УДК 519.21

Ю. С. МИШУРА, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

О СВОЙСТВАХ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИЛЬНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Пусть $\{\xi_t, \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ — мартингал, $T = N$ или $T = R$, $[\xi]_t$ — квадратическая вариация ξ_t, $[\xi] = \lim\limits_{t \to \infty} [\xi]_t$. Буркхолдером В. Л., Дэвисом Б. И. и Мейером П. А. [1 — 3] доказаны неравенства

$$\alpha_p M [\xi]^{p/2} \leqslant M (\sup_{t \in T} |\xi_t|)^p \leqslant \beta_p M [\xi]^{p/2}, \tag{1}$$

$p \geqslant 1$, α_p и β_p зависят только от p. В настоящей работе получены обобщения неравенств (1) для двупараметрических сильных мартингалов (частичные обобщения этих неравенств для дискретных двупараметрических мартингалов приведены в работах [4—6], для непрерывных мартингалов, «порожденных» винеровским случайным полем,— в работе [7]).

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, Z_2^+ — двумерная целочисленная решетка, состоящая из точек с неотрицательными координатами. Положим $\mathbf{q} \leqslant \mathbf{q}'$, если $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in Z_2^+$, $q_1 \leqslant q_1'$, $q_2 \leqslant q_2'$, $A_\mathbf{q} = \{\mathbf{q}' \in Z_2^+ : \mathbf{q}' \leqslant \mathbf{q}\}$, $\overline{A}_{q_i} \doteq U_{q_i'=q_i} A_{\mathbf{q}'}$, $i = 1, 2$; $A_{\mathbf{q},p_1} = A_{p_1 q_2} \cup \cup \{A_{q_1 q_2+1} \setminus A_\mathbf{q}\}$, $p_1 > q_1$, $p_1 \in N$. Пусть также $\mathfrak{F}_\mathbf{q}$, $\mathbf{q} \in Z_2^+$ — поток σ-алгебр, $\mathfrak{F}_\mathbf{q} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\mathbf{p} \subseteq \mathfrak{F}_\mathbf{q}$, $\mathbf{p} \leqslant \mathbf{q}$, $\gamma^i_{q_i} = \bigvee_{q_i'=q_i} \mathfrak{F}_{\mathbf{q}'}$, $i = 1, 2$; $\gamma_\mathbf{q} = \gamma^1_{q_1} \vee \vee \gamma^2_{q_2}$, $H_\mathbf{q} = \gamma^2_{q_2} \vee \mathfrak{F}_{q_1 q_2+1}$, $H_{\mathbf{q},p_1} = \mathfrak{F}_{p_1 q_2} \vee \mathfrak{F}_{q_1 q_2+1}$, $p_1 > q_1$. Заметим, что для любых $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ из Z_2^+ либо $H_p \subseteq H_q$, либо $H_q \subseteq H_p$; кроме того, $H_{q,p_1} \subseteq H_\mathbf{q} \subseteq \gamma_\mathbf{q}$ для всех $p_1 \in N$.

Пусть случайное поле $\xi_\mathbf{q} = \xi_\mathbf{q}(\omega) : Z_2^+ \times \Omega \to R$ удовлетворяет условию: $\xi_\mathbf{q} = 0$, если хотя бы одна координата точки $\mathbf{q}$ равна нулю, $M|\xi_\mathbf{q}| < \infty$, $\mathbf{q} \in Z_2^+$.

Тогда $\xi_\mathbf{q}$ назовем сильным мартингалом, если $\xi_\mathbf{q}$ $\mathfrak{F}_\mathbf{q}$-измеримо и $M\{\square\xi_\mathbf{q}/\gamma_{\mathbf{q}-1}\} = 0$, и H-мартингалом, если $\xi_\mathbf{q}$ $H_\mathbf{q}$-измеримо и $M\{\square\xi_\mathbf{q}/H_{\mathbf{q}-1}\} = 0$ ($\square\xi_\mathbf{q} = \square_{\mathbf{q}-1}\xi_\mathbf{q}$). Очевидно, любой сильный мартингал будет также H-мартингалом.

Введем обозначения $\xi^* = \sup\limits_{\mathbf{q} \in Z_2^+} |\xi_\mathbf{q}|$, $[\xi]_\mathbf{q} = \Sigma_{\mathbf{q}' \in A_\mathbf{q}} (\square\xi_{\mathbf{q}'})^2$, $[\xi]_{\mathbf{q},p_1} = \Sigma_{\mathbf{q}' \in A_{\mathbf{q},p_1}} (\square\xi_{\mathbf{q}'})^2$, $[\xi]_{p_1} = \sum_{\mathbf{q}' \in \overline{A}_{p_1}} (\square\xi_{\mathbf{q}'})^2$, $[\xi] = \sum_{\mathbf{q} \in Z_2^+} (\square\xi_{\mathbf{q}'})^2$.

Лемма 1. Пусть $\{\xi_{\mathbf{q}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}\in Z_2^+\}$ — сильный мартингал. Тогда для любого $a>0$

$$P\{[\xi]>a\}\leqslant 9a^{-1/3}+(4a^{-2/3}+13a^{-1/3})\sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} M|\xi_{\mathbf{q}}|.$$

Следствие 1. Если $\sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} M|\xi_{\mathbf{q}}|<\infty$, то квадратическая вариация сильного мартингала $\xi_{\mathbf{q}}$ конечна с вероятностью 1 (для однопараметрических мартингалов соответствующее утверждение доказано в работе [8]).

Доказательство. Пусть $p_1\in N$, $\mu>0$. Определим случайный «момент времени» $\tau=(\tau_1, \tau_2)$ следующим образом: $\tau=\mathbf{q}\in \bar{A}_{p_1}$, если $\sup_{\mathbf{q}'\in A_{\mathbf{q}-1,p_1}} |\xi_{\mathbf{q}'}|\leqslant\mu$, $|\xi_{\mathbf{q}}|>\mu$. Тогда событие $\{\tau\in A_{\mathbf{q},p_1}\}\subseteq H_{\mathbf{q},p_1}$. Заметим, что

$$[\xi]_{\mathbf{q}-1,p_1}=-2\sum\nolimits_{\mathbf{q}'\in A_{q_1q_2-1,p_1}}(\xi_{q_1'-1q_2'}-\xi_{\mathbf{q}'-1})\,\square\xi_{\mathbf{q}'}+$$

$$+\sum\nolimits_{q_2'=1}^{q_2-1}(\xi_{p_1q_2'}-\xi_{p_1q_2'-1})^2+2(\xi_{q_1-1q_2}-\xi_{\mathbf{q}-1})(\xi_{\mathbf{q}}-\xi_{q_1q_2-1})-$$

$$-(\xi_{q_1-1q_2}-\xi_{\mathbf{q}-1})^2.$$

Пусть $\nu_{\mathbf{q}}=\tau$, если $\tau\in A_{\mathbf{q}-1,p_1}$; $\nu_{\mathbf{q}}=\mathbf{q}$, если $\tau\bar{\in} A_{\mathbf{q}-1,p_1}$. Тогда

$$M[\xi]_{\nu_{\mathbf{q}}-1,p_1}\leqslant-2\sum\nolimits_{\mathbf{q}'\in A_{\mathbf{q}(+-)},p_1}M((\xi_{\mathbf{q}'(-+)}-\xi_{\mathbf{q}'-1})\,\chi\{\tau\bar{\in}A_{\mathbf{q}'-1,p_1}\}\times$$

$$\times M\{\square\xi_{\mathbf{q}'}\,|\,H_{\mathbf{q}'-1,p_1}\})+\sum\nolimits_{q_2'=1}^{q_2-1}M(\xi_{p_1q_2'}-\xi_{p_1q_2'-1})^2\chi\{\tau_2>q_2'-1\}+$$

$$+2M(\xi_{\nu_{\mathbf{q}}(-+)}-\xi_{\nu_{\mathbf{q}}-1})(\xi_{\nu_{\mathbf{q}}}-\xi_{\nu_{\mathbf{q}}(+-)})=M\xi^2_{p_1\nu_{\mathbf{q},2}-1}+2M(\xi_{\nu_{\mathbf{q}}(-+)}-$$

$$-\xi_{\nu_{\mathbf{q}}-1})(\xi_{\nu_{\mathbf{q}}}-\xi_{\nu_{\mathbf{q}}(+-)})\leqslant\mu^2+4\mu M|\xi_{\nu_{\mathbf{q}}}-\xi_{\nu_{\mathbf{q}}(+-)}|\,(\mathbf{q}^{(+-)}=(q_1, q_2-1),$$

$$\mathbf{q}^{(-+)}=(q_1-1, q_2)).$$

Так как $\xi_{\mathbf{q}}$ является сильным мартингалом,

$$M|\xi_{\nu_{\mathbf{q}}}-\xi_{\nu_{\mathbf{q}}(+-)}|=\sum\nolimits_{\mathbf{q}'\in A}\int_{\{\nu_{\mathbf{q}}=\mathbf{q}'\}}|\xi_{\mathbf{q}'}-\xi_{\mathbf{q}'(+-)}|\,dP\leqslant$$

$$\leqslant\sum\nolimits_{\mathbf{q}'\in A}\int_{\{\nu_{\mathbf{q}}=\mathbf{q}'\}}|\xi_{p_1q_2'}-\xi_{p_1q_2'-1}|\,dP\leqslant M|\xi_{p_1\nu_{\mathbf{q},2}}-\xi_{p_1\nu_{\mathbf{q},2}-1}|\leqslant$$

$$\leqslant\mu+M|\xi_{p_1\nu_{\mathbf{q},2}}|,\quad |\xi_{p_1\nu_{\mathbf{q},2}}|\leqslant\mu+|\xi_{p_1\tau_2}|.$$

Событие $\{\tau_2 \leqslant p_2\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{p}}$, поэтому

$$M|\xi_{p_1\tau_2}| \leqslant \sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} M|\xi_{\mathbf{q}}| = s,$$

откуда

$$M[\xi]_{\nu_{\mathbf{q}}-1, p_1} \leqslant 9\mu^2 + 4\mu M|\xi_{p_1\tau_2}| \leqslant 9\mu^2 + 4\mu s. \tag{2}$$

Упорядочим точки из $\bar{A}_{p_1}$ следующим образом: $\mathbf{q}' < \mathbf{q}$, если $\mathbf{q}' \in \in A_{\mathbf{q}-1, p_1}$. Перейдя в левой части (2) к пределу по упорядоченной последовательности точек $\mathbf{q} \in \bar{A}_{p_1}$, такой, что $q_2 \to \infty$, получим $M[\xi]_{\tau-1, p_1} \leqslant 9\mu^2 + 4\mu s$. Теперь, используя неравенство $\mu P\{\xi^* > \mu\} \leqslant \leqslant 13s$ [9] и выбирая $\mu = a^{1/3}$, находим

$$P\{[\xi]_{p_1} > a\} \leqslant P\{[\xi]_{p_1} > a,\ \xi^* < a^{1/3}\} + P\{\xi^* > a^{1/3}\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{[\xi]_{\tau-1, p_1} > a\} + P\{\xi^* > a^{1/3}\} \leqslant a^{-1} M[\xi]_{\tau-1, p_1} + 13a^{-1/3} s \leqslant$$

$$\leqslant 9a^{-1/3} + (4a^{-2/3} + 13a^{-1/3}) \sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} M|\xi_{\mathbf{q}}|. \tag{3}$$

Перейдя в левой части (3) к пределу при $p_1 \to \infty$, завершаем доказательство.

Лемма 2. Пусть $\{\xi_{\mathbf{q}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}, \mathbf{q} \in Z_2^+\}$ — сильный мартингал. Тогда он допускает представление в виде суммы двух H-мартингалов $\xi_{\mathbf{q}} = \alpha_{\mathbf{q}} + \beta_{\mathbf{q}}$, где $\alpha_{\mathbf{q}} = 0$, если $q_1 = 0$ либо $q_2 = 0$,

$$\square\alpha_{\mathbf{q}} = \alpha'_{\mathbf{q}} - M\{\alpha'_{\mathbf{q}} \mid H_{\mathbf{q}-1}\},$$

$$\alpha'_{\mathbf{q}} = \square\xi_{\mathbf{q}} \chi\{\square\xi_{\mathbf{q}} \leqslant 2 \sup_{\mathbf{q}'\in A_{\mathbf{q}-1}} |\square\xi_{\mathbf{q}'}|\},$$

$$\square\beta_{\mathbf{q}} = \beta'_{\mathbf{q}} - M\{\beta'_{\mathbf{q}} / H_{\mathbf{q}-1}\},$$

$$\beta'_{\mathbf{q}} = \square\xi_{\mathbf{q}} \chi\{\square\xi_{\mathbf{q}} > 2 \sup_{\mathbf{q}'\in A_{\mathbf{q}-1}} |\square\xi_{\mathbf{q}'}|\},$$

$$\square\alpha_{\mathbf{q}} \leqslant 4 \sup_{\mathbf{q}'\in A_{\mathbf{q}-1}} |\square\xi_{\mathbf{q}'}|; \tag{4}$$

$$M \sum_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\square\beta_{\mathbf{q}}| \leqslant 4 \sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} M|\square\xi_{\mathbf{q}}|. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно, случайное поле $\alpha_{\mathbf{q}}$ $H_{\mathbf{q}}$-измеримо, $M\{\square\alpha_{\mathbf{q}}/H_{\mathbf{q}-1}\} = 0$, $M\{\beta'_{\mathbf{q}}/H_{\mathbf{q}-1}\} = -M\{\alpha'_{\mathbf{q}}/H_{\mathbf{q}-1}\}$. Поэтому $\alpha_{\mathbf{q}}$ и $\beta_{\mathbf{q}}$ являются H-мартингалами. Неравенство (4) очевидно. Далее,

$$|\beta'_{\mathbf{q}}| \leqslant ((\square\xi_{\mathbf{q}} + 2 \sup_{\mathbf{q}'\in A_{\mathbf{q}-1}} |\square\xi_{\mathbf{q}'}|) - 2 \sup_{\mathbf{q}'\in A_{\mathbf{q}-1}} |\square\xi_{\mathbf{q}'}|) \times$$

$$\times\chi(\square\xi_q > 2\sup_{q'\in A_{q-1}}|\square\xi_{q'}|) \leqslant (2|\square\xi_q| - 2\sup_{q'\in A_{q-1}}|\square\xi_{q'}|) \leqslant$$

$$\leqslant 2(\sup_{q'\in A_{q_1q_2-1}}|\square\xi_{q'}| - \sup_{q'\in A_{q-1}}|\square\xi_{q'}|).$$

Поэтому

$$\sum_{q\in Z_2^+}|\beta'_q| \leqslant 2\sum_{q\in Z_2^+}(\sup_{q'\in A_{q_1q_2-1}}|\square\xi_{q'}| - \sup_{q'\in A_{q-1}}|\square\xi_{q'}|) = 2\sup_{q\in Z_2^+}|\square\xi_q|,$$

$$M\sum_{q\in Z_2^+}|\square\beta_q| \leqslant 2M\sum_{q\in Z_2^+}|\beta'_q| \leqslant 4\sup_{q\in Z_2^+}M|\square\xi_q|.$$

Лемма 3. Пусть $\{\xi_q, H_q, q\in Z_2^+\}$ — H-мартингал, удовлетворяющий условию: $|\square\xi_{q+1}| \leqslant \zeta_q$, где случайное поле ζ_q H_q-измеримо. Тогда

$$M[\xi]^{1/2} \leqslant 11M\xi^* + M\zeta^*,$$

$$M\xi^* \leqslant 11M[\xi]^{1/2} + M\zeta^*.$$

Доказательство. Пусть $p_1\in N$, $\mu > 0$, случайный момент $\tau = (\tau_1, \tau_2) = q$, если $|\xi_{q'}| + |\zeta_{q'}| \leqslant \mu$, $q' \in A_{q-1,p_1}$, $|\xi_q| + |\zeta_q| > \mu$, $v_q = \tau$, если $\tau \in A_{q-1,p_1}$; $v_q = q$ в противном случае. Тогда на множестве $\{\omega : v_q = q\}$ $|\xi_{v_q}| = |\xi_q| \leqslant |\xi_q| + |\zeta_q| \leqslant \mu$, на множестве $\{\omega : v_q = \tau = q' \in A_{q-1,p_1}\}$ $|\xi_{v_q}| \leqslant |\square\xi_{v_q}| + |\square\xi_{v_q} - \xi_{v_q}| \leqslant 3\mu$, т. е. $|\xi_{v_q}| \leqslant 3\mu$ для всех $q\in Z_2^+$, и $|\xi_\tau| \leqslant \sup_{q\in Z_2^+}|\xi_{v_q}| \leqslant 3\mu$. Теперь

$$P\{[\xi]_{p_1} > \mu^2\} \leqslant P\{\tau_2 < \infty\} + \sum_{i=1}^{p_1}P\{\tau_2 = \infty,\ \tau_1 = i,\ [\xi]_{p_1} > \mu^2\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\xi^* + \zeta^* > \mu\} + P\{[\xi]_{\tau,p_1} > \mu^2\} \leqslant P\{\xi^* + \zeta^* > \mu\} + \mu^{-2}M[\xi]_{\tau,p_1}.$$

Так как ξ_q H-мартингал, то

$$M[\xi]_{\tau,p_1} = \sum_{q\in\bar{A}_{q_1}} M(\square\xi_q)^2\chi\{\tau \bar{\in} A_{q-1,p_1}\} = M(\xi_\tau - \xi_{\tau_1\tau_2-1})^2 +$$

$$+ \sum_{q_2=1}^{\infty} M(\xi_{p_1q_2} - \xi_{p_1q_2-1})^2\chi\{\tau_2 > q_2 - 1\}.$$

Теперь

$$M\{\xi_{p_1q_2}|\gamma^2_{q_2-1}\} = \xi_{p_1q_2-1} + \sum_{i=1}^{p_1}M\{\square\xi_{iq_2}|H_{i-1q_2-1}|\gamma^2_{q_2-1}\} = \xi_{p_1q_2-1};$$

событие $\{\tau_2 > q_2 - 1\} \in \gamma^2_{q_2-1}$ и

$$\sum_{q_2=1}^{\infty} M(\xi_{p_1q_2} - \xi_{p_1q_2-1})^2\chi\{\tau_2 > q_2 - 1\} = M\xi^2_{p_1\tau_2-1}.$$

Следовательно,

$$P\{[\xi]_{p_1} > \mu^2\} \leqslant P\{\xi^* + \zeta^* > \mu\} + \mu^{-2}(M(\xi_\tau - \xi_{\tau_1\tau_2-1})^2 + M\xi^2_{p_1\tau_2-1}) \leqslant$$

$$\leqslant P\{\xi^* + \zeta^* > \mu\} + \mu^{-2}(2M\xi_\tau^2 + 2M\xi^2_{\tau_1\tau_2-1} + M\xi^2_{p_1\tau_2-1}) \leqslant$$
$$\leqslant P\{\xi^* + \zeta^* > \mu\} + 5\mu^{-2}M(\xi^* \wedge \mu)^2.$$

Перейдя к пределу при $p_1 \to \infty$, получаем

$$P\{[\xi] > \mu^2\} \leqslant P\{\xi^* + \zeta^* > \mu\} + 5\mu^{-2}M(\xi^* \wedge \mu)^2. \tag{6}$$

Используя (6), оценим $M[\xi]^{1/2}$:

$$M[\xi]^{1/2} \leqslant \int_0^\infty P\{\xi^* + \zeta^* > \mu\}\, d\mu + 5M \int_0^\infty \mu^{-2}(\xi^* \wedge \mu)^2\, d\mu \leqslant 11M\xi^* + M\zeta^*.$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_{\mathbf{q}}, \mathfrak{F}_{\mathbf{q}}, \mathbf{q} \in Z_2^+\}$ — сильный мартингал. Тогда для любого $p \geqslant 1$ $L_p M[\xi]^{p/2} \leqslant M(\xi^*)^p \leqslant N_p M[\xi]^{p/2}$, где постоянные L_p и N_p зависят только от p.

Доказательство. Для $p > 1$ доказательство опирается на обобщенное неравенство Хинчина [4] и проводится аналогично доказательству теоремы 1 этой работы. Пусть $p = 1$. Выпишем представление мартингала $\xi_{\mathbf{q}}$ согласно лемме 2: $\xi_{\mathbf{q}} = \alpha_{\mathbf{q}} + \beta_{\mathbf{q}}$. Тогда

$$[\xi]^{1/2} \leqslant [\alpha]^{1/2} + [\beta]^{1/2} \leqslant [\alpha]^{1/2} + \sum_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\Box\beta_{\mathbf{q}}|,\ \alpha^* \leqslant \xi^* +$$
$$+ \sum_{q\in Z_2^+} |\Box\beta_{\mathbf{q}}|.$$

Согласно (4) — (5) и лемме 3

$$M[\alpha]^{1/2} \leqslant 11M\alpha^* + 4M \sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\Box\xi_{\mathbf{q}}|,$$

откуда

$$M[\xi]^{1/2} \leqslant 11M\xi^* + 12\sum_{q\in Z_2^+} M|\Box\beta_{\mathbf{q}}| + 4M \sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\Box\xi_{\mathbf{q}}| \leqslant 11M\xi^* +$$
$$+ 52M \sup_{q\in Z_2^+} |\Box\xi_{\mathbf{q}}| \leqslant 219M\xi^*.$$

Аналогично $\xi^* \leqslant \alpha^* + \beta^* \leqslant \alpha^* + \sum_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\Box\beta_{\mathbf{q}}|$, $[\alpha]^{1/2} \leqslant [\xi]^{1/2} + \sum_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\Box\beta_{\mathbf{q}}|$. Согласно (4) — (5) и лемме 3

$$M\alpha^* \leqslant 11M[\alpha]^{1/2} + 4M \sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\Box\xi_{\mathbf{q}}|,$$

откуда

$$M\xi^* \leqslant 11M[\alpha]^{1/2} + 8M \sup_{\mathbf{q}\in Z_2^+} |\Box\xi_{\mathbf{q}}| \leqslant 74M[\xi]^{1/2}.$$

2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $t \in R_2^+$, $A_t = \{s : s \leqslant t\}$, $\mathfrak{F}_t$ — поток σ-алгебр, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s \geqslant t} \mathfrak{F}_s$, $\gamma^1_{t_1} = \bigvee_{t_2 \geqslant 0} \mathfrak{F}_t$, $\gamma^2_{t_2} = \bigvee_{t_1 \geqslant 0} \mathfrak{F}_t$, $\gamma_t = \gamma^1_{t_1} \vee \gamma^2_{t_2}$. Случайное поле $\xi(t)$, $t \in R_2^+$ [н]азовем сильным мартингалом, если $\xi(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измеримо, $\xi(t_1, 0) = \xi(0, t_2) = 0$, $M|\xi(t)| < \infty$, $t \in R_2^+$, $M\{\square_s \xi(t)/\gamma_s\} = 0$, $t \geqslant s$ $\square_s \xi(t) = \xi(t) - \xi(s_1, t_2) - \xi(t_1, s_2) + \xi(s))$.

Далее рассматриваются сильные мартингалы, удовлетворяющие [у]словию

A: $\sup M\xi^2(t) < \infty$, траектории $\xi(t)$ непрерывны с вероятностью 1.

Согласно [10] в этом случае мартингал $\xi(t)$ имеет квадрати[ч]ескую характеристику — $\mathfrak{F}_t$-измеримое непрерывное случайное поле $[\xi]_t$ такое, что $\square_s [\xi]_t \geqslant 0$ с вероятностью 1, $[\xi]_{t_1,0} = [\xi]_{0,t_2} = 0$,

$$M\{(\square_s \xi(t))^2/\gamma_s\} = M\{\square_s [\xi]_t/\gamma_s\},$$

$$[\xi]_t = P - \lim_{\lambda \to 0} \sum_{s_k \in A_t, k \leqslant k'} (\square_{s_k} \xi(s_{k+1}))^2,$$

$$s_k \leqslant s_{k+1}, \quad s_{k'+1} = t, \quad s_k = (s_{k_1}, s_{k_2}), \quad \lambda = \max|s_{k+1} - s_k|.$$

[З]аметим, что для указанного мартингала $\xi(t)$ на множестве Ω', $P(\Omega') = 1$, для каждого $t_1 \geqslant 0$ существует предел п. н. $\xi(t_1, \infty) = \lim\limits_{t_2 \to \infty} \xi(t)$. Согласно [11] и неравенству Дуба $\xi(t_1, \infty)$ является [н]епрерывным квадратично интегрируемым мартингалом. Обозна[ч]им квадратическую характеристику $\xi(t_1, \infty)$ через $\alpha(t_1)$.

Лемма 4. Для всех $t_1 \geqslant 0$ $\alpha(t_1) = \lim\limits_{t_2 \to \infty} [\xi]_t$.

Следствие 2. Пусть $\alpha = \lim [\xi]_t$. Тогда $\alpha = \lim\limits_{t_1 \to \infty} \alpha(t_1)$.

Доказательство. Пусть $t_1 > s_1$. Тогда в силу равномерной [и]нтегрируемости случайных процессов $\xi^2(t)$, $\xi^2(s_1, t_2)$, $[\xi]_t$, $[\xi]_{s_1 t_2}$ как [ф]ункций t_2

$$M((\xi(t_1, \infty) - \xi(s_1, \infty))^2/\gamma^1_{s_1}) = \lim_{t_2 \to \infty} M((\xi(t) - \xi(s_1, t_2))^2/\gamma^1_{s_1}) =$$

$$= \lim_{t_2 \to \infty} M((\alpha(t) - \alpha(s_1, t_2))/\gamma^1_{s_1}) = M(\lim_{t_2 \to \infty} (\alpha(t) - \alpha(s_1, t_2))/\gamma^1_{s_1}). \quad (7)$$

[В] силу непрерывности $\xi(t_1, \infty)$ и единственности квадратической [х]арактеристики из (8) вытекает утверждение леммы.

Теорема 2. Пусть $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in R_2^+\}$ — сильный мартингал, [у]довлетворяющий условию A. Тогда для любого $p \geqslant 1$

$$\tilde{L}_p M [\xi]^{p/2} \leqslant M(\xi^*)^p \leqslant \tilde{N}_p M [\xi]^{p/2},$$

[г]де постоянные $\tilde{L}_p$ и $\tilde{N}_p$ зависят только от p.

Доказательство. С учетом введенных обозначений, из (1) вытекает, что существуют постоянные L_p и N_p такие, что

$$L_p M\alpha^{p/2} \leqslant M(\sup_{t_1} |\xi(t_1, \infty)|)^p \leqslant N_p M\alpha^{p/2}.$$

Очевидно, $\sup_{t_1} |\xi(t_1, \infty)| \leqslant \xi^*$; в силу леммы 4 $\alpha = [\xi]$, откуда следует справедливость левой части доказываемого неравенства. Если $p > 1$, то из неравенства Дуба и свойств сильных мартингалов получаем

$$M(\xi^*)^p \leqslant M(\sup_{t_2}(\sup_{t_1} |\xi(\mathrm{t})|))^p \leqslant p^p (p-1)^{-p} M(\sup_{t_1} |\xi(t_1, \infty)|)^p \leqslant$$
$$\leqslant p^p (p-1)^{-p} N_p M[\xi]^{p/2},$$

т. е. правая часть неравенства верна при $\bar{N}_p = p^p (p-1)^{-p} N_p$. Пусть $p = 1$. Будем считать, что $|\xi(\mathrm{t})| + [\xi]_{\mathrm{t}} < C$ для некоторого $C > 0$ (в противном случае можно ввести момент остановки $\tau_C = \inf(\mathrm{t}: \sup_{\mathrm{s} \leqslant (t,t)} (|\xi(\mathrm{s})| + [\xi]_{\mathrm{s}}) > C)$ и рассматривать сильный мартингал $\xi_C(t) = \xi(t_1 \wedge \tau_C, t_2 \wedge \tau_C)$, а затем перейти к пределу при $C \to \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим сильный мартингал ($[0, \mathrm{t}] = [0, t_1] \times [0, t_2]$)

$$\zeta_{\mathrm{t}} = \int_{[0,\mathrm{t}]} ([\xi]_s + \varepsilon)^{-1/4} d\xi_s.$$

Указанный интеграл существует [12]. Далее,

$$M\zeta^2(\mathrm{t}) = M\int_{[0,\mathrm{t}]} ([\xi]_s + \varepsilon)^{-1/2} d[\xi]_s,$$

и, как нетрудно убедиться, в силу возрастания $[\xi]_{\mathrm{s}}$

$$M\zeta^2(\mathrm{t}) \leqslant M([\xi]_{\mathrm{t}} + \varepsilon)^{1/2}.$$

Кроме того, $\xi_{\mathrm{t}} = \int_{[0.\mathrm{t}]} ([\xi]_{\mathrm{s}} + \varepsilon)^{1/4} d\zeta_{\mathrm{s}}$. Применяя формулу интегрирования по частям для интегралов указанного вида от непрерывных функций, получаем

$$\xi(\mathrm{t}) \leqslant \left| \int_{[0,\mathrm{t}]} \zeta_s d([\xi]_{\mathrm{s}} + \varepsilon)^{1/4} \right| + \left| \int_0^{t_1} \zeta(s_1, t_2)\, d_{s_1} ([\xi]_{\mathrm{s}} + \varepsilon)^{1/4} \right| +$$
$$+ \left| \int_0^{t_2} \zeta(t_1, s_2)\, d_{s_2} ([\xi]_s + \varepsilon)^{1/4} \right| + |\zeta(\mathrm{t})([\xi]_{\mathrm{t}} + \varepsilon)^{1/4}|,$$

откуда

$$\xi^* \leqslant 4\zeta^*([\xi] + \varepsilon)^{1/4}. \qquad (8)$$

Так как $\zeta(\mathrm{t})$ — сильный мартингал, то согласно [11]

$$M(\zeta^*)^2 \leqslant 16 \sup_{\mathrm{t}} M\zeta^2(\mathrm{t}) \leqslant 16M([\xi] + \varepsilon)^{1/2}.$$

Применив к (8) неравенство Гельдера, получим

$$M\xi^* \leqslant 64(M(\zeta^*)^2)^{1/2}(M([\xi]+\varepsilon)^{1/2})^{1/2} \leqslant 64M([\xi]+\varepsilon)^{1/2}.$$

Для завершения доказательства остается перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

1. *Burkholder B. L.* Martingale transforms. — Ann. Math. Statist., 1966, **37**, N 6. 2. *Davis B. I.* On the integrability of martingale square functions.— Israel J. Math., 1970, **8**, N 2. 3. *Meyer P.-A.* Martingales and stochastic integrals. I.— In: Lect. Notes Math., vol. 284. Berlin, 1972. 4. *Metraux C.* Quelques inégalités pour martingales *á* paramétre bidimensionnel.— In: Lect. Notes Math., vol. 649. Berlin, 1978. 5. *Brossard J.* Généralisation des inégalités de Burkholder et Gundy aux martingales règulières á deux indices.— C. r. Acad. sci., 1979. **AB288**, N 4. 6. *Bernard A.* Espaces H¹ de martingales *á* deux indices. Dualité avéc les martingales de type «BMO».— Bull. Sci. Math., 1979, **103**, N 3. 7. *Brossard J.*, *Chevalier L.* Espaces H^p de martingales bi-browniennes.— C. r. Acad. Sci., 1979, **AB289**, N 3. 8. *Austin B. G.* A sample function property of martingales.— Ann. Math. Statist., 1966, **37**, N 5. 9. *Walsh J. B.* Convergence and regularity of multiparameter strong martingales.— Z. Wahr. und verw. Gebiete, 1979, **46**, N 2. 10. *Гихман И. И.* Квадратически интегрируемые разностные мартингалы двух аргументов.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1976, вып. 15. 11. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов в г. Друскининкай, т. 1. Вильнюс, 1975. 12. *Гихман И. И.*, *Пясецкая Т. Е.* Два типа стохастических интегралов по мартингальным мерам на плоскости.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 11.

Поступила в редколлегию 06.08.80

Yu. S. Mishura

ON PROPERTIES OF QUADRATIC VARIATION OF TWO-PARAMETER STRONG MARTINGALES

The generalizations of Burkholder — Davis — Meyer inequalities for quadratic variation of two-parameter strong martingales are proved.

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ОБ ОДНОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье рассматривается игра двух лиц с нулевой суммой. Первый игрок задает стационарную случайную последовательность $\xi(n)$ со значениями в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве X, удовлетворяющую условиям $M\xi(n)=0$, $M\|\xi(n)\|^2=1$. Второй игрок по наблюдениям последовательности $\xi(n)$ при $n = -1, -2, \ldots$ находит линейную оценку $\hat{A}\xi$ величины $A\xi =$