\theta_0}^{\theta_1}\beta(t,y)\,dy\right|^2dt+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^T\int\left|\int_{\theta_0}^{\theta_1}(k(t,u,y)-h(t,u,\theta_0))\,dy\right|^2\pi(dt,du)\right]>N\right\}\leqslant N\varepsilon^{-2}+$$
$$+\mathbf{P}\left\{\psi_T^{-2}\sup_{|y-\theta_0|\leqslant|\Delta_T|}\left[\int_0^T|\beta(t,y)|^2dt+\int_0^T\int|k(t,u,y)-h(t,u,\theta_0)|^2\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\,\pi(dt,du)\right]>N\right\}.$$

Отсюда, учитывая условие 4 и произвольность ε и N, заключаем, что $L_T\to0$ при $T\to\infty$ по вероятности. Следовательно, процесс η_{0T} при $T\to\infty$ асимптотически нормален с параметрами $(0,\ \Delta_T^2\psi_T^2)$. Таким образом, из представления (2) и условия 2 следует, что для завершения доказательства леммы достаточно показать, что $(\Delta_T\psi_T)^{-1}(V_{0T}-2^{-1}\Delta_T^2R_T)\to0$ при $T\to\infty$ по вероятности. Имеем

$$V_{0T}-2^{-1}\Delta_T^2R_T=2^{-1}\int_0^T(|\alpha(t,\theta_1)|^2-\Delta_T^2|\beta(t,\theta_0)|^2)\,dt+\int_0^T\int\Big\{[r(t,$$

$$u,\ \theta_1) - 1 - \ln r(t,\ u,\ \theta_1)] - 2^{-1}\Delta_T^2 h^2(t,\ u,\ \theta_0)\Big\}\ \pi(dt,\ du),$$

где интеграл по мере π, разделенный на $\Delta_T\psi_T$, стремится к нулю при $T\to\infty$ по вероятности, что доказывается аналогично лемме 2 из работы [5]. Далее, используя неравенство $|a^2-b^2|\leqslant|a-b|^2+ +2|b||a-b|$, получаем

$$I_T=\left|\int_0^T(|\alpha(t,\ \theta_1)|^2-\Delta_T^2|\beta(t,\ \theta_0)|^2)\,dt\right|=\left|\sum_{j=1}^n\int_0^T\left[\left(\int_{\theta_0}^{\theta_1}\beta_j(t,\ y)\,dy\right)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\int_{\theta_0}^{\theta_1}\beta_j(t,\ \theta_0)\,dy\right)^2\right]dt\right|\leqslant\sum_{j=1}^n\int_0^T\left[\left(\int_{\theta_0}^{\theta_1}|\beta_j(t,\ y)-\beta_j(t,\ \theta_0)|\,dy\right)^2+\right.$$

$$\left.+2|\Delta_T\beta_j(t,\ \theta_0)|\int_{\theta_0}^{\theta_1}|\beta_j(t,\ y)-\beta_j(t,\ \theta_0)|\,dy\right]dt,$$

где $(\beta_1(t,\ y),\ \ldots,\ \beta_n(t,\ y))=\beta(t,\ y)$. Но согласно неравенству Коши — Буняковского

$$I_T'=\sum_{j=1}^n\int_0^T\left(\int_{\theta_0}^{\theta_1}|\beta_j(t,\ y)-\beta_j(t,\ \theta_0)|\,dy\right)^2dt\leqslant|\Delta_T|\sum_{j=1}^n\int_0^T\int_{\theta_0}^{\theta_1}|\beta_j(t,\ y)-$$

$$-\beta_j(t,\ \theta_0)|^2\,dydt=|\Delta_T|\int_0^T\int_{\theta_0}^{\theta_1}|\beta(t,\ y)-\beta(t,\ \theta_0)|^2\,dt\leqslant\Delta_T^2\times$$

$$\times\sup_{|y-\theta_0|\leqslant|\Delta_T|}\int_0^T|\beta(t,\ y)-\beta(t,\ \theta_0)|^2\,dt,$$

и, следовательно, в силу условия 4 $(\Delta_T\psi_T)^{-1}I_T'\to 0$ при $T\to\infty$ по вероятности. Применяя сначала неравенство Коши — Буняковского, а затем неравенство $(\Sigma a_jb_j)^2\leqslant\Sigma a_j^2\Sigma b_j^2$, получаем

$$I_T''=\sum_{j=1}^n\int_0^T|\beta_j(t,\ \theta_0)|\int_{\theta_0}^{\theta_1}|\beta_j(t,\ y)-\beta_j(t,\ \theta_0)|\,dydt\leqslant\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sum_{j=1}^n\left(\int_0^T\beta_j^2(t,\ \theta_0)\times\right.$$

$$\left.\times dt\int_0^T|\beta_j(t,\ y)-\beta_j(t,\theta_0)|^2\,dt\right)^{1/2}dy\leqslant\int_{\theta_0}^{\theta'}\left(\int_0^T|\beta(t,\ \theta_0)|^2\,dt\int_0^T|\beta(t,\ y)-\right.$$

$$\left.-\beta(t,\ \theta_0)|^2\,dt\right)^{1/2}dy\leqslant|\Delta_T|\left(\int_0^T|\beta(t,\ \theta_0)|^2\,dt\sup_{|y-\theta_0|\leqslant|\Delta_T|}\int_0^T|\beta(t,\ y)-\right.$$

$$\left.-\beta(t,\ \theta_0)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Значит, в силу условий 2 и 4 $\psi_T^{-1} I_T'' \to 0$ при $T \to \infty$ по вероятности. Учитывая, что $I_T \leqslant I_T' + 2 |\Delta_T| I_T''$, находим, что $(\Delta_T \psi_T)^{-1} I_T \to 0$, и, значит, $(\Delta_T \psi_T)^{-1} (V_{0T} - 2^{-1} \Delta_T^2 R_T) \to 0$ при $T \to \infty$ по вероятности. Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Аналогично лемме 2 формулируется и доказывается утверждение об асимптотической нормальности F_{1T} при $T \to \infty$. Необходимо лишь в качестве функции $\alpha(t, \theta)$, взять $\alpha(t, \xi_{\theta_1}(t), \theta_0, \theta)$, а в качестве функции $r(t, u, \theta) - r(t, u, \xi_{\theta_1}(t), \theta_0, \theta)$ и учесть, что лемма 1 справедлива и в схеме серий.

Теорема 2. Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливы утверждения:

1) если $\Delta_T^2 \psi_T^2 \to \infty$ при $T \to \infty$, то

$$\lim_{T \to \infty} (\Delta_T \psi_T)^{-2} \ln \alpha_1^* (\varepsilon) = -1/2;$$

2) если $\Delta_T^2 \psi_T^2 \to u^2 \in [0, \infty)$ при $T \to \infty$, то

$$\alpha_1^* (\varepsilon) = \Phi (y(\varepsilon) - |u|) + o(1)$$

при $T \to \infty$, где $\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами (0, 1) и $\Phi(y(\varepsilon)) = 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Если $\Delta_T^2 \psi_T^2 \to u^2 \in (0, \infty]$ при $T \to \infty$, то лемма 2 доказывается аналогично соответствующему утверждению из работы [6]. Пусть теперь $\Delta_T^2 \psi_T^2 \to 0$ при $T \to \infty$. Рассмотрим критерий $\delta(x) = \chi_{G(\varepsilon')}(x)$, где $G(\varepsilon') = \{x : \ln \rho(x) > y(1 - \varepsilon') |\Delta_T| \psi_T\} \subset \subset \mathbf{D}$, $\varepsilon' \in (0, 1)$ — произвольное число, $\rho(x) = \rho_T(x; \theta_1, \theta_0)$, $x \in \mathbf{D}$. Из леммы 2 следует, что $\alpha_0(\delta) = \mu_{\theta_0}^T (G(\varepsilon')) \to \varepsilon'$ при $T \to \infty$. Кроме того, из фундаментальной леммы Неймана — Пирсона [7] получаем $\alpha_1(\delta) = \alpha_1^* (\alpha_0(\delta))$. Пусть сначала $\varepsilon' < \varepsilon$. Тогда $\alpha_0(\delta) < \varepsilon$ при достаточно больших T, и, следовательно,

$$\alpha_1^* (\varepsilon) \leqslant \alpha_1^* (\alpha_0(\delta)) = \alpha_1(\delta) = \mu_{\theta_1}^T (\mathbf{D} \setminus G(\varepsilon')) = \int\limits_{\mathbf{D} \setminus G(\varepsilon')} \rho(x) \mu_{\theta_0}^T (dx) \leqslant$$

$$\leqslant \exp \{y(1 - \varepsilon') |\Delta_T| \psi_T\} \mu_{\theta_0}^T (\mathbf{D} \setminus G(\varepsilon_{,})).$$

Так как $\mu_{\theta_0}^T (\mathbf{D} \setminus G(\varepsilon'')) \to 1 - \varepsilon'$ и $\Delta_T^2 \psi_T^2 \to 0$ при $T \to \infty$, то $\overline{\lim\limits_{T \to \infty}} \alpha_1^*(\varepsilon) \leqslant \leqslant 1 - \varepsilon'$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon' \to \varepsilon$, получаем

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \alpha_1^* (\varepsilon) \leqslant 1 - \varepsilon. \tag{4}$$

Пусть теперь $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < 1$. Тогда для достаточно больших T

$$\alpha_1^* (\varepsilon) \geqslant \alpha_1^* (\alpha_0(\delta)) = \alpha_1(\delta) = \mu_{\theta_1}^T (\mathbf{D} \setminus G(\varepsilon')) \geqslant \mu_{\theta_1}^T (C) = \int\limits_C \rho(x) \times$$

$$\times \mu_{\theta_0}^T (dx) \geqslant \exp \{y(1 - \varepsilon'') |\Delta_T| \psi_T\} \mu_{\theta_0}^T (C),$$

де $C = (\mathbf{D} \setminus G(\varepsilon')) \setminus (\mathbf{D} \setminus G(\varepsilon''))$. Так как $\mu^T_{\theta_0}(C) \to \varepsilon'' - \varepsilon'$ и $\Delta^2_T \psi^2_T \to 0$ при $T \to \infty$, то $\varliminf_{T\to\infty} \alpha^*_1(\varepsilon) \geqslant \varepsilon'' - \varepsilon'$. Переходя к пределу в том неравенстве при $\varepsilon' \to \varepsilon$ и $\varepsilon'' \to 1$, получаем

$$\varliminf_{T\to\infty} \alpha^*_1(\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{5}$$

)бъединение неравенств (4) и (5) дает $\alpha^*_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + o(1)$ при $\to \infty$. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Учитывая замечание 2, можно показать, что утерждение теоремы 2 верно и для $\alpha^*_0(\varepsilon)$.

3. **Проверка сложных гипотез для марковских процессов.** Пусть еперь по результатам наблюдения процесса $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющего уравнению (1), необходимо принять решение, какая з двух гипотез $H_0: \theta = \theta_0$ или $H_1: \theta > \theta_0$ верна. Обозначим через $\alpha_T(y; \sigma)$ условную вероятность принятия гипотезы H_1 с помощью ритерия δ при условии, что $\theta = y$. Будем говорить, что δ является ритерием уровня ε, если $\alpha_T(\theta_0; \delta) = \varepsilon$. Критерий δ^* будем называть симптотически локально наиболее мощным уровня ε, если для люого $c > 0$ и всех критериев δ уровня ε

$$\varlimsup_{T\to\infty} \sup_{\psi_T(\theta-\theta_0)<c} [\alpha_T(\theta; \delta) - \alpha_T(\theta; \delta^*)] \leqslant 0,$$

де ψ_T — нормирующий множитель из условия 2 леммы 2.

Теорема 3. Пусть выполняются условия леммы 2 при $\Delta_T = c\psi_T^{-1}$ для любого $c > 0$. Тогда критерий

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } M_T > C_T, \\ q_T, & \text{если } M_T = C_T, \\ 0, & \text{если } M_T < C_T, \end{cases}$$

де M_T определено соотношением (3), а постоянные C_T и q_T находятя из условия $\alpha_T(\theta_0; \delta) = \varepsilon$, является асимптотически локально наиболее мощным уровня ε.

Доказательство теоремы 3 опускается, поскольку оно, по сути, е отличается от доказательства теоремы 4.3.1 из работы [8]. Отмеим лишь, что при этом необходимо применить лемму 2.

Замечание 4. Используя лемму 2, можно решать и другие задачи остроения асимптотически наилучших критериев проверки сложых гипотез для марковских процессов.

4. **Оценки параметров марковских процессов.** Пусть $\Theta = (A, B)$, де $-\infty < A < B < \infty$, и $\theta_0 \in \Theta$ — истинное значение параметра, которое необходимо оценить по результатам наблюдения траектории $= \xi_{\theta_0}$ процесса $\xi(t) = \xi_{\theta_0}(t)$ при $t \in [0, T]$. Оценкой максимального равдоподобия $\hat\theta_T$ параметра θ_0 называется решение уравнения $\rho_T(\xi; \hat\theta_T, y) = \sup \rho_T(\xi; \theta, y)$, где верхняя грань берется по всем

$\theta \in \Theta$, а y — произвольное фиксированное значение из Θ. Байесовской оценкой $\tilde{\theta}_T$ параметра θ_0 относительно априорной плотности $p(\theta)$ и функции потерь $W(y-\theta)$ называется решение уравнения

$$\int W(\tilde{\theta}_T - \theta)\, p_T(\theta/\xi) d\theta = \inf_{y \in \Theta} \int W(y-\theta)\, p_T(\theta/\xi)\, d\theta,$$

где $p_T(\theta/\xi)$ — апостериорная плотность распределения параметра. Будем предполагать, что функция $p(\theta)$ непрерывна, ограничена и не обращается в нуль на Θ (асимптотические свойства байесовских оценок в случае, когда функция $p(\theta)$ не удовлетворяет этим условиям, обсуждаются в работе [9]), а $W(y) \in \tilde{W}$ [10].

В соответствии с методом исследований асимптотического поведения статистических оценок, изложенным в работе [10], изучение оценок $\hat{\theta}_T$ и $\tilde{\theta}_T$ при $T \to \infty$ в регулярном случае сводится к исследованию отношения правдоподобия $\zeta_T(u) = \rho_T(\xi;\ \theta_0 + \psi_T^{-1} u,\ \theta_0)$, где $u \in (A_T, B_T) = \psi_T(\Theta - \theta_0)$, а ψ_T определено в лемме 2. Вне интервала (A_T, B_T) процесс $\zeta_T(u)$ доопределим следующим образом: $\zeta_T(u) = \zeta_T(A_T)(u - A_T + 1)^2$ при $u \in (A_T - 1, A_T]$, $\zeta_T(u) = \zeta_T(B_T)(u - B_T - 1)^2$ при $u \in [B_T, B_T + 1)$ и $\zeta_T(u) = 0$ при $u \bar{\in} (A_T - 1, B_T + 1)$.

Лемма 3. Пусть выполняются условия:

1) функции $\alpha(t, x, \theta, y)$ и $r(t, u, x, \theta, y)$ дифференцируемы по θ и для всех $\theta, y \in \Theta$ и $T > 0$

$$\psi_T^{-2} \mathbf{E} \int_0^T |\beta(t, \xi_\theta(t), y)|^2\, dt \leqslant C_1 < \infty,$$

$$\psi_T^{-2} \mathbf{E} \int_0^T \int l^2(t, u, \xi_\theta(t), y)\, \pi(dt, du) \leqslant C_2 < \infty,$$

где $l(t, u, x, y) = h(t, u, x, y) r^{-1/2}(t, u, x, y)$;

2) для всех $\theta, y \in \Theta$ и $T > 0$

$$\mathbf{E} \int_0^T |\alpha(t, \xi_\theta(t), y)|^2\, dt < \infty,$$

$$\mathbf{E} \int_0^T \int |r(t, u, \xi_\theta(t), y) - 1|^i\, \pi(dt, du) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для всех $T > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\, |\xi_T^{1/2}(s_2) - \xi_T^{1/2}(s_1)|^2 \leqslant (4^{-1} C_1 + C_2)\, |s_2 - s_1|^2. \qquad (6)$$

Доказательство. Из определения процесса $\zeta_T(s)$ имеем

$$E\,|\zeta_T^{1/2}(s_2)-\zeta_T^{1/2}(s_1)|^2 = 2\,(1-\mathrm{E}Z_T(T)),$$

где $Z_T(t) = Z_T^{(1)}(t)\,Z_T^{(2)}(t)$ и

$$Z_T^{(i)}(t) = \exp\left\{2^{-1}\int_0^t (\tilde{\alpha}_i(s),\, dw(s)) + 2^{-1}\int_0^t\int \ln\tilde{r}_i(s,u)\,q(ds,du) -\right.$$

$$\left. -\,4^{-1}\int_0^t |\tilde{\alpha}_i(s)|^2\,ds - 2^{-1}\int_0^t\int [\tilde{r}_i(s,u) - 1 - \ln\tilde{r}_i(s,u)]\,\pi(ds,du)\right\},$$

$\tilde{\alpha}_i(t) = \alpha(t, y_i)$, $\tilde{r}_i(t,u) = r(t,u,y_i)$, $y_i = \theta_0 + \psi_T^{-1}s_i$, $i = 1, 2$. Применяя обобщенную формулу Ито [1] к процессу $Z_T(t)$, $t\in[0, T]$, получаем

$$Z_T(T) = 1 + 2^{-1}\int_0^T Z_T(t)\,(\tilde{\alpha}_1(t) + \tilde{\alpha}_2(t),\, dw(t)) -$$

$$-\,8^{-1}\int_0^T Z_T(t)\,|\tilde{\alpha}_2(t) - \tilde{\alpha}_1(t)|^2\,dt + \int_0^T\int Z_T(t)\,[(\tilde{r}_1(t,u)\,\tilde{r}_2(t,u))^{1/2} - 1]\times$$

$$\times\, q(dt,du) - 2^{-1}\int_0^T\int Z_T(t)\,[\tilde{r}_2^{1/2}(t,u) - \tilde{r}_1^{1/2}(t,u)]^2\,\pi(dt,du).$$

В силу условия 2

$$\mathrm{E}\int_0^T Z_T^2(t)|\tilde{\alpha}_1(t) + \tilde{\alpha}_2(t)|^2\,dt \leqslant 2\mathrm{E}\int_0^T Z_T^2(t)\,(|\tilde{\alpha}_1(t)|^2 + |\tilde{\alpha}_2(t)|^2)\,dt =$$

$$= 2\mathrm{E}\int_0^T \tilde{Z}_T(t)\,(|\alpha(t, \xi_{y_1}(t), y_1)|^2 + |\alpha(t, \xi_{y_1}(t), y_2)|^2\,dt =$$

$$= 2\mathrm{E}\int_0^T (|\alpha(t, \xi_{y_2}(t), y_1)|^2 + |\alpha(t, \xi_{y_2}(t), y_2)|^2)\,dt < \infty, \qquad (7)$$

где $\tilde{Z}_T(t)$ — плотность меры $\mu_{y_2}^t$ относительно меры $\mu_{y_1}^t$ в точке ξ_{y_1}. Следовательно, $\mathrm{E}\int_0^T Z_T(t)\,(\tilde{\alpha}_1(t) + \tilde{\alpha}_2(t),\, dw(t)) = 0$. Используя элементарное неравенство $|(1+a)^{1/2} - 1\,|^2 \leqslant |a|$ при $a \geqslant -1$ и условие 2, аналогично (7) получаем

$$\mathrm{E}\int_0^T\int Z_T^2(t)|\,(\tilde{r}_1(t,u)\,\tilde{r}_2(t,u))^{1/2} - 1\,|^2\,\pi(dt,du) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}\int_0^T\int Z_T^2(t)\left[\sum_{i=1}^2|\tilde r_i(t,u)-1|+\prod_{i=1}^2|\tilde r_i(t,u)-1|\right]\pi(dt,du)=$$

$$=\mathbf{E}\int_0^T\int\left[\sum_{i=1}^2|r(t,u,\xi_{y_2}(t),y_i)-1|+\prod_{i=1}^2|r(t,u,\xi_{y_2}(t),y_i)-1|\right]\times$$

$$\times\pi(dt,du)\leqslant\sum_{i=1}^2\mathbf{E}\int_0^T\int|r(t,u,\xi_{y_2}(t),y_i)-1|\,\pi(dt,du)+$$

$$+\left(\prod_{i=1}^2\mathbf{E}\int_0^T\int|r(t,u,\xi_{y_2}(t),y_i)-1|^2\,\pi(dt,du)\right)^{1/2}<\infty.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\int_0^T\int Z_T(t)\,[(\tilde r_1(t,u)\tilde r_2(t,u))^{1/2}-1]\,q(dt,du)=0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}Z_T(T)=1-8^{-1}\mathbf{E}\int_0^T Z_T(t)|\tilde\alpha_2(t)-\tilde\alpha_1(t)|^2\,dt-$$

$$-2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T\int Z_T(t)|\tilde r_2^{1/2}(t,u)-\tilde r_1^{1/2}(t,u)|^2\,\pi(dt,du),\tag{8}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}|\zeta_T^{1/2}(s_2)-\zeta_T^{1/2}(s_1)|^2=4^{-1}\mathbf{E}\int_0^T Z_T(t)|\tilde\alpha_2(t)-\tilde\alpha_1(t)|^2\,dt+$$

$$+\mathbf{E}\int_0^T\int Z_T(t)|\tilde r_2^{1/2}(t,u)-\tilde r_1^{1/2}(t,u)|^2\,\pi(dt,du).\tag{9}$$

В силу условия 1 аналогично (7) получаем

$$\mathbf{E}\int_0^T Z_T(t)|\tilde\alpha_2(t)-\tilde\alpha_1(t)|^2\,dt\leqslant 2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T|\tilde\alpha_2(t)-\tilde\alpha_1(t)|^2\,dt+$$

$$+2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T Z_T^2(t)|\tilde\alpha_2(t)-\tilde\alpha_1(t)|^2\,dt=2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T|\tilde\alpha_2(t)-\tilde\alpha_1(t)|^2\,dt+$$

$$+2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T|\alpha(t,\xi_{y_2}(t),y_2)-\alpha(t,\xi_{y_2}(t),y_1)|^2\,dt=$$

$$=2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T\left|\int_{y_1}^{y_2}\beta(t,y)\,dy\right|^2dt+2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T\left|\int_{y_1}^{y_2}\beta(t,\xi_{y_2}(t),y)\,dy\right|^2dt\leqslant$$

$$\leqslant C_1|s_2-s_1|^2;\tag{10}$$

$$\mathbf{E}\int_0^T\int Z_T(t)|\tilde r_2^{1/2}(t,u)-\tilde r_1^{1/2}(t,u)|^2\pi(dt,du)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-1}\mathbf{E}\int_0^T\int\left[\left(\int_{y_1}^{y_2}l(t,u,\xi_{y_2}(t),y)\,dy\right)^2+\left(\int_{y_1}^{y_2}l(t,u,\xi_{\theta_0}(t),y)\,dy\right)^2\right]\times$$

$$\times\pi(dt,du)\leqslant C_2|s_2-s_1|^2. \qquad (11)$$

Объединяя соотношения (9) — (11), получаем искомое неравенство (6). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполняются условие 2 леммы 3 и для некоторых $\gamma\in(0,1)$, $K>0$, $k>0$ и $l>0$

$$\inf_{|u|\leqslant\psi_T^{1-\gamma}}|u|^{-2}\int_0^T[c^2(t,\theta_0+\psi_T^{-1}u)+4d^2(t,\theta_0+\psi_T^{-1}u)]\,dt\geqslant k>0,$$

$$\inf_{|u|>\psi_T^{1-\gamma}}\int_0^T[c^2(t,\theta_0+\psi_T^{-1}u)+4d^2(t,\theta_0+\psi_T^{-1}u)]\,dt\geqslant K\psi_T^l,$$

где

$$c^2(t,y)=\inf_{x\in R^m}|\alpha(t,x,y)|^2,$$

$$d^2(t,y)=\inf_{x\in R^m}\int|r^{1/2}(t,u,x,y)-1|^2|u|^{-m-1}du.$$

Тогда $\mathbf{E}\zeta_T^{1/2}(u)\leqslant\exp\{-g_T(u)\}$, где $g_T(u)=k|u|^2/8$ при $|u|\leqslant\psi_T^{1-\gamma}$, $g_T(u)=N|u|^l/8$ при $|u|>\psi_T^{1-\gamma}$, $N=K(|A-\theta_0|\vee|B-\theta_0|)^{-1}$.

Доказательство. Так как $\zeta_T(u)=Z_T^2(T)$ при $s_1=0$, $s_2=u$, где $Z_T(t)$ определено в доказательстве леммы 3, то достаточно доказать, что $\mathbf{E}Z_T(T)\leqslant\exp\{-g_T(u)\}$ при $s_1=0$, $s_2=u$. Из условия 2 леммы 3 следует, что $Z_T(t)$ удовлетворяет соотношению (8), которое при $s_1=0$, $s_2=u$ принимает вид

$$\mathbf{E}Z_T(T)=1-8^{-1}\int_0^T\mathbf{E}Z_T(t)|\alpha(t,y)|^2\,dt-$$

$$-2^{-1}\int_0^T\int\mathbf{E}Z_T(t)|r^{1/2}(t,v,y)-1|^2\pi(dt,dv),\quad y=\theta_0+\psi_T^{-1}u. \qquad (12)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E}Z_T(t)|\alpha(t,y)|^2=\tilde c^2(t,y)\,\mathbf{E}Z_T(t),$$

$$\mathbf{E}Z_T(t)\int|r^{1/2}(t,v,y)-1|^2|v|^{-m-1}dv=\tilde d^2(t,y)\,\mathbf{E}Z_T(t),$$

где $\bar{c}^2(t, y) \geqslant c^2(t, y)$, $\bar{d}^2(t, y) \geqslant d^2(t, y)$. Тогда соотношение (12) принимает вид

$$\mathrm{E}Z_T(T) = 1 - 8^{-1} \int_0^T [\bar{c}^2(t, y) + 4\bar{d}^2(t, y)]\, \mathrm{E}Z_T(t)\, dt.$$

Решая это уравнение относительно $\mathrm{E}Z_T(t)$, получаем

$$\mathrm{E}Z_T(T) = \exp\left\{-8^{-1} \int_0^T [\bar{c}^2(t, y) + 4\bar{d}^2(t, y)]\, dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-8^{-1} \int_0^T [c^2(t, y) + 4d^2(t, y)]\, dt\right\}.$$

Отсюда вытекает искомое неравенство. Лемма 4 доказана.

Следуя [10], из лемм 2—4 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Если выполняются условия леммы 2 при $\Delta_T = u\psi_T^{-1}$ и условия лемм 3 и 4, то оценки $\hat{\theta}_T$ и $\bar{\theta}_T$ при $T \to \infty$ асимптотически нормальны с параметрами (θ_0, ψ_T^{-2}) и любые моменты случайных величин $\psi_T(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ и $\psi_T(\bar{\theta}_T - \theta_0)$ ограничены при достаточно больших T, а при $T \to \infty$ сходятся к соответствующим моментам гауссовской случайной величины с параметрами (0, 1).

Замечание 5. Аналогично [10] можно считать $A \geqslant -\infty$ и $B \leqslant \infty$ и доказать утверждение лемм 2—4 и теоремы 4 равномерно по $\theta_0 \in [A + \delta, B - \delta] \cap [-L_T, L_T]$, где $\delta > 0$ и L_T растет при $T \to \infty$ не быстрее некоторой степени T.

5. **Асимптотика шенноновской информации в марковском процессе относительно параметра.** Пусть θ — случайная величина, не зависящая от $w(t)$ и $q(A)$, с распределением вероятностей Q, обладающим плотностью $p(y)$ относительно меры Лебега, и конечной дифференциальной энтропией $h(\theta) = -\int p(y) \log p(y)\, dy$. Обозначим через $I(\xi, \theta)$ количество шенноновской информации, содержащейся в наблюдаемой траектории ξ марковского процесса $\xi(t) = \xi_0(t)$ при $t \in [0, T]$ относительно параметра θ. Аналогично [11] из лемм 2—4 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть почти для всех θ_0 относительно меры Q выполняются условия леммы 2 при $\Delta_T = u\varphi_T^{-1}$ и условия лемм 3 и 4, где φ_T — не зависящая от θ_0 функция такая, что

$$\lim_{T \to \infty} \psi_T^2 \varphi_T^{-2} = \beta(\theta_0), \quad \mathrm{E}\,|\log \beta(\theta)| < \infty,$$

$$\int |p(y + z) - p(y)|\, dy \leqslant D\,|z|^b$$

для некоторых $D > 0$, $b > 0$. Тогда при $T \to \infty$

$$I(\xi, \theta) = \log \varphi_T + h(\theta) - \mathrm{E}\log(2\pi e/\beta(\theta))^{1/2} + o(1).$$

Замечание 6. Используя методику, развитую в работе [12], и асимптотическую формулу для $I(\xi, \theta)$, можно исследовать функцию риска и асимптотическую достаточность статистических оценок $\check{\theta}_T$ и $\bar{\theta}_T$.

Все рассмотренные в работе вопросы связаны лишь с одномерным параметром. Перенесение полученных результатов на многомерный случай не представляет большого труда. Заметим, что все условия значительно упрощаются, если коэффициенты уравнения (1) не зависят от x, т. е. $\xi_\theta(t)$ является случайным процессом с независимыми приращениями (этот случай при $a(t, x, \theta) \equiv 0$ изучен в работе [2]).

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., 1975. 2. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическая нормальность стохастических интегралов по локальной мартингальной мере и свойства статистических оценок и критериев для процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1980, вып. 23. 3. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961. 4. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия и проверка гипотез для неоднородных процессов Пуассона.— Теория случайных процессов, 1980, вып. 8. 5. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическое поведение вероятностей ошибок критерия наибольшего правдоподобия при различении точечных процессов с непрерывными компенсаторами.— В кн.: Поведение систем в случайных средах. Киев, 1979. 6. *Линьков Ю. Н.* О вероятностях ошибок проверки близких гипотез для диффузионных процессов.— Теория случайных процессов, 1979, вып. 7. 7. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М., 1964. 8. *Русас Дж.* Контигуальность вероятностных мер. М., 1975. 9. *Грамс Х., Линьков Ю. Н.* О зависимости асимптотического поведения байесовских оценок от априорного распределения параметра.— В кн.: Поведение систем в случайных средах. Киев, 1977. 10. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М., 1979. 11. *Линьков Ю. Н.* Об информации в диффузионном процессе относительно параметра.— Теория случайных процессов, 1978, вып. 6. 12. *Линьков Ю. Н.* О неравенствах типа неравенства Крамера—Рао и асимптотической достаточности статистических оценок.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 19.

Поступила в редколлегию 29.08.79

Yu. N. Linkov

ASYMPTOTICAL PROPERTIES OF STATISTICAL ESTIMATES AND CRITERIA FOR MARKOV PROCESSES

The asymptotical normality of the random processes which are represented in the form of the sum of stochastic integral on Wiener process and stochastic integral on local martingale measure is proved. Asymptotical behaviour of probabilities of errors of the likelihood criterion is investigated and asymptotically local the most powerfull criterion for Markov processes is obtained. The asymptotical normality and convergence of the moments for the maximum likelihood estimates and Bayes estimates of the parameters of Markov processes in the regular case is proved. The asymptotical formula for the quantity of Shannon information which is contained in Markov process relatively the continuous random parameter is obtained.