M. P. Moklyachuk

ON TWO-PERSON ZERO-SUM GAME AND PREDICTION OF STATIONARY RANDOM SEQUENCES WITH VALUES IN HILBERT SPACE

Two-person zero-sum game is considered. Player I chooses a stationary random sequence $\xi(n)$ with values in a separable real Hilbert space X, $M\xi(n)=0$, $M\|\xi(n)\|^2=1$. Player II estimates $\sum_{j=0}^{\infty}\langle a(j), \xi(j)\rangle$ where $a(j)$—fixed sequence with values in X, $\sum_{j=0}^{\infty}\|a(j)\|<\infty$, using the values of $\xi(n)$ when $n=-1, -2, \ldots$. Payoff is equal to value of the estimation error.

УДК 519.21

В. С. ПОЛЕЩУК, канд. физ.-мат. наук
Днепропетровский университет

О МОМЕНТАХ ЧАСТОТ ПРЕБЫВАНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ БЛУЖДАНИЙ В ФИКСИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Пусть для каждого $\varepsilon\geqslant 0$ $\{\zeta_\varepsilon(n), n\geqslant 0\}$ — однородная неприводимая цепь Маркова со множеством состояний $H=\{1, 2, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\|P_{ij}(\varepsilon)\|_{i,j\in H}$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}P_{ij}(\varepsilon)=P_{ij}(0)$, $i, j\in H$, где цепь Маркова $\{\zeta_0(n), n\geqslant 0\}$ возвратна.

При изучении предельных теорем для сумм $\sum_{k=1}^{n} f_\varepsilon(\zeta_\varepsilon(k)), n\geqslant 1$, где $f_\varepsilon(j)$, $j\in H$ — неслучайные функции, приходится устанавливать асимптотически равномерную по $\varepsilon\to 0$ сходимость следующих рядов: $\sum_{j\in H} f_\varepsilon(j) M_i\nu_\varepsilon(i, j)$, $\sum_{j\in H}\sum_{k\in H} f_\varepsilon(j) f_\varepsilon(k) M_i\nu_\varepsilon(i, j)\nu_\varepsilon(i, k)$, где $\nu_\varepsilon(i, j)$ — число попаданий цепи Маркова $\xi_\varepsilon(n)$ в состояние j до первого попадания в состояние i [1, гл. 7].

Задача проверки равномерной сходимости этих рядов сводится к исследованию поведения моментов случайных величин $\nu_\varepsilon(i, j)$. Эта статья посвящена изучению $M_i\nu_\varepsilon(i, j)$ и $M_i\nu_\varepsilon(i, j)\nu_\varepsilon(i, k)$ в случае, когда $\{\zeta_\varepsilon(n), n\geqslant 0\}$, $\varepsilon\geqslant 0$ — управляемые блуждания.

Пусть для каждого $\varepsilon\geqslant 0$ $\{\zeta_\varepsilon(n), n\geqslant 0\}$ — двумерная неприводимая апериодичная возвратная цепь Маркова со множеством состояний $H=D\times E$, где $D=\{1, 2, \ldots, m\}$, $m<\infty$, $E=\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, и переходными вероятностями

$$P\{\zeta_\varepsilon(n+1)=(j, x+y)/\zeta_\varepsilon(n)=(i, x)\}=P\{\zeta_\varepsilon(n+1)=$$
$$=(j, y)/\zeta_\varepsilon(n)=(i, 0)\}=P_{ij}(\varepsilon, y),\quad i, j\in D,\quad x, y\in E,\quad P_{ij}(\varepsilon, y)\geqslant 0,$$

$$\sum_{j\in D}\sum_{y\in E} P_{ij}(\varepsilon, y) = 1.$$

Обозначим

$$\nu_\varepsilon(i, x; j, y; k, z) = \sum_{n=1}^{\tau_\varepsilon^{\{(j,y)\}}(i,x)} \delta(\zeta_\varepsilon(n), (k, z)),$$

где $\tau_\varepsilon^A(i, x) = \min(n > 0: \zeta_\varepsilon(n) \in A,\ \zeta_\varepsilon(0) = (i, x)),\ A \subset H,$

$$\delta((i, x), (j, y)) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, x) = (j, y), \\ 0, & \text{если } (i, x) \neq (j, y). \end{cases}$$

В силу однородности цепи Маркова $\{\zeta_\varepsilon(n),\ n \geqslant 0\}$ по второй компоненте распределения случайных величин $\nu_\varepsilon(i, x+h; j, y+h; k, z+h)$, $\nu_\varepsilon(i, x; j, y; k, z)$ совпадают при любом $h \in E$.

Теорема. Для любого $\varepsilon \geqslant 0$ и всех $i, j, k \in D,\ x, y \in E$ $M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; i, x) = 1$, $M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) \leqslant a(\varepsilon)$, $M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) \times \nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; k, y) \leqslant b(\varepsilon)[(1 - \delta((i, 0), (k, y)))|x| + (1 - \delta((i, 0), (j, x)))|y|] + c(\varepsilon)$.

Если выполняется условие

(А): $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P_{ij}(\varepsilon, x) = P_{ij}(0, x)$ для всех $x \in E,\ i, j \in D$, то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ $M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) \leqslant a$, $M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x)\, \nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; k, y) \leqslant b[(1 - \delta((i, 0), (k, y)))|x| + (1 - \delta((i, 0), (j, x)))|y|] + c$. Здесь $0 < a(\varepsilon),\ b(\varepsilon),\ c(\varepsilon),\ a, b, c < \infty$.

Эта теорема улучшает результат, сформулированный в лемме 9 [1].

Лемма 1. Для любых состояний $(i, 0), (j, x), (k, y) \in H$

$$M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x)\,\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; k, y) = \delta((j, x), (k, y)) \times$$
$$\times M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) + (1 - \delta((i, 0), (k, y)))\, M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; k, y) \times$$
$$\times M\nu_\varepsilon(k, y; i, 0; j, x) + (1 - \delta((i, 0), (j, x)))\, M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) \times$$
$$\times M\nu_\varepsilon(j, x; i, 0; k, y).$$

Эта лемма доказана в работе [2].

Пусть $A \subset H$ — такое подмножество, что $1 \leqslant |A| < \infty$. Определим функции $H_\varepsilon^A(i, x; j, y)$ на $H \times A$ и $\Pi_\varepsilon^A(i, x; j, y)$ на $A \times A$ следующими равенствами:

$$H_\varepsilon^A(i, x; j, y) = \begin{cases} P\{\zeta_\varepsilon(\tau_\varepsilon^A(i, x) = (j, y)\}, & \text{если } (i, x) \in H \setminus A,\ (j, y) \in A, \\ \delta((i, x), (j, y)), & \text{если } (i, x), (j, y) \in A, \end{cases}$$

$$\Pi_\varepsilon^A(i, x; j, y) = P\{\zeta_\varepsilon(\tau_\varepsilon^A(i, x)) = (j, y)\},\ (i, x),\ (j, y) \in A.$$

Лемма 2. Для любых состояний $(i, x), (j, y) \in H$

$$\sum_{(t,w)\in A} M\nu_\varepsilon(i, x; i, x; t, w)(\Pi_\varepsilon^A(t, w; j, y) - \delta((t, w), (j, y))) = 0.$$

Пусть

$$ {}_AP_{ij}^{(n)}(\varepsilon, y-x) = P\{\zeta_\varepsilon(n) = (j, y),\ \tau_\varepsilon^A(i, x) > n\}, $$

$$ G_\varepsilon^A(i, x; j, y) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} {}_AP_{ij}^{(n)}(\varepsilon, y-x), & \text{если } (i, x), (j, y) \notin A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} $$

Известно [3, с. 432], что $G_\varepsilon^A(i, x; j, y) < \infty$ для всех $(i, x), (j, y) \in H$.

Из определений $\nu_\varepsilon(i, x; j, y; k, z)$ и $G_\varepsilon^A(i, x; j, y)$ следует, что

$$ M\nu_\varepsilon(i, x; j, y; k, z) = G_\varepsilon^{\{(j,y)\}}(i, x; k, z) + \delta((i, x), (j, y)) \times $$
$$ \times M\nu_\varepsilon(i, x; i, x; k, z) + \delta((k, z), (j, y)) - \delta((i, x), (k, z)). \tag{1} $$

Лемма 3. Для любых состояний $(i, x) \in H$, (j, y), $(k, z) \in A$

$$ H_\varepsilon^A(i, x; k, z) = \delta((j, y), (k, z)) + \sum_{(t,w)\in A} G_\varepsilon^{\{(i,x)\}}(j, y; t, w)\,(\Pi_\varepsilon^A(t, w; k, z) - $$
$$ - \delta((t, w), (k, z))). $$

Доказательство лемм 2 и 3 можно найти в работе [3, § 33].

Доказательство теоремы. Известно [4, с. 81], что

$$ M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} P_{ij}^{(n)}(\varepsilon, x-x)}{\sum_{n=0}^{N} P_{ii}^{(n)}(\varepsilon, 0)} = M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, 0). $$

Здесь

$$ P_{ij}^{(n)}(\varepsilon, y-x) = P\{\zeta_\varepsilon(n) = (j, y)/\zeta_\varepsilon(0) = (i, x)\}. $$

Отсюда

$$ M\nu_\varepsilon(i, 0, i, 0; i, x) = 1, \quad i \in D, \quad x \in E, \quad \varepsilon \geqslant 0; \tag{2} $$

$$ M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) \leqslant a(\varepsilon), \quad i, j \in D, \quad x \in E, \quad \varepsilon \geqslant 0, \tag{3} $$

где $a_\varepsilon = \max_{i,j\in D} M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, 0) < \infty$.

Если выполняется условие (А), то

$$ \lim_{\varepsilon\to 0} M\nu_\varepsilon(i, x; j, y; k, z) = M\nu_0(i, x; j, y; k, z) \tag{4} $$

для всех $(i, x), (j, y), (k, z) \in H$ [5, с. 275]. Отсюда в силу конечности множества D найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 a(\varepsilon) \leqslant \leqslant a(0) + 1 = a$, т. е. $M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x) \leqslant a < \infty$, $i, j \in D$, $x \in E$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Докажем вторую часть теоремы. В силу леммы 1, соотношений (1), (3) и того, что

$$ G_\varepsilon^{\{(i,0)\}}(k, y, j, x) \leqslant G_\varepsilon^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x) \tag{5} $$

, с. 432], имеем

$$Иν_ε(i, 0; i, 0; j, x)\, ν_ε(i, 0; i, 0; k, y) \leqslant a(ε) + (1 - δ((i, 0), (k, y))) \times$$
$$\times a(ε)(G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x) + a(ε) + 1) + (1 - δ((i, 0), (j, x)))\, a(ε) \times$$
$$\times (G_ε^{\{(i,0)\}}(k, y; k, y) + a(ε) + 1). \qquad (6)$$

Исследуем функцию $G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x)$. Пусть сначала $x > 0$, $A =$ $\{(j, x-1), (j, x)\}$. Тогда по лемме 3

$$_ε^A(i, 0; j, x-1) = G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x-1)(\Pi_ε^A(j, x-1; j, x-1) - 1) +$$
$$+ G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x)\, \Pi_ε^A(j, x; j, x-1).$$

Учитывая лемму 2, находим

$$H_ε^A(i, 0; j, x-1) = G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x)\, \Pi_ε^A(j, x; j, x-1) -$$
$$- G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x-1)\, Mν_ε(j, x-1; j, x-1; j, x)\, \Pi_ε^A(j, x; j, x-1).$$

Для нашей цепи Маркова $\Pi_ε^A(j, x; k, y) \neq 0$ при всех $A \subset H$ и $, x), (k, y) \in A$, поэтому

$$G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x) = \frac{H_ε^A(i, 0; j, x-1)}{\Pi_ε^{\{(j,x-1),(j,x)\}}(j, x; j, x-1)} + G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x-1) \times$$
$$\times Mν_ε(j, 0; j, 0; j, 1).$$

з соотношений (2), (5) и однородности цепи Маркова по второй эмпоненте следует

$$G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x) \leqslant \frac{1}{\Pi_ε^{\{(j,0),(j,1)\}}(j, 1; j, 0)} + G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x-1; j, x-1).$$

терируя это неравенство, получаем

$$G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j; x) \leqslant \frac{x}{\Pi_ε^{\{(j,0),(j,1)\}}(j, 1; 1, 0)} + G_ε^{\{(i,0)\}}(j, 0; j, 0).$$

очно такое же неравенство (с заменой x на $-x$) получаем для < 0, $A = \{(j, x), (j, x+1)\}$. Окончательно

$$G_ε^{\{(i,0)\}}(j, x; j, x) \leqslant \frac{|x|}{\Pi_ε^{\{(j,0),(j,1)\}}(j, 1, j, 0)} + G_ε^{\{(i,0)\}}(j, 0; j, 0). \qquad (7)$$

з соотношений (6), (7) и того, что $G_ε^{\{(i,0)\}}(j, 0; j, 0) \leqslant Mν_ε(j, 0; i, 0;$ $0) + 1$, следует

$$Иν_ε(i, 0; i, 0; j, x)\, ν_ε(i, 0; i, 0; k, y) \leqslant b(ε)[(1 - δ((i, 0), (k, y)))\,|x| +$$
$$+ (1 - δ((i, 0), (j, x)))\,|y|] + c(ε),$$

где $b(\varepsilon) = a(\varepsilon) \max_{j \in D} (\Pi_\varepsilon^{\{(j,0),(j,1)\}}(j, 1; j, 0))^{-1}$, $c(\varepsilon) = a(\varepsilon)(2 \max_{i,j \in D} M\nu_\varepsilon(j, 0; i, 0; j, 0) + 2a(\varepsilon) + 5)$.

Так как при выполнении условия (А)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon^{\{(j,0),(j,1)\}}(j, 1; j, 0) = \Pi_0^{\{(j,0),(j,1)\}}(j, 1; j, 0)$$

для всех $j \in D$ (см. [5, с. 274]) и имеет место (4), то в виду конечности множества D найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$b(\varepsilon) \leqslant (a(0) + 1)[\max_{j \in D} (\Pi_0^{\{(j,0),(j,1)\}}(j, 1; j, 0)^{-1} + 1] = b < \infty,$$

$$C(\varepsilon) \leqslant (a(0) + 1)(2 \max_{i,j \in D} M\nu_0(j, 0; i, 0; j, 0) + 2a(0) + 9) = c < \infty.$$

Таким образом,

$$M\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; j, x)\,\nu_\varepsilon(i, 0; i, 0; k, y) \leqslant b[(1 - \delta((i, 0), (k, y)))\,|x| + \\ + (1 - \delta((i, 0), (j, x)))\,|y|] + c$$

для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Теорема доказана.

1. *Милешина Р. И.* Предельные теоремы для случайного блуждания, управляемого цепью Маркова.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1975, вып. 13. 2. *Полещук В. С.* Предельные распределения для двойных сумм случайных величин, определенных на счетной цепи Маркова.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1975, вып. 13. 3. *Хеннекен П. Л., Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М., 1974. 4. *Чжун Кай-лай.* Однородные цепи Маркова. М., 1964. 5. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций. Киев, 1974.

Поступила в редколлегию 21.03.79

V. S. Poleshchuk

ABOUT THE MOMENTS OF FREQUENCIES OF SOJOURNS OF CONTROLLED WALKS IN FIXED STATE

Two-dimensional recurrent Markov's chains the second component of which is homogeneous are considered. The first and the second moments for frequencies of sojourns of these chains in fixed state are estimated.

УДК 519.21

А. И. ПОНОМАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ОБ ОЦЕНКАХ СРЕДНЕГО ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $\xi(\varphi) = \{\xi_i(\varphi)\}_{i=\overline{1,n}}$, $\varphi \in D(G)$ — вещественное однородное в широком смысле n-мерное обобщенное случайное поле на локально компактной абелевой группе G с нулевым средним, $M\xi(\varphi) = 0$, записываемое как вектор-столбец (см. [1]). Обозначим через $Z =$