Применив к (8) неравенство Гельдера, получим

$$M\xi^* \leqslant 64(M(\zeta^*)^2)^{1/2}(M([\xi]+\varepsilon)^{1/2})^{1/2} \leqslant 64M([\xi]+\varepsilon)^{1/2}.$$

Для завершения доказательства остается перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

1. *Burkholder B. L.* Martingale transforms. — Ann. Math. Statist., 1966, **37**, N 6. 2. *Davis B. I.* On the integrability of martingale square functions.— Israel J. Math., 1970, **8**, N 2. 3. *Meyer P.-A.* Martingales and stochastic integrals. I.— In: Lect. Notes Math., vol. 284. Berlin, 1972. 4. *Metraux C.* Quelques inégalités pour martingales á paramétre bidimensionnel.— In: Lect. Notes Math., vol. 649. Berlin, 1978. 5. *Brossard J.* Généralisation des inégalités de Burkholder et Gundy aux martingales règulières á deux indices.— C. r. Acad. sci., 1979. **AB288**, N 4. 6. *Bernard A.* Espaces H¹ de martingales á deux indices. Dualité avéc les martingales de type «BMO».— Bull. Sci. Math., 1979, **103**, N 3. 7. *Brossard J.*, *Chevalier L.* Espaces H^p de martingales bi-browniennes.— C. r. Acad. Sci., 1979, **AB289**, N 3. 8. *Austin B. G.* A sample function property of martingales.— Ann. Math. Statist., 1966, **37**, N 5. 9. *Walsh J. B.* Convergence and regularity of multiparameter strong martingales.— Z. Wahr. und verw. Gebiete, 1979, **46**, N 2. 10. *Гихман И. И.* Квадратически интегрируемые разностные мартингалы двух аргументов.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1976, вып. 15. 11. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов в г. Друскининкай, т. 1. Вильнюс, 1975. 12. *Гихман И. И.*, *Пясецкая Т. Е.* Два типа стохастических интегралов по мартингальным мерам на плоскости.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 11.

Поступила в редколлегию 06.08.80

Yu. S. Mishura

ON PROPERTIES OF QUADRATIC VARIATION OF TWO-PARAMETER STRONG MARTINGALES

The generalizations of Burkholder — Davis — Meyer inequalities for quadratic variation of two-parameter strong martingales are proved.

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ОБ ОДНОЙ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье рассматривается игра двух лиц с нулевой суммой. Первый игрок задает стационарную случайную последовательность $\xi(n)$ со значениями в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве X, удовлетворяющую условиям $M\xi(n)=0$, $M\|\xi(n)\|^2=1$. Второй игрок по наблюдениям последовательности $\xi(n)$ при $n = -1, -2, \ldots$ находит линейную оценку $\hat{A}\xi$ величины $A\xi =$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \langle a(j), \xi(j) \rangle$, где $a(j)$ — последовательность со значениями в X, удовлетворяющая условию $\sum_{j=0}^{\infty} \| a(j) \| < \infty$. Функция выигрыша определяется ошибкой оценки значения $A\xi$. Показано, что игра решается в чистых стратегиях, найдена цена игры и пара чистых стратегий игроков.

Пусть X—действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — ортонормированный базис в X. Случайная последовательность $\xi(n)$ со значениями в X стационарна, если ее компоненты $\xi_k(n) = \langle \xi(n), e_k \rangle$ удовлетворяют условиям [1, 2]: $M\xi_k(n) = 0$, $M\|\xi(n)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k^2(n) < \infty$, $M\xi_k(n)\xi_j(m) = \langle B(n-m) e_k, e_j \rangle$. Корреляционная функция $B(n, m) = B(n-m)$ последовательности является операторной функцией в X, а корреляционный оператор $B = B(0)$ является ядерным: $\sum_{k=1}^{\infty} \langle Be_k, e_k \rangle = M \| \xi(n) \|^2 < \infty$. В зависимости от свойств замкнутого линейного многообразия $H_\xi(n)$, порожденного в гильбертовом пространстве H действительных случайных величин второго порядка [3] величинами $\xi_k(s)$, $s \leqslant n$, $k = 1, 2, \ldots$, случайная последовательность $\xi(n)$ может быть регулярной $\left(\bigcap_n H_\xi(n) = 0 \right)$, сингулярной $\left(\bigcap_n H_\xi(n) = H_\xi(s) \ \forall s \in N \right)$ или ортогональной в H суммой регулярной $\xi^R(n)$ и сингулярной $\xi^S(n)$ последовательностей [1], т. е. $\xi_k(n) = \xi_k^R(n) + \xi_k^S(n)$, $k = 1, 2, \ldots$. Если стационарная последовательность $\xi(n)$ регулярная, то существует спектральная плотность $f(\lambda)$ — положительная операторная функция переменной $\lambda \in [-\pi, \pi]$ в гильбертовом пространстве X, такая, что $\langle B(n-m) e_k, e_j \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)} \langle f(\lambda) e_k, e_j \rangle \, d\lambda$, $k, j = 1, 2, \ldots$. Спектральная плотность при п. в. λ является ядерным оператором, и ее ядерная норма интегрируема

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f(\lambda) e_k, e_k \rangle \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle B(0) e_k, e_k \rangle = M \| \xi(n) \|^2 < \infty.$$

Регулярная стационарная последовательность $\xi(n)$ со значениями в X допускает каноническое разложение [1]

$$\xi(n) = \sum_{u=-\infty}^{n} \sum_{m=1}^{M} g_m(n-u) \, \eta_m(u), \tag{1}$$

де $\eta_m(u)$, $m=\overline{1, M}$, $u=0, \pm 1, \ldots$ — взаимно ортогональные в H лучайные последовательности с ортогональными значениями, M — ратность последовательности $\xi(n)$ $(M \leqslant \dim X)$, $g_m(u)$, $m=\overline{1, M}$ — ункции со значениями в X, такие, что $\sum\limits_{u=0}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{M} \|g_m(u)\|^2 < \infty$. При том $H_\xi(n) = \bigoplus\limits_{m=1}^{M} H_{\eta_m}(n)$.

Для того чтобы игра была полностью определена, нужно указать, как измерять ошибку оценки величины $A\xi$. Будем брать в качестве меры ошибки оценки величину $\|A\xi - \hat{A}\xi\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} M[A_k\xi - \hat{A}_k\xi]^2$, где $A_k\xi = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_k(j)\xi_k(j)$. Другими словами, функция выигрыша равна сумме среднеквадратических отклонений слагаемых в выражении $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_k(j)\xi_k(j)\right] = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\langle a(j), \xi(j)\rangle$. Заметим, что ограничение $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|a(j)\| < \infty$, наложенное на последовательность $a(j)$, $j=0, 1, 2, \ldots$, обеспечивает выполнение условия $M[A\xi]^2 < \infty$. Первый игрок стремится максимизировать величину $\|A\xi - \hat{A}\xi\|^2$, а второй игрок пытается минимизировать эту величину.

Вычислим $\max\min\|A\xi - \hat{A}\xi\|^2$. Если случайная последовательность $\xi(n)$ задана, то выражение $M[A_k\xi - \hat{A}_k\xi]^2$ будет минимальным, когда $\hat{A}_k\xi = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_k(j)\hat{\xi}_k(j)$, где $\hat{\xi}_k(j)$ — линейная экстраполяция значения $\xi_k(j)$ по наблюдениям последовательности $\xi(n)$ при $n=-1, -2, \ldots$. Кроме того, множество стратегий первого игрока можно ограничить только регулярными последовательностями, так как любая стационарная последовательность представима в виде ортогональной в H суммы регулярной и сингулярной последовательностей [1], а сингулярная последовательность экстраполируется безошибочно. Учитывая каноническое разложение (1) регулярных последовательностей и нормировку $M\|\xi(n)\|^2 = 1$, можно утверждать, что $\hat{\xi}_k(j) = \sum\limits_{u=-\infty}^{-1} \sum\limits_{m=1}^{M} g_{mk}(j-u)\eta_m(u)$ и множество стратегий первого игрока — это множество функций $g_m(u)$, $m=\overline{1, M}$ со значениями в X ($g_m(u)=0$ при $u<0$), удовлетворяющих ограничению

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} \sum_{u=0}^{\infty} g_{mk}^2(u) = M\|\xi(n)\|^2 = 1. \qquad (2)$$

Учитывая все сказанное, получаем

$$\min \| A\xi - \hat{A}\xi \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_k(j) (\xi_k(j) - \hat{\xi}_k(j)) \right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} a_k(j) a_k(n) \sum_{u=0}^{\min(j,n)} g_{mk}(j-u) g_{mk}(n-u) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} g_{mk}(p) g_{mk}(q) \sum_{u=0}^{\infty} a_k(u+p) a_k(u+q) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} Q_k(p, q) g_{mk}(p) g_{mk}(q).$$

Оператор Q_k, заданный в гильбертовом пространстве l_2 матрицей $\{Q_k(p, q)\}$; $p, q = 0, 1, 2, \ldots$, можно представить в виде $Q_k = A_k^2$, где A_k — оператор в l_2, заданный матрицей с элементами $a_k(u, v) = a_k(u + v - 2)$, $u, v = 1, 2, \ldots$. Оператор A_k будет симметричным вполне непрерывным, если $\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} a_k^2(u, v) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_k^2(j) < \infty$. Будем предполагать, что последовательность $a_k(j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условию $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \| a(j) \|^2 < \infty$. Тогда при каждом $k = 1, 2, \ldots$ оператор Q_k будет вполне непрерывным и, следовательно, будет иметь собственные значения $\mu_{k1}^2 \geqslant \mu_{k2}^2 \geqslant \ldots$, где μ_{kj}, $j = 1, 2, \ldots$ — собственные значения оператора A_k [4]. С учетом нормировки (2) $\max \min \| A\xi - \hat{A}\xi \|^2 = \max_k \mu_{k1}^2 = \lambda$, где μ_{k1}^2 — наибольшее собственное значение оператора Q_k.

Перед тем как приступать к вычислению $\min \max \| A\xi - \hat{A}\xi \|^2$, покажем справедливость следующего утверждения.

Лемма. Определенная выше игра двух лиц с нулевой суммой при дополнительном ограничении $a(j) = 0$ и $j > N$ имеет решение в чистых стратегиях. Цена игры λ_N равна максимуму из наибольших собственных значений $\mu_{k,N}^2$ операторов $Q_{k,N} = A_{k,N}^2$, $k = 1, 2, \ldots$ в R^{N+1}, где $A_{k,N}$ — оператор, заданный матрицей $\{a_k(u, v)\}_{u=\overline{1,N+1}}^{v=\overline{1,N+1}}$, $a_k(u, v) = a_k(u + v - 2)$ при $u + v < N + 2$, $a_k(u, v) = 0$ при $u + v > N + 2$. Оптимальной стратегией первого игрока будет последовательность с компонентами $\langle \xi(n), e_v \rangle = \delta_{vk} \sum_{u=n-N}^{n} g_k(n-u) \eta(u)$, $v = 1, 2, \ldots$. Оптимальной стратегией

орого игрока будет оценка $\hat{A}_N\xi = \sum_{j=0}^{N} \langle a(j), \hat{\xi}(j)\rangle$, $\langle \hat{\xi}(j), e_v\rangle =$
$\delta_{vk} \sum_{u=j-N}^{-1} g_k(j-u)\eta(u)$. Здесь $\{g_k(u)\}_{u=\overline{0,N}}$ — собственный вектор,
вечающий максимальному собственному значению $\mu^2_{k,N} = \lambda_N$ опе-
тора $Q_{k,N}$.

Вычислим максимин. Поскольку множество стратегий первого
рока можно ограничить регулярными последовательностями, то,
итывая каноническое представление (1) регулярных последова-
льностей, запишем

$$\min \| A_N\xi - \hat{A}_N\xi \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M\left[\sum_{j=0}^{N} a_k(j)(\xi_k(j) - \hat{\xi}_k(j))\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_k(j)a_k(n)\sum_{u=0}^{\min(n,j)} g_{mk}(j-u)g_{mk}(n-u) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} g_{mk}(p)g_{mk}(q)\sum_{u=0}^{\min(N-p,N-q)} a_k(u+p)a_k(u+q) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} Q_k(p,q)g_{mk}(p)g_{mk}(q).$$

ринимая во внимание нормировку (2), находим, что $\max\min \| A_N\xi -$
$- \hat{A}_N\xi \|^2$ равен максимуму из наибольших собственных значений
ператоров $Q_{k,N} = A^2_{k,N}$ в R^{N+1}, заданных матрицами с элементами
$_k(p,q) = \sum_{u=0}^{\min(N-p,N-q)} a_k(u+p)a_k(u+q)$, $p, q = 0, 1, \ldots, N$.

Вычислим $\min\max \| A_N\xi - \hat{A}_N\xi \|^2$. Используя тот факт, что ре-
гулярная последовательность имеет спектральную плотность, можно
аписать

$$\| A_N\xi - \hat{A}_N\xi \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M\left[\sum_{j=0}^{N} a_k(j)\xi_k(j) - \sum_{j=-\infty}^{-1} c_k(j)\xi_k(j)\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M\left[\sum_{j=-\infty}^{N} b_k(j)\xi_k(j)\right]^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{N}\sum_{u=-\infty}^{N} b_k(j)b_k(u) \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(j-u)} \langle f(\lambda)e_k, e_k\rangle d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |b_k(\lambda)|^2 \langle f(\lambda)e_k, e_k\rangle d\lambda.$$

Здесь $b_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} a_k(j) e^{ij\lambda} - \sum_{j=-\infty}^{-1} c_k(j) e^{ij\lambda}$. В силу того, что $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda = 1$, находим

$$\max_{\xi} \| A_N \xi - \hat{A}_N \xi \|^2 = \max_{f(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} | b_k(\lambda) |^2 \langle f(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda =$$

$$= \max_{k} \max_{\lambda} | b_k(\lambda) |^2.$$

Чтобы вычислить $\max_{\lambda} | b_k(\lambda) |^2$, рассмотрим класс всех степенных рядов $f(z)$, регулярных при $|z| < 1$ и начинающихся с заданных членов $\sum_{k=0}^{N} d_k z^k$. Обозначим через μ_N^2 наибольшее собственное значение матрицы с элементами $h_{pq} = \sum_{m=0}^{\min(p,q)} d_{p-m} d_{q-m}$ при $p \leqslant q$, $h_{pq} = \overline{h}_{qp}$ при $p > q$; $p, q = 0, 1, \ldots, N$. Тогда [5] $\max_{|z|=1} | f(z) |^2 \geqslant \mu_N^2$, причем равенство достигается для функций вида $f(z) = \mu_N e^{i\gamma} \prod_{j=1}^{N} (z + \omega_j)(1 + \overline{\omega}_j z)$, где γ вещественно, а $|\omega_j| < 1$. В нашем случае нужно найти наибольшее собственное значение μ_N^2 симметричной матрицы с элементами $h_{pq}^{(k)} = h_{qp}^{(k)} = \sum_{u=0}^{\min(p,q)} a_k(N - p + u) a_k(N - q + u)$, $p, q = 0, 1, \ldots, N$. А так как $h_{N-p,N-q}^{(k)} = Q_k(p, q)$, то $\min \max \|A_n \xi - \hat{A}_N \xi\|^2$ равен максимуму из наибольших собственных значений операторов $Q_{k,N}$. Лемма доказана.

Вычислим минимакс исходной задачи. Для этого аппроксимируем каждый оператор A_k в l_2, заданный матрицей с элементами $a_k(u, v) = a_k(u + v - 2)$, $u, v = 1, 2, \ldots$, оператором $A_{k,N}$, заданным матрицей с элементами $a_k(u, v) = a_k(u + v - 2)$ при $u + v \leqslant N + 2$, $a_k(u, v) = 0$ при $u + v > N + 2$. В силу того, что $\sum_{j=0}^{\infty} (j + 1) \| a(j) \|^2 < \infty$, оператор A_k симметричный вполне непрерывный и разность квадратов абсолютных норм операторов A_k и $A_{k,N}$, равная $N^2(A_k) - N^2(A_{k,N}) = \sum_{j=N+1}^{\infty} (j + 1) a_k^2(j)$, стремится к нулю при $N \to \infty$. Но $\| A \| \leqslant N(A)$. Поэтому последовательность операторов $A_{k,N}$ при $N \to \infty$ сходится к оператору A_k равномерно: $\lim_{N \to \infty} \| A_k - A_{k,N} \| = 0$. Так

$-\mu_{k,N}| \leqslant \|A_k - A_{k,N}\|$, где μ_k, $\mu_{k,N}$ — максимальные соб-
значения операторов A_k и $A_{k,N}$ соответственно [6], то
$=\mu_k$. Далее, оператор $A_{k,N}$ можно получить из оператора
положить $a_k(j)=0$ при $j>N$. При этом

$$\|A\xi - A_N\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\xi - A_{k,N}\xi\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M\Big[\sum_{j=N+1}^{\infty} a_k(j)\,\xi_k(j)\Big]^2 \leqslant \Big[\sum_{j=N+1}^{\infty} \|a(j)\|\Big]^2 \to 0,$$

$\to\infty$, в силу того, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\|a(j)\|$ сходится. Из дока-
ммы следует, что $\min\max\|A\xi - \hat{A}\xi\|^2$ равен максимуму
ьших собственных значений операторов Q_k. Таким обра-
зана следующая теорема.

ема. Описанная выше антагонистическая игра имеет ре-
чистых стратегиях. Цена игры λ равна максимуму из наи-
собственных значений вполне непрерывных операторов Q_k
товом пространстве l_2, заданных матрицами с элементами
$= \sum_{u=0}^{\infty} a_k(u+p)\,a_k(u+q)$, $p, q=0, 1, \ldots$. Оптимальной стра-
рвого игрока будет случайная последовательность с ком-
и $\langle\xi(n), e_v\rangle = \delta_{vk} \sum_{u=-\infty}^{n} g_k(n-u)\,\eta(u)$, $v=1, 2, \ldots$. Опти-
стратегией второго игрока будет оценка $\hat{A}\xi = \sum_{j=0}^{\infty}\langle a(j),$
$(j), e_v\rangle = \delta_{vk} \sum_{u=-\infty}^{-1} g_k(j-u)\,\eta(u)$, $v=1, 2, \ldots$. Здесь $g_k(u)$,
… — собственный вектор, отвечающий максимальному соб-
у значению $\mu_k^2=\lambda$ оператора Q_k.

lianpur G., Mandrekar V. Multiplicity and representation theory of purely
inistic stochastic processes.— Теория вероятностей и ее применения,
. 2. *Розанов Ю. А.* Теория обновляющих процессов. М., 1974. 3. *Гих-
, Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971. 4. *Ахи-
Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом простран-
966. 5. *Гренандер У., Сеге Г.* Теплицевы формы и их применения. М.,
лд С. Вариационные методы в задачах на собственные значения. М.,

Поступила в редколлегию 06.03.80

M. P. Moklyachuk

ON TWO-PERSON ZERO-SUM GAME AND PREDICTION OF STATIONARY RANDOM SEQUENCES WITH VALUES IN HILBERT SPACE

Two-person zero-sum game is considered. Player I chooses a stationary random sequence $\xi(n)$ with values in a separable real Hilbert space X, $M\xi(n)=0$, $M\|\xi(n)\|^2=1$. Player II estimates $\sum_{j=0}^{\infty}\langle a(j), \xi(j)\rangle$ where $a(j)$—fixed sequence with values in X, $\sum_{j=0}^{\infty}\|a(j)\|<\infty$, using the values of $\xi(n)$ when $n=-1, -2, \ldots$. Payoff is equal to value of the estimation error.

УДК 519.21

В. С. ПОЛЕЩУК, канд. физ.-мат. наук
Днепропетровский университет

О МОМЕНТАХ ЧАСТОТ ПРЕБЫВАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ БЛУЖДАНИЙ В ФИКСИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Пусть для каждого $\varepsilon\geqslant 0$ $\{\zeta_\varepsilon(n), n\geqslant 0\}$ — однородная неприводимая цепь Маркова со множеством состояний $H=\{1, 2, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\|P_{ij}(\varepsilon)\|_{i,j\in H}$, удовлетворяющих условию $\lim_{\varepsilon\to 0} P_{ij}(\varepsilon)=P_{ij}(0)$, $i, j\in H$, где цепь Маркова $\{\zeta_0(n), n\geqslant 0\}$ возвратна.

При изучении предельных теорем для сумм $\sum_{k=1}^{n} f_\varepsilon(\zeta_\varepsilon(k)), n\geqslant 1$, где $f_\varepsilon(j)$, $j\in H$ — неслучайные функции, приходится устанавливать асимптотически равномерную по $\varepsilon\to 0$ сходимость следующих рядов: $\sum_{i\in H} f_\varepsilon(j) M_i\nu_\varepsilon(i, j)$, $\sum_{j\in H}\sum_{k\in H} f_\varepsilon(j) f_\varepsilon(k) M_i\nu_\varepsilon(i, j)\nu_\varepsilon(i, k)$, где $\nu_\varepsilon(i, j)$ — число попаданий цепи Маркова $\xi_\varepsilon(n)$ в состояние j до первого попадания в состояние i [1, гл. 7].

Задача проверки равномерной сходимости этих рядов сводится к исследованию поведения моментов случайных величин $\nu_\varepsilon(i, j)$. Эта статья посвящена изучению $M_i\nu_\varepsilon(i, j)$ и $M_i\nu_\varepsilon(i, j)\nu_\varepsilon(i, k)$ в случае, когда $\{\zeta_\varepsilon(n), n\geqslant 0\}$, $\varepsilon\geqslant 0$ — управляемые блуждания.

Пусть для каждого $\varepsilon\geqslant 0$ $\{\zeta_\varepsilon(n), n\geqslant 0\}$ — двумерная неприводимая апериодичная возвратная цепь Маркова со множеством состояний $H=D\times E$, где $D=\{1, 2, \ldots, m\}$, $m<\infty$, $E=\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, и переходными вероятностями

$$P\{\zeta_\varepsilon(n+1)=(j, x+y)/\zeta_\varepsilon(n)=(i, x)\}=P\{\zeta_\varepsilon(n+1)=$$
$$=(j, y)/\zeta_\varepsilon(n)=(i, 0)\}=P_{ij}(\varepsilon, y),\quad i, j\in D,\quad x, y\in E,\quad P_{ij}(\varepsilon, y)\geqslant 0,$$