УДК 519.21

А. Н. РАДЧЕНКО, асп.
Киевский университет

# О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕРАХ МНОЖЕСТВА УРОВНЯ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Среди задач исследования множества фиксированного уровня случайного поля $\xi: B \subset R^m \to R^n$ представляет интерес изучение геометрической меры этого множества при $m > n$, т. е. в случае, когда компонентами множества уровня являются, вообще говоря, некоторые многообразия (кривые, поверхности и т. п.). Такого рода задачи возникают в гидродинамике [1]. Первые результаты в этой области принадлежат С. Коррсину, в частности, получившему [2] соотношение

$$L_y = 0{,}5\pi N_y, \tag{1}$$

где $L_y$ — средняя длина множества уровня $y$ однородного изотропного скалярного случайного поля на множестве единичной меры Лебега в $R^2$, $N_y$ — среднее число пересечений этого множества единичным отрезком произвольной проходящей в плоскости этого уровня прямой. Этому же вопросу посвящены работы [3, 4]. Аналогичное формуле (1) соотношение для множества уровня скалярного поля на произвольном $R^d$ $(d > 1)$ использовано в статье [5].

В данной работе на основе общей теории геометрических мер [6] при некоторых предположениях о поведении траекторий случайной функции $\xi(x, \omega)$ получены условия почти наверное (п. н.) эквивалентности различных определений геометрической меры множества уровня и ряд следствий этой эквивалентности. В частности, получены обобщения соотношений типа (1).

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\xi: B \times \Omega \to R^n$ — п. н. непрерывная на открытом множестве $B \subset R^m$ случайная функция и $m > n$. Так как множество $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ (где $A \subset B$) может быть сколь угодно сложным, то в качестве его меры естественно рассматривать такое обобщение понятия площади $(m - n)$-мерной поверхности, которое позволяло бы говорить об $(m - n)$-мерной мере множества независимо от его структуры. Существует целый ряд таких обобщений, аналогичных $(m - n)$-мерной хаусдорфовой мере и, вообще говоря, различных (см. [6], 2.10.1 — 2.10.6), т. е. целый ряд различных $(m - n)$-мерных мер. Далее, когда будет утверждаться, что некоторое свойство выполняется для любой $k$-мерной меры, то будет подразумеваться, что речь идет именно о мерах, рассмотренных в работе [6]. Наиболее удобными в данном случае являются так называемые сферическая и интегрально-геометрическая с экспонентой 1 $(m - n)$-мерные меры — соответственно $S^{m-n}(\cdot)$ и $I_1^{m-n}(\cdot)$ (последнюю будем писать без индекса внизу и называть просто интегрально-геометрической).

Перечислим некоторые важнейшие свойства геометрических мер.

1. Они определены для любого $A \subset R^m$ и являются внешними мерами на $R^m$. Все они — меры (т. е. σ-аддитивны) на σ-алгебре борелевских множеств. Для любой геометрической меры $G(\cdot)$ и всякого $A \subset R^m$ существует такое борелевское $A' \supset A$, что $G(A') = G(A)$ ([6], 2.10.1).

2. Сферическая и хаусдорфова $k$-мерные меры определены при $k = 0, 1, \ldots, m$, а все остальные — при $k = 1, \ldots, m$, причем для любых $k \geqslant 1$ и $k$-мерной меры $G^k(\cdot)$ выполнено

$$S^k(\cdot) \geqslant G^k(\cdot) \geqslant I^k(\cdot).$$

3. Для всякого $(S^k, k)$-спрямляемого множества $A \subset R^m$ и любой $k$-мерной меры $G^k(\cdot)$ (при $k = 1, \ldots, m$) $S^k(A) = G^k(A) = I^k(A)$ ([6], 3.2.26). Если же $S^k(A) < +\infty$, то равенство $S^k(A) = I^k(A)$ выполнено тогда и только тогда, когда $A$ является $(S^k, k)$-спрямляемым ([6], 3.3.19). Свойство $(S^k, k)$-спрямляемости множества определяется следующим образом ([6], 3.2.14). Множество $A \subset R^m$ называется счетно $k$-спрямляемым ($k = 1, \ldots, m$) тогда, когда существует не более чем счетный набор ограниченных $E_j \subset R^k$ и удовлетворяющих условию Липшица $f_j : R^k \to R^m$, для которого $A \subset U_j f_j(E_j)$. Если для $A \subset R^m$ существует счетно $k$-спрямляемое $A^0 \subset R^m$ такое, что $S^k(A \setminus A^0) = 0$, то множество $A$ называется счетно $(S^k, k)$-спрямляемым, а если, кроме того, $S^k(A) < +\infty$, то просто $(S^k, k)$-спрямляемым.

4. Для любого борелевского $A \subset R^m$ и любого $k = 1, \ldots, m$

$$I^k(A) = \beta_1(m, k)^{-1} \int\int N(p, z, A)\, dp dz,$$

где $p \in O^*(m, k)$ — множество всевозможных «проекторов» из $R^m$ в $R^k$, $z \in R^k$, $N(p, z, A)$ — число точек множества $A \cap \{x : p(x) = z\}$ (если множество бесконечно, то $N(\cdot) = \infty$).

$$\beta_1(m, k) = \Gamma[(k+1)/2]\, \Gamma[(m-k+1)/2] / \Gamma[(m+1)/2]\, \Gamma(1/2),$$

а интегрирование производится по мере на $O^*(m, k) \times R^k$, являющейся произведением инвариантной нормированной меры $\theta^*_{m,k}$ на $O^*(m, k)$ и меры Лебега на $R^k$, которую будем в дальнейшем обозначать $L^k(\cdot)$ ([6], 2.10.15).

Пусть

$$G_y^{m-n}(A) = G^{m-n}(x \in A : \xi(x, \omega) = y);$$

$$N_y(p, z, A) = N(p, z, \{x \in A : \xi(x, \omega) = y\});$$

$\sigma(B)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств множества $B$; $D_x$ — множество функций, определенных в некоторой окрестности точки

$x\in R^m$ и дифференцируемых в этой точке,

$$J_n f(x)=\sqrt{\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant m}|D_{i_1,\ldots,i_n}f(x)|^2},$$

где $D_{i_1,\ldots,i_n}f(x)$ — минор $n$-го порядка, образованный элементами столбцов с номерами $i_1<\ldots<i_n$ матрицы Якоби функции $f:R^m\to\to R^n$ $(m>n)$ (где $f(\cdot)\in D_x$), а сумма берется по всем таким минорам;

$$D_1(B,y,f)=\{x\in B: f(x)=y,\ f(\cdot)\notin D_x\};$$

$$D_2(B,y,f)=\{x\in B: f(x)=y,\ f(\cdot)\in D_x,\ J_n f(x)=0\};$$

$$D(B,y,f)=D_1(B,y,f)+D_2(B,y,f),$$

где $B\subset R^m$ предполагается открытым, а для любого $A\subset B$ $D_i(A,y,f)=D_i(B,y,f)\cap A$ (именно в силу необходимости говорить о дифференцируемости в любой точке $x\in B$ и рассматривается открытое $B\subset R^m$).

Согласно свойству 2 совпадение для некоторых $y\in R^n$, $A\subset B$ и выборочной функции $\xi(\cdot,\omega)$ всех $(m-n)$-мерных мер множества $\{x\in A:\xi(x,\omega)=y\}$ равносильно выполнению для этих $\omega$, $y$, $A$ равенства $S_y^{m-n}(A)=I_y^{m-n}(A)$. Это в силу свойства 4 равносильно равенству

$$S_y^{m-n}(A)=\beta_1(m,m-n)^{-1}\iint N_y(p,z,A)\,dp dz \tag{2}$$

в случае, когда $A$ — борелевское, а выборочная функция $\xi(\cdot,\omega)$ непрерывна. Именно исследование условий п. н. выполнения соотношения (2) при заданных $y\in R^n$ и $A\subset B$ (что является обобщением формулы (1)) было целью данной работы.

Обеспечивающие выполнение (2) естественные дополнительные (но вполне общие) предположения о локальном поведении рассматриваемой п. н. непрерывной $\xi(x,\omega)$ вытекают из следующего свойства функций, удовлетворяющих условию Липшица.

При всяких борелевском $A\subset R^m$ и липшицевой $f:R^m\to R^n$:

(а) для всех $y\in R^n$ множество $\{x\in A: f(x)=y,\ f(\cdot)\in D_x,\ J_n f(x)>0\}$ счетно $(m-n)$-спрямляемо,

(б) почти для всех $y\in R^n S^{m-n}(D(A,y,f))=0$ (см. [6], 3.2.15).

Кроме того, имеет место следующее утверждение, обобщающее теорему 3.2.26 из работы [6].

**Лемма 1.** Для всякого счетно $(S^k,k)$-спрямляемого $A\subset R^m$ все $k$-мерные меры совпадают.

Доказательство. В силу свойства 1 достаточно рассмотреть случай, когда $A$ — борелевское. Счетная $(S^k,k)$-спрямляемость множества $A$ означает, что $A=A^0+N$, где $S^k(N)=0$ (значит, согласно свойству 2 $G^k(A)=G^k(A^0)$ для всякой $k$-мерной меры $G^k(\cdot)$), а $A^0\subset\bigcup_j f_j(E_j)$ (см. свойство 3), причем $E_j$ можно считать компактами.

Тогда $\bigcup_j f_j(E_j)=\Sigma_j f_j(E_j')$, где множества $E_j' = E_j \diagdown f^{-1}[\bigcup_{i=1}^{j-1} f_i($ вляются σ-компактными, т. е. все сводится к случаю $A^0 = \Sigma_j f_j[E_j' \cap f_j^{-1}(A^0)]$, где $f_j[E_j' \cap f_j^{-1}(A^0)]$ — борелевское. Следовательно, в силу σ-аддитивности на $\sigma(R^m)$ любой геометрической ы достаточно рассмотреть случай $A = f(E)$, где $E$ — ограниченн орелевское в $R^k$, $f: R^k \to R^m$ — липшицева.

В этом случае ([6], 3.2.4) существует такое борелевское $E' = E \cap \{x : f(\cdot) \in D_x J_n f(x) > 0\}$, что ограничение $f|_{E'} : E' \to R^m$ инъективно и $S^k[f(E) - f(E')] = 0$, откуда $G^k(A) = G^k[f(E')]$ для любой -мерной $G^k(\cdot)$. Но так как $f|_{E'}(\cdot)$ инъективна, то по теореме 3.2 з работы [6], которая остается справедливой при замене в -мерной меры Хаусдорфа любой другой из $k$-мерных мер,

$$G^k[f(E')] = \int_{E'} J_k f(x)\, dx,$$

то и завершает доказательство леммы.

2. Для п. н. непрерывной $\xi: B \times \Omega \to R^n$ обозначим $C_B = \{\omega$ $(\cdot, \omega)$ разрывна на $B\}$, $\sigma_\xi(B) = \{T \cup S : T \in \sigma\{\xi(x), x \in B\}, S \subset C_B\}$, . е. пополнение σ-алгебры $\sigma\{\xi(x), x \in B\}$ всевозможными подмножествами случайного события $C_B$, $\sigma_\xi(B) \widetilde{\otimes} \sigma(R^n) = \{T \cup S : T \in \sigma_\xi(B) \otimes \sigma(R^n), S \subset C_B \times R^n\}$. Так пополненные σ-алгебры более очно указывают характер измеримости, чем обычное пополнение.

**Теорема 1.** Для всякой п. н. непрерывной на σ-компактном множестве $B (B \subset R^m)$ случайной функции $\xi: B \times \Omega \to R^n$ величины $S_y^{m-n}(B)$ и $N_y(p, z, A)$ (где $A \in \sigma(B)$) являются соответственно $\sigma_\xi(B) \widetilde{\otimes} \sigma(R^n)$-измеримой функцией от $(\omega, y)$ и $[\sigma_\xi(B) \widetilde{\otimes} \sigma(R^n)] \otimes [\sigma(O^*(m, m-n)) \otimes \sigma(R^{m-n})]$-измеримой функцией от $(\omega, y, p, z)$.

Следовательно (см. свойство 4), для п. н. непрерывной $\xi(x, \omega)$ множества

$$N_A^{m-n} = \{\omega, y) : S_y^{m-n}(A) > I_y^{m-n}(A)\} =$$
$$= \{(\omega, y) : S_y^{m-n}(A) \neq I_y^{m-n}(A)\}$$

$\sigma_\xi(A) \widetilde{\otimes} \sigma(R^n)$-измеримы для любого σ-компактного $A \subset B$.

Пусть теперь почти для всех выборочных функций $\xi(\cdot, \omega)$ выполнено условие Липшица на $B$, т. е. для случайного события $L_B = \{\omega : \sup_{x_1, x_2 \in B} (|\xi(x_1) - \xi(x_2)| / |x_1 - x_2|) < +\infty\}$ (которое $\sigma_\xi(B)$-измеримо в силу п. н. непрерывности $\xi$) $P(L_B) = 1$. Согласно лемме 1 $N_B^{m-n} \subset R_B^{m-n}$, где

$$R_B^{m-n} = \Omega \times R^n - \{(\omega, y) : \{x \in B : \xi(x, \omega) = y\} \text{ счетно}$$
$$(S^{m-n}, m-n)\text{-спрямляемо}\},$$

более того, $N_A^{m-n} \subset R_A^{m-n}$ для любого $A \subset B$. Об измеримости $R_B^{m-n}$ нам ничего не известно, но так как в силу (а) и (б) для $\omega \in L_B L^n \{(R_B^{m-n})_\omega\} = 0$ ($(\cdot)_\omega$ — сечение точкой $\omega \in \Omega$), то в силу полноты меры $L^n(\cdot)$ для $\omega \in L_B$ выполнено $L^n\{(N_A^{m-n})_\omega\} = 0$. Таким образом, исходя из $\widetilde{\sigma_\xi (A) \otimes \sigma(R^n)}$-измеримости $N_A^{m-n}$ и теоремы Фубини для любого $\sigma$-компактного $A \subset B$ имеем $P \times L^n (N_A^{m-n}) = 0$.

Кроме липшицевости естественно рассматривать и более слабое локальное свойство (назовем его локальной липшицевостью) функции $f: B \subset R^m \to R^n$, а именно: для любого компактного $K \subset B$ ограничение $f|_K(\cdot)$ является липшицевым, т. е.

$$\sup_{x_1, x_2 \in K} |f(x_1) - f(x_2)| / |x_1 - x_2|) < +\infty.$$

В дальнейшем будем предполагать $\xi(\cdot, \omega)$ п. н. локально липшицевой на открытом $B \subset R^m$, т. е. $P(L_B') = 1$, где $L_B' = \{\omega : \xi(\cdot, \omega)$ шлокально липшицева на $B\}$.

Так как открытое $B$ $\sigma$-компактно, т. е. $B = \bigcup_n K_n$, где $\{K_n, n \geqslant 1\}$ неубывающая последовательность компактов, то $L_B' = \bigcap_n L_{K_n}$ и потому $L_B' \in \sigma_\xi(B)$. А для всякого $\sigma$-компактного $A \subset B$ вследствие непрерывности снизу на $\sigma(B)$ функций множеств $S_y^{m-n}(\cdot)$ и $I_y^{n-m}$ е$(\cdot)$ имеем

$$N_A^{m-n} = \{(\omega, y) : S_y^{m-n}(A) > I_y^{m-n}(A)\} =$$

$$= \bigcup_j \{\omega, y) : S_y^{m-n}(AK_j) > I_y^{m-n}(AK_j)\} = U_j N_{AK_j}^{m-n},$$

где $\{N_{AK_j}^{m-n}, j \geqslant 1\}$ — неубывающая последовательность множеств. Из этого соотношения и п. н. липшицевости $\xi(\cdot, \omega)$ на $AK_j \subset K_j$. следует справедливость такого утверждения.

**Теорема 2.** Для всякой п. н. локально липшицевой на открытом множестве $B (B \subset R^m)$ случайной функции $\xi : B \times \Omega \to R^n$ и любого $\sigma$-компактного $A \subset B$ $N_A^{m-n} \in \widetilde{\sigma_\xi (B) \otimes \sigma(R^n)}$ и $P \times L^n(N_A^{m-n}) = 0$.

В силу измеримости $N_A^{m-n}$ утверждение теоремы равносильно тому, что в предположении локальной липшицевости почти для всех $y \in R^n$ и любого $\sigma$-компактного $A \subset B$ для $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ п. н. эквивалентны все определения $(m - n)$-мерной меры и, в частности,

$$S_y^{m-n}(A) = I_y^{m-n}(A) = \beta_1(m, m-n)^{-1} \iint N_y(p, z, A)\, dp dz \text{ п. н.}$$

Естественно, возникает вопрос, при каких условиях это равенство будет выполняться для множества $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ при заданном $y \in R^n$. Из (а), (б) и леммы 1 следует, что таким условием является п. н. счетная $(S^{m-n}, m-n)$-спрямляемость множества $D(A, y, \xi)$.

**Теорема 3.** Для всякой п. н. локально липшицевой на открытом множестве $B (B \subset R^m)$ случайной функции $\xi: B \times \Omega \to R^n (m > n)$ и произвольного $A \subset B$ достаточным условием п. н. счетной $(S^{m-n}, m-n)$-спрямляемости множества $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ при заданном $y \in R^n$ является п. н. счетная $(S^{m-n}, m-n)$-спрямляемость каждого из множеств

$$D_1(A, y, \xi) = \{x \in A : \xi(x, \omega) = y, \xi(\cdot, \omega) \not\in D_x\},$$
$$D_2(A, y, \xi) = \{x \in A : \xi(x, \omega) = y, \xi(\cdot, \omega) \in D_x, J_n\xi(x, \omega) = 0\}.$$

Необходимо отметить, что (см. свойство 3) если $S^{m-n}(D(A, y, \xi)) < +\infty$ п. н., то приведенные в теореме 3 условия будут также и необходимыми.

При тех же предположениях о локальном поведении $\xi(x, \omega)$, что и в теореме 3, естественно рассматривать и более простые достаточные условия п. н. счетной $(S^{m-n}, m-n)$-спрямляемости множества заданного уровня. Их подсказывает уже свойство (б), а непосредственно они вытекают из следующего результата.

**Теорема 4.** Для всякой п. н. липшицевой на открытом $B \subset R^m$ случайной функции $\xi: B \times \Omega \to R^n$ $(m > n)$ и любого $A \in \sigma(B)$ $S^{m-n}(D(A, y, \xi))$ является $\sigma_\xi(B) \tilde{\otimes} \sigma(R^n)$-измеримой функцией от $(\omega, y)$ и

$$P \times L^n \{(\omega, y) : S^{m-n}(D(A, y, \xi)) > 0\} = 0.$$

В силу измеримости величины $S^{m-n}(D(A, y, \xi))$ утверждение теоремы равносильно тому, что для $A \in \sigma(B)$ почти для всех $y \in R^n$ выполнено

$$P\{\omega : S^{m-n}(D(A, y, \xi)) > 0\} = 0.$$

Потому из $(R_A^{m-n})_y \subset \{\omega : S^{m-n}(D(A, y, \xi)) > 0\}$ следует, что, во-первых, теорема 1 есть следствие теоремы 3, и во-вторых, в качестве условий п. н. счетной $(S^{m-n}, m-n)$-спрямляемости при заданном $y$ множества $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ для п. н. локально липшицевой $\xi(x, \omega)$ естественно пользоваться следующим частным случаем теоремы 3.

**Теорема 5.** Для всякой п. н. локально липшицевой на открытом $B \subset R^m$ случайной функции $\xi: B \times \Omega \to R^n$ $(m > n)$ и произвольного $A \subset B$ достаточным условием п. н. счетной $(S^{m-n}, m-n)$-спрямляемости при заданном $y \in R^n$ множества $\{x \in A : \xi(x, \omega) = y\}$ является п. н. выполнение таких свойств:

$$S^{m-n}(x \in A : \xi(x, \omega) = y, \xi(\cdot, \omega) \not\in D_x) = 0,$$
$$S^{m-n}(x \in A : \xi(x, \omega) = y, \xi(\cdot, \omega) \in D_x, I_n\xi(x, \omega) = 0) = 0.$$

Ясно, что условия из теоремы 5 можно комбинировать с условиями из теоремы 3.

3. Для доказательства теоремы 4 понадобится следующий вспомогательный результат.

**Лемма 2.** Для любой п. н. непрерывной на открытом множестве $B \subset R^m$ случайной функции $\xi : B \times \Omega \to R^n$ (при любых $m$ и $n$) множество $D_B = \{(x, \omega) \in B \times \Omega : \xi(\cdot, \omega) \notin D_x\}$ является $\sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$-измеримым.

Доказательство леммы 2. Отметим, что здесь $\tilde{\otimes}$ обозначает такое же пополнение произведения σ-алгебр, как и в $\sigma_\xi(B) \tilde{\otimes} \sigma(R^n)$.

Очевидно, что $D_B = D_B^1 + D_B^2$, где $D_B^1$ — множество таких $(x, \omega) \in B \times \Omega$, что при некоторых $i$, $j$ не существует $\frac{\partial \xi_i(x, \omega)}{\partial x_j}$, $D_B^2$ — множество таких $(x, \omega) \in B \times \Omega$, что хотя существуют все $\frac{\partial \xi_i(x,\omega)}{\partial x_j}$, но линейное преобразование с матрицей Якоби $\left(\frac{\partial \xi_i(x, \omega)}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ не является дифференциалом.

Тогда

$$D_B^1 = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \{(x, \omega) \in B \times \Omega : \text{не существует } \lim_{h \to 0} \eta_{x,i,j}(h)\} =$$

$$= \bigcup_{i,j} \bigcup_k \bigcup_{N \geqslant 1} \{(x, \omega) \in B \times \Omega : \sup_{0 < h' < h'' < 1/N} |\eta_{x,i,j}(h') - \eta_{x,i,j}(h'')| \geqslant 1/k\},$$

где для $x = (x_1, \dots, x_m)$

$$\eta_{x,i,j}(h) = h^{-1} [\xi_i(\dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots) - \xi(x_1, \dots, x_m)].$$

Величина $|\eta_{x,i,j}(h') - \eta_{x,i,j}(h'')|$ при любых $h'$ и $h''$ измерима относительно $\sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$, а относительно $(h', h'')$ она непрерывна на $(0, 1/N) \times (0, 1/N)$ почти для всех $(x, \omega)$ (из $\sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$-измеримого множества). В силу этой непрерывности рассматриваемый супремум с точностью до значений на множестве нулевой меры $B \times C_B$ (подмножествами которого и пополнена $\sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$) совпадает с супремумом, который для всех $(x, \omega)$ берется по одному и тому же счетному всюду плотному $X_0 \subset [0, 1/N] \times [0, 1/N]$. Следовательно, $D_B^1 \in \sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$.

Далее

$$D_B^2 = \{(x, \omega) \in B \times \Omega - D_B^1 : \overline{\lim_{\|h\| \to 0}} \zeta_x(h) > 0\} =$$

$$= \bigcup_{k \geqslant 1} \bigcap_{N \geqslant 1} \{(x, \omega) \in B \times \Omega - D_B^1 : \sup_{0 < \|h\| < 1/N} \zeta_x(h) \geqslant 1/k\},$$

где величина

$$\zeta_x(h) = \|h\|^{-1} \left\| \xi(x+h) - \xi(x) - \left(\frac{\partial \xi_i(x,\omega)}{\partial x_j}\right) h \right\| =$$

$$= \|h\|^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\xi_i(x+h) - \xi_i(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \xi_i(x,\omega)}{\partial x_j} h_j\right]^2}$$

при любом $h \in V_N = \{h' : \|h'\| \leq 1/N\}$ измерима относительно $\sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$ и в то же время для всех $(x, \omega) \in B \times \{\omega : \xi(\cdot, \omega)$ непрерывна$\}$ непрерывна как функция от $h$. Потому и в этом случае $\sup\limits_{h \in V_N} \zeta_x(h)$ с точностью до значений на некотором подмножестве множества $B \times C_B$ совпадает с $\sup\limits_{h \in V_N \cap S} \zeta_x(h)$, где $S$ — счетное всюду плотное не зависящее от $(x, \omega)$ подмножество единичного шара в $R^m$ и, следовательно, $D_B^2 \in \sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$, что и завершает доказательство.

В силу леммы 2, в частности, $\sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$-измеримой будет и $J_n\xi(x, \omega) I_{B \times \Omega - D_B}(x, \omega)$, так как на $B \times \Omega - D_B$ $J_n\xi(x, \omega) = \varphi\left(\left(\frac{\partial \xi_i(x,\omega)}{\partial x_j}\right)_{i,j}\right)$, где $\varphi(\cdot)$ — непрерывна, а все $\frac{\partial \xi_i(x,\omega)}{\partial x_j}$, которые для $(x, \omega) \in B \times \Omega - D_B$ существуют, $\sigma(B) \tilde{\otimes} \sigma_\xi(B)$-измеримы.

Доказательство теоремы 4. Известно ([6], 3. 2. 10), что для любых липшицевой $f : R^m \to R^n$ $(m > n)$ и борелевского $A \subset R^m$

$$\int_A J_n f(x)\, dx = \int_{R^n} S^{m-n}(f^{-1}\{y\} \cap A)\, dy.$$

Легко убедиться, что это выполнено и для локально липшицевой на открытом $B \subset R^m$ функции $f : B \to R^n$ (аппроксимировать множество $B$ ограниченными открытыми компактно содержащимися в $B$ подмножествами и воспользоваться теоремой 2.10.43 [6]). Подынтегральное выражение $J_n f(x)$ в левой части равенства — это почти везде на $B$ определенная ([6], 3.1.9) и измеримая на области определения функция, а для таких функций корректно определены все операции, совершаемые над всюду определенными измеримыми функциями.

Следовательно, для п. н. локально липшицевой $\xi(x, \omega)$

$$\int_A J_n\xi(x, \omega)\, dx = \int_{R^n} S^{m-n}(x \in A : \xi(x, \omega) = y)\, dy$$

для любых $A \in \sigma(B)$ и $\omega \in \{\omega : \xi(\cdot, \omega)$ локально липшицева на $B\}$. Для $N(A) = \{x \in A : \xi(\cdot, \omega) \notin D_x\} \cup \{x \in A : \xi(\cdot, \omega) \in D_x, J_n\xi(x, \omega) = 0\}$

имеем

$$0=\int_{N(A)_\omega} J_n\xi(x,\omega)\,dx=\int_{R^n} S^{m-n}(x\in N(A)_\omega : \xi(x,\omega)=y)\,dy=$$

$$=\int_{R^n} S^{m-n}(D(A,y,\xi))\,dy,$$

откуда для всякого $\omega\in L'_B=\{\xi(\cdot,\omega)$ локально липшицева на $B\}$ (а $P(L'_B)=1$) и почти всех $y\in R^n$

$$S^{m-n}(D(A,y,\xi))=S^{m-n}(x\in A\cap N(A)_\omega : \xi(x,\omega)=y)=0.$$

Таким образом, достаточно доказать измеримость этой функции относительно $\sigma_\xi(B)\mathbin{\tilde{\otimes}}\sigma(R^n)$.

Сначала рассмотрим в случае $\sigma$-компактного $A\subset B$ класс $K_{B,A}$ множеств $N\subset B\times\Omega$, таких что для каждого $\omega\in L'_B$ и почти всех $y\in R^n$ выполнено $S^{m-n}(x\in A\cap N_\omega:\xi(x,\omega)=y)=0$ и эта функция $\sigma_\xi(B)\mathbin{\tilde{\otimes}}\sigma(R^n)$-измерима. Если $N=F\times\Omega_0$, где $F\subset B$, $\Omega_0\subset\Omega$, то

$$S^{m-n}(x\in A\cap N_\omega:\xi(x,\omega)=y)=\begin{cases} S^{m-n}(x\in A\cap F:\xi(x,\omega)=y) \text{ при } \omega\in\Omega_0\\ 0 \text{ (как мера пустого множества) при } \omega\notin\Omega_0.\end{cases}$$

Следовательно, если $F$ — $\sigma$-компактно и $\Omega_0\in\sigma_\xi(B)$, то $F\times\Omega_0\in K_{B,A}$. Алгебра подмножеств множества $B$, порождающая борелевскую $\sigma$-алгебру $\sigma(B)$, состоит из $\sigma$-компактных множеств. Класс $K_{B,A}$ замкнут относительно сумм непересекающихся множеств и пределов монотонных последовательностей (для неубывающих это очевидно, для невозрастающих следует из того, что рассматриваются только такие $N$, для которых $S^{m-n}(x\in A\subset N_\omega:\xi(x,\omega)=y)=0$ при $\omega\in L'_B$). Следовательно, $K_{B,A}\supset\sigma(B)\mathbin{\tilde{\otimes}}\sigma_\xi(B)$ и согласно лемме 2 $N(A)\in K_{B,A}$ для любого $\sigma$-компактного $A\subset B$.

Рассмотрев $\tilde{K}_{B,N}$ — класс $A\subset B$, для которых выполнено определяющее класс $K_{B,A}$ свойство при некотором заданном $N\in\sigma(B)\mathbin{\tilde{\otimes}}\sigma_\xi(B)$, аналогичным образом получаем $\tilde{K}_{B,N}\supset\sigma(B)$, что и завершает доказательство теоремы.

4. В этой части $\xi:B\times\Omega\to R^n$ будем по-прежнему предполагать п. н. локально липшицевой на открытом $B\subset R^m$, а на $\Omega\times R^n$ рассматривать полную $\sigma$-алгебру

$$\overline{\sigma_\xi(B)\otimes\sigma(R^n)}=\overline{\sigma\{\xi(x),\,x\in B\}\otimes\sigma(R^n)}$$

(черта обозначает обычное пополнение),

В силу аддитивности на $\sigma(B)$ функций множеств $S_y^{m-n}(\cdot)$ и $J_y^{m-n}(\cdot)$ для любых $A_1,A_2\in\sigma(B)$ при $A_1\subset A_2$ будет $N_{A_1}^{m-n}\subset N_{A_2}^{m-n}$.

олее того, в соответствии со свойством 1 это справедливо при юбых $A_1, A_2 \subset B$, не обязательно борелевских. Для $A \in \sigma(B)$ и обого $A' \subset A$ $N_{A'}^{m-n} \subset R_{A'}^{m-n} \subset \{(\omega, y) : S^{m-n}(D(A, y, \xi)) > 0\}$.

Отсюда и из теоремы 4 получаем такие утверждения.

*Следствие 1.* Множества $N_A^{m-n}$ и $R_A^{m-n}$ $\sigma_\xi(B) \otimes \sigma(R^n)$-измеримы ля любого $A \subset B$ и $P \times L^n(N_A^{m-n}) = P \times L^n(R_A^{m-n}) = 0$.

*Следствие 2.* Для любых $A \in \sigma(B)$ и $(m-n)$-мерной меры $G^{m-n}(\cdot)$ очти для всех $(\omega, y)$ выполнено

$$S_y^{m-n}(A) = G_y^{m-n}(A) = I_y^{m-n}(A) = \beta_1(m, m-n)^{-1} \iint N_y(p, z, A)\, dpdz,$$

ричем первые два равенства справедливы при любом $A \subset B$, а не олько борелевском.

Из характера измеримости $N_y(p, z, A)$ и следствия 2 вытекает акое утверждение.

*Следствие 3.* Для любых $A \in \sigma(B)$ и $(m-n)$-мерной меры $G^{m-n}(\cdot)$ $G_y^{m-n}(A)$ является $\sigma_\xi(B) \otimes \sigma(R^n)$-измеримой функцией от $(\omega, y)$.

Рассмотрим для $A \in \sigma(B)$ такие функционалы от случайной функции:

$$\tilde{G}^{m-n}(A) = \int_{R^n} G_y^{m-n}(A)\, dy,$$

$$\tilde{N}(p, z, A) = \int_{R^n} N_y(p, z, A)\, dy.$$

В силу указанной в следствии 3 измеримости эти функционалы корректно определены, являются соответственно $\sigma_\xi(B)$- и $\sigma_\xi(B) \otimes \sigma(O^*(m, m-n)) \otimes \sigma(R^{m-n})$-измеримыми функциями и между их математическими ожиданиями справедливы следующие соотношения, обобщающие соответствующие результаты из работы [5].

**Теорема 6.** Для п. н. локально липшицевой на открытом множестве $B (B \subset R^m)$ случайной функции $\xi : B \times \Omega \to R^n$ $(m > n)$ любых $A \in \sigma(B)$ и $(m-n)$-мерной меры $G^{m-n}(\cdot)$

$$M\tilde{G}^{m-n}(A) = \int_{R^n} MG_y^{m-n}(A)\, dy = \iint M\tilde{N}(p, z, A)\, dpdz =$$
$$= \iiint MN_y(p, z, A)\, dpdzdy = \int_A MJ_n\xi(x, \omega)\, dx.$$

Пусть теперь $\xi : B \times \Omega \to R^n$ однородна в широком смысле. В этом случае при любом $(y, p, z) \in R^n \times O^*(m, m-n) \times R^{m-n}$ величина $MN_y(p, z, A)$ инвариантна относительно сдвигов $\xi(x) \to \xi(x + c)$. При фиксированных $y$, $p$ и $z$ $MN_y(p, z, \cdot)$ является мерой на плоскости $\{x : p(x) = z\}$ (в данном случае $n$-мерной). Если эта мера конечна на ограниченных множествах (что в силу инвариантности относительно сдвигов равносильно, например, конечности величины $MN_y(p, z, [0, 1]^m)$), то из общей теории инвариантных мер [illegible] например [7]) получаем

$$MN_y(p, z, A) = N_y(p) L^n (A \cap \{x : p(x) = z\}).$$

Отсюда в силу свойства 4 и теоремы 1

$$MI_y^{m-n}(A) = \int_{O^*(m,m-n)} dp \int_{R^{m-n}} MN_y(p, z, A)\,dz) =$$

$$= \int_{O^*(m,m-n)} dpN_y(p) \int_{R^{m-n}} L^n (A \cap \{x ; p(x) = z\})\,dz =$$

$$= L^m(A) \int_{O^*(m,m-n)} N_y(p)\,dp.$$

Из этих соотношений и ранее доказанного вытекают следующие результаты.

**Теорема 7.** Пусть $\xi : B \times \Omega \to R^n$ — однородная в широком смысле п. н. локально липшицева на открытом множестве $B \subset R^m$ (где $m > n$) случайная функция. Если почти для всех $(p, z, y)$ $MN_y(p, z, [0, 1]^m) < +\infty$, то для любой $(m-n)$-мерной геометрической меры $G^{m-n}(\cdot)$ и произвольного $A \in \sigma(B)$ $M\tilde{G}^{m-n}(A) = G^{m-n} L^m(A)$, где $G^{m-n} = \int_{[0,1]^m} MJ_n\xi(x, \omega)\,dx = \beta_1(m, m-n)^{-1} N^{m-n}$, а $N^{m-n} = \int_{O^*(m,m-n)} N(p)\,dp = \int_{R^n} dy \int dpN_y(p)$.

**Теорема 8.** Пусть $\xi : B \times \Omega \to R^n$ такая же, как в теореме 7. Если множество $\{x \in B : \xi(x, \omega) = y\}$ при заданном $y \in R^n$ счетно $(S^{m-n}, m-n)$-спрямляемо и почти для всех $(p, z)$ $MN_y(p, z, [0, 1]^m < < +\infty)$, то для любых $A \in \sigma(B)$ и $(m-n)$-мерной геометрической меры $G^{m-n}(\cdot)$

$$MG_y^{m-n}(A) = G_y^{m-n} L^m(A),$$

где $G_y^{m-n} = \beta_1(m, m-n)^{-1} N_y$, а $N_y = \int_{O^*(m,m-n)} N_y(p)\,dp$.

*Замечания. 1.* Условие однородности в теоремах 7 и 8 можно ослабить. 2. Если $\mu(\cdot)$ — инвариантная относительно сдвигов мера на $\sigma(R^m)$, то $\mu([0, 1]^m) = +\infty$ равносильно тому, что для любого $A$ с непустой внутренностью $\mu(A) = +\infty$. Отсюда следует справедливость соотношений теорем 7 и 8 и без предположения конечности, но уже только для таких $A \in R^m$, для которых при почти всех $(p, z)$ либо $A \cap \{x : p(x) = z\} = \varnothing$ либо $\mathrm{int}_{p,z}(A \cap \{x : p(x) = z\}) \neq \neq \varnothing$, где $\mathrm{int}_{p,z}$ обозначает относительную внутренность на плоскости $\{x : p(x) = z\}$. В частности, таковыми являются все открытые подмножества $A \subset R^m$.

1. *Corrsin S.* Random geometric problems suggested by the turbulence.— In: Lecture Notes in Physics, vol. 12. Berlin, 1972. 2. *Corrsin S.* A measure of the area of a homogeneous random surface in space.— Quart. Appl. Math., 1955, 12, N 4. 3. *Pawula R. F.* A proof of the Corrsin's theorem concerning stationary random surfaces.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1968, IT—14, N 5. 4. *Радченко О. М.* Зв'язок середньої довжини лінії рівня випадкового поля і середнього числа перетинів її

довільною прямою.— Вісник Київ. ун-ту, Мат. Мех., 1979, вип. 21. 5. *Switzer P.* Geometrical measure of smoothness of random function.— J. Appl. Probab., 1976, 13, N 1. 6. *Federer H.* Geometrical measure theory. Berlin, 1969. 7. *Халмош П.* Теория меры. М., 1953.

Поступила в редколлегию 12.05.80

*A. N. Radchenko*

ON THE GEOMETRICAL MEASURES OF THE LEVEL SET OF RANDOM FIELD

Let $\xi: B \to R^n$ be locally lipschitsian random field where $B \subset R^m$ is open and $m > n$. Sufficient conditions for a. s. equivalence of different general definitions of (m — n)-dimensional geometrical measure of the level set $\{x \in A: \xi(x, \omega) = y\}$ for given $A \subset B$ and $y \in R^n$ are obtained.

УДК 519.21

*А. В. СКОРОХОД, чл.-кор. АН УССР*
*Институт математики АН УССР*

*Т. Н. НАСИРОВА, канд. физ.-мат. наук*
*Институт кибернетики АН АзССР*

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, СВЯЗАННЫХ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ БЛУЖДАНИЯМИ

В работе рассматриваются последовательности серий полумарковских блужданий вида

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=1}^{\nu_n(t)} \eta_k^{(n)},$$
$$\nu_n(t) = m, \quad \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} \leqslant t < \sum_{k=1}^{m+1} \xi_k^{(n)}, \tag{1}$$

где $\{(\xi_k^{(n)}; \eta_k^{(n)}),\ k = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин, $P\{\xi_k^{(n)} > 0\} = 1$. Величины $\xi_k^{(n)}$ и $\eta_k^{(n)}$ предполагаются бесконечно малыми по вероятности, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_k^{(n)}| + |\eta_k^{(n)}| > \varepsilon\} = 0. \tag{2}$$

В п. 1 изучается предельное поведение конечномерных распределений самого процесса $\zeta_n(t)$. Ранее при менее общих предложениях такие результаты были получены в работах [1, 2]. В п. 2 при дополнительном предположении, что $P\{\eta_k^{(n)} > 0\} = 1$, рассматриваются процессы $\zeta_n(t) - a_n t$, где $a_n \to \infty$. Наконец, в п. 3 рассматривается пара независимых процессов $\zeta_n^{\pm}(t)$ такого же вида, как в п. 2, и изучается процесс $\zeta_n^{+}(t) - \zeta_n^{-}(t)$.