УДК 519.21

*В. И. СТЕПАХНО, асп.*
*Киевский университет*

# ЛИНЕЙНАЯ РАЗЛИЧИМОСТЬ ГИПОТЕЗ О СПЕКТРЕ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

1. Настоящая статья посвящена исследованию линейной различимости двух гипотез о корреляционной функции (спектральной функции или спектральной плотности) стационарного случайного процесса. Понятие линейной различимости для корреляционных функций (корреляционных операторов) было введено автором в работе [1], где были получены условия линейной различимости конечного числа гипотез о корреляционном операторе случайной величины в гильбертовом пространстве.

Напомним, что две гипотезы $H_0$ и $H_1$ о корреляционной функции $R_0$ и $R_1$ для случайного процесса, наблюдаемого на отрезке $[-T, T]$, линейно различимы, если существует такая последовательность векторов $z_n$, что

$$(R_i z_n, z_n)/(R_j z_n, z_n) + (R_j z_n, z_n)/(R_i z_n, z_n) \to \infty$$

при $n \to \infty$, где $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

Сформулируем аналогичное условие для стационарного случайного процесса.

Пусть на отрезке $[-T, T]$ наблюдается стационарный процесс $\xi(t)$ с $M\xi(t) = 0$, $R(t)$ — корреляционная функция и $F(\lambda)$ — спектральная функция, $R(t) = \int e^{i\lambda t} dF(\lambda)$. Относительно спектральной функции $F(\lambda)$ имеются две гипотезы: 1) $H_0$: $F(\lambda) = F_0(\lambda)$ и 2) $H_1$: $F(\lambda) = F_1(\lambda)$.

Гипотезы $H_0$ и $H_1$ будем называть линейно различимыми, если существует такая последовательность функций $\varphi_n(t)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-T}^{T} \varphi_n(t) e^{i\lambda t} dt \right|^2 dF_k(\lambda) = \varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 0$ или $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь спектральные функции со всюду плотным множеством точек роста.

2. Докажем общую теорему о линейной различимости гипотез относительно спектральной функции для стационарных случайных процессов в широком смысле.

Рассмотрим функции вида

$$g(\lambda) = \int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt, \tag{1}$$

где $\varphi(\cdot) \in L_{2[-T,T]}$.

Это целые аналитические функции $\lambda$ экспоненциального типа не выше $T$, $g(\lambda) \in L_2$, т. е. интегрируемы с квадратом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda < +\infty$$

на вещественной оси. Обозначим через $W_T$ пространство функций $g(\lambda)$, допускающих представление (1), $W_T(F)$ — замыкание пространства $W_T$ в норме

$$\|g\|_F^2 = \int |g(\lambda)|^2 dF(\lambda).$$

Пространство $W_T(F)$ будет гильбертовым со скалярным произведением

$$(g_1, g_2)_F = \int g_1(\lambda) \overline{g_2(\lambda)}\, dF(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ — спектральная функция.

**Теорема 1.** Для того чтобы гипотезы $H_0$ и $H_1$ были линейно различимы, необходимо и достаточно, чтобы $W_T(F_0) \neq W_T(F_1)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $W_T(F_0) = W_T(F_1)$. Покажем, что гипотезы $H_0$ и $H_1$ линейно неразличимы. Действительно, $W_T(F)$ — гильбертово пространство. Следовательно, $g \to g$ означает отображение $W_T(F_0)$ на $W_T(F_1)$ как одного гильбертового пространства на другое. Значит, по теореме Банаха о замкнутом графике это отображение ограничено. Таким образом, при некотором $C_1$ будет выполняться неравенство $\|g\|_{F_0}/\|g\|_{F_1} \leqslant C_1$. Меняя индексы местами, убеждаемся, что при некотором $C_2$ $\|g\|_{F_1}/\|g\|_{F_0} \leqslant C_2$. Следовательно, если $\|g_n\|_{F_i} \to 0$, то и $\|g_n\|_{F_j} \to 0$ при $i \neq j$, где $i = 0$ или 1, и $j = 0$ или 1, что и доказывает необходимость.

*Достаточность.* Предположим, что $W_T(F_0) \neq W_T(F_1)$. Пусть, например, $g(\lambda) \in W_T(F_0)$, но $g(\lambda) \bar{\in} W_T(F_1)$. Возьмем последовательность $g_n(\lambda) \in W_T$, сходящуюся к $g(\lambda)$ в $W_T(F_0)$ при $n \to \infty$. Так как $W_T(F)$ — полное пространство, получим $\|g_n - g_m\|_{F_0} \to 0$, а $\|g_n - g_m\|_{F_1} \not\to 0$ при $n, m \to \infty$.

Выберем подпоследовательность $g_{n_k}$ таким образом, чтобы

$$\|g_{n_k} - g_{n_{k+1}}\|_{F_1} \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим

$$\hat{g}_k = (g_{n_k} - g_{n_{k+1}})/(\|g_{n_k} - g_{n_{k+1}}\|_{F_1}).$$

Нетрудно заметить, что $\|\hat{g}_k\|_{F_0} \to 0$, а $\|\hat{g}_k\|_{F_1} = 1$. Полученные соотношения и доказывают достаточность.

3. Рассмотрим задачу выбора одной из двух гипотез о спектральной плотности. Пусть имеются две гипотезы: 1) $H_0: f(\lambda) =$

$= f_0(\lambda)$, 2) $H_1: f(\lambda) = f_1(\lambda)$. Легко показать, что при

$$C_1 \leqslant f_1(\lambda)/f_0(\lambda) \leqslant C_2$$

гипотезы $H_0$ и $H_1$ линейно неразличимы, так как

$$C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt \right|^2 f_0(\lambda)\, d\lambda \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt \right|^2 f_1(\lambda)\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt \right|^2 f_0(\lambda)\, d\lambda.$$

Пусть $f_0(\lambda)$ такая, что

$$C_1/(1+\lambda^2) \leqslant f_0(\lambda) \leqslant C_2/(1+\lambda^2).$$

Не теряя общности, можно считать $f_0(\lambda) = 1/(1+\lambda^2)$. Тогда

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} du/(1+u^2).$$

Таким образом, будем решать задачу о линейном различении гипотез: 1) $\hat{H}_0: f(\lambda) = 1/(1+\lambda^2)$ и 2) $\hat{H}_1: f(\lambda) = f_1(\lambda)$ при наблюдении процесса на некотором промежутке $[-T_1, T_1]$.

**Лемма 1.** Если $f_0(\lambda) = 1/(1+\lambda^2)$, то пространство $W_T(F_0)$ состоит из функций вида $g(\lambda) = (a+b\lambda)\psi(\lambda) + C$, где $\psi(\lambda) \in \in W_T(F_0)$.

Доказательство. Покажем, что: а) $C \in W_T(F_0)$, $b$) $(a + + b\lambda)\psi(\lambda) \in W_T(F_0)$, с) все функции $g(\lambda) \in W_T(F_0)$ имеют вид $g(\lambda) = = (a+b\lambda)\psi(\lambda) + C$.

а) Действительно, $C \in W_T(F_0)$, так как

$$1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (1/2\varepsilon) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\lambda t} dt = (\sin \lambda\varepsilon)/(\lambda\varepsilon).$$

Очевидно,

$$\int (1 - \sin \lambda\varepsilon/\lambda\varepsilon)^2\, d\lambda/(1+\lambda^2) \to 0$$

и отсюда следует искомое утверждение.

б) Пусть $\psi(\lambda) = \int_{-T}^{T} \varphi(t)\, e^{i\lambda t} dt$. Положим

$$g_\varepsilon(\lambda) = [a + b\,(e^{i\lambda\varepsilon} - 1)/i\varepsilon] \int_{-T+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \varphi(t)\, e^{i\lambda t} dt$$

и покажем, что $g_\varepsilon(\lambda) \in \hat{W}_T(F_0)$. Так как

$$e^{i\lambda\varepsilon} \int\limits_{-T+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt = \int\limits_{-T+2\varepsilon}^{T} \varphi(t-\varepsilon) e^{i\lambda t} dt,$$

то

$$g_\varepsilon(\lambda) = [a - 1/(i\varepsilon)] \int\limits_{-T+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt +$$

$$+ [b/(i\varepsilon)] \int\limits_{-T+2\varepsilon}^{T} \varphi(t-\varepsilon) e^{i\lambda t} dt = \int\limits_{-T}^{T} \varphi_\varepsilon(t) e^{i\lambda t} dt,$$

где

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < -T+\varepsilon, \\ [a - 1/(i\varepsilon)]\varphi(t), & -T+\varepsilon \leqslant t < -T+2\varepsilon, \\ [a - 1/(i\varepsilon)]\varphi(t) + b/(i\varepsilon)\varphi(t-\varepsilon), & -T+2\varepsilon \leqslant t < T-\varepsilon, \\ [b/(i\varepsilon)]\varphi(t-\varepsilon), & T-\varepsilon \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь

$$\int |g_\varepsilon(\lambda) - g(\lambda)|^2 dF_0(\lambda) = \int |g_\varepsilon(\lambda) - g(\lambda)|^2 d\lambda/(1+\lambda^2).$$

Покажем, что последнее выражение стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Так как

$$|g_\varepsilon(\lambda) - g(\lambda)| \leqslant |a| \left| \int\limits_{T-\varepsilon \leqslant t \leqslant T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| +$$

$$+ |b||\lambda| \left| \int\limits_{T-\varepsilon \leqslant |t| \leqslant T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| + |b| \, |(e^{i\varepsilon\lambda} - 1)/(i\varepsilon) - \lambda| \times$$

$$\times \left| \int\limits_{-T}^{T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right|.$$

Следовательно,

$$\int |g_\varepsilon(\lambda) - g(\lambda)|^2 d\lambda/(1+\lambda^2) \leqslant \int [(|a| + |b|\lambda)^2/(1+\lambda^2)] \times$$

$$\times \left| \int\limits_{T-\varepsilon \leqslant |t| \leqslant T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right|^2 d\lambda + |b|^2 \int |(e^{i\lambda\varepsilon} - 1)/(i\varepsilon) - \lambda|^2 \times$$

$$\times [1/(1+\lambda^2)] \left| \int\limits_{-T}^{T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right|^2 d\lambda.$$

Первое слагаемое оценивается как

$$O\left(\int \left| \int\limits_{T-\varepsilon \leqslant |t| \leqslant T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right|^2 d\lambda\right) = O\left(\int\limits_{T-\varepsilon \leqslant |t| \leqslant T} \varphi^2(t) dt\right) \to 0.$$

Второе слагаемое стремится к нулю на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла ввиду того, что подынтегральная функция мажорируется интегралом

$$\left|\int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt\right|^2$$

и сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

в) Пусть $g_n \in W_T$ и $\|g_n - g\|_{F_0} \to 0$,

$$g_n(\lambda) = \int_{-T}^{T} \varphi_n(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Если

$$f_n(t) = e^t \left[\int_{-\infty}^{t} e^{-s}\varphi_n(s)\chi_{[-T,T]}(s)\,ds - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s}\varphi_n(s)\chi_{[-T,T]}(s)\,ds\right] =$$

$$= e^{-t}\int_{t}^{+\infty} e^{-s}\varphi(s)\chi_{[-T,T]}(s)\,ds,$$

то $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) e^{i\lambda t} dt = [1/(1+i\lambda)]\, g_n(\lambda)$. Так как

$$\int \|[1/(1+i\lambda)][g_n(\lambda) - g_m(\lambda)]\|^2 d\lambda \to 0$$

при $n, m \to \infty$, то на основании равенства Парсеваля

$$\int |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \to 0,$$

т. е. $f_n(t)$ сходится к некоторой функции $f(t)$, интегрируемой с квадратом, и

$$g(\lambda)/(1+i\lambda) = \int f(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Поскольку $f_n(t) = e^t \int_{-T}^{T} \varphi_n(s) e^{-s} ds$ для $t < -T$ и $f_n(t)$ сходится в $L_{2(-\infty,-T)}$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T}^{T} \varphi_n(s) e^{-s} ds = C.$$

Таким образом, $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = \begin{cases} Ce^t, & t < 0, \\ \psi(t), & -T \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t > T, \text{ так как } f_n(t) = 0 \text{ при } t > T. \end{cases}$$

Следовательно,

$$g(\lambda)/(1+i\lambda) = C\int_{-\infty}^{0} e^{t+i\lambda t}dt + \int_{-T}^{T} \psi(t)\, e^{i\lambda t}dt =$$

$$= C\cdot 1/(1+i\lambda) + \int_{-T}^{T} \psi(t)\, e^{i\lambda t}dt.$$

Или $g(\lambda) = C + (i\lambda + 1)\int_{-T}^{T} \psi(t)\, e^{i\lambda t}dt$, что и требовалось доказать.

**Лемма 2**. Если $\Theta(\lambda) \in L_{2(-\infty,\infty)}$, то для всех $k$

$$\int \Theta(\mu) \sin^k \varepsilon(\lambda-\mu)\, d\mu/(\lambda-\mu)^k \in W_{k\varepsilon} \subset W_T$$

при $k\varepsilon < T$.

Доказательство. Так как

$$\sin\varepsilon(\lambda-\mu)/(\lambda-\mu)\,\varepsilon = (1/2\varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{it(\lambda-\mu)}dt,$$

то

$$\sin^k \varepsilon(\lambda-\mu)/\varepsilon^k(\lambda-\mu)^k = [1/(2\varepsilon)^k]\left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i(\lambda-\mu)t}dt\right]^k =$$

$$= \int_{-k\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{i(\lambda-\mu)t} v_k(t)\, dt,$$

где $v_k(t)$ — плотность суммы $\xi_1 + \ldots + \xi_k$, $\xi_i$ — независимые и равномерно распределенные на $[-\varepsilon, \varepsilon]$ случайные величины. Значит,

$$\int \Theta(\mu) \sin^k \varepsilon(\lambda-\mu)\, d\mu/(\lambda-\mu)^k = \varepsilon^k \int_{-k\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{i\lambda t} v_k(t) \int e^{-i\mu t}\Theta(\mu)\, d\mu =$$

$$= \int_{-k\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{i\lambda t} v_k(t)\, dt,$$

где $V_k(t) \in L_{2(-\infty,\infty)}$. Таким образом, лемма 2 доказана.

Теперь приведем еще одно условие линейной различимости двух гипотез.

**Теорема 2**. Пусть существует такая $\psi(\lambda)$, что:

1) $\int \psi(\lambda)\,[f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, d\lambda = +\infty$,

2) при некоторых $k$ и $\varepsilon > 0$ таких, что $k\varepsilon < T$, справедливо

$$\int \psi(\lambda)\left[\int |[\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)] - 1|\, (\sin^k \varepsilon\mu d\mu)/\mu^k\right] \times$$

$$\times [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, d\lambda < +\infty.$$

Тогда гипотезы $H_0$ и $H_1$ линейно различимы.

Доказательство. Легко показать, что для различимости двух гипотез достаточно, чтобы существовала функция $g(\lambda) \in W_T(F_0)$, для которой справедливо

$$\int |g(\lambda)|^2 f_1(\lambda)\, d\lambda = +\infty,$$

т. е. чтобы существовала такая $g_1(\lambda) \in W_T$, что

$$\int |g_1(\lambda)|^2 [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, d\lambda = +\infty.$$

Пусть $\psi(\lambda)$ такова, что $\int \psi(\lambda)\, d\lambda < \infty$, а

$$\int \psi(\lambda)\, [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, d\lambda = +\infty.$$

Такие функции существуют, если $f_1(\lambda)/f_0(\lambda)$ не ограничено. Введем функцию

$$g_\varepsilon(\lambda) = \int \sqrt{\psi(\lambda+\mu)}\, (\sin^k \varepsilon\mu/\mu^k)\, d\mu =$$

$$= \int \sqrt{\psi(\lambda+\mu)} \left[(1/2\varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{it\mu} dt\right]^k d\mu =$$

$$= \int \sqrt{\psi(\lambda+\mu)} \int_{-k\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{it\mu} v_k(t)\, dt d\mu =$$

$$= \int_{-k\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{it\lambda} v_k(t) \left[\int \sqrt{\psi(\mu)}\, e^{-it\mu} d\mu\right] dt \in W_{k\varepsilon} \subset W_T$$

при $k\varepsilon < T$. Покажем, что

$$\int [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, |g_\varepsilon(\lambda)|^2\, d\lambda = +\infty.$$

Поскольку $\int [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, \psi(\lambda)\, d\lambda = +\infty$, то достаточно показать, что

$$\int [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, |g_\varepsilon(\lambda) - \sqrt{\psi(\lambda)}\,|^2\, d\lambda < \infty.$$

Имеем

$$\int [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)] \left\{\int [\sqrt{\psi(\lambda+\mu)} - \sqrt{\psi(\lambda)}]\, (\sin^k \varepsilon\mu/\mu^k)\, d\mu\right\} d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant O\left\{\int [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)] \int |\psi(\lambda+\mu) - \psi(\lambda)|\, (\sin^k \varepsilon\mu/\mu^k)\, d\mu d\lambda\right\} =$$

$$= O\left\{\int [f_1(\lambda)/f_0(\lambda)]\, \psi(\lambda) \int |[\psi(\lambda+\mu)/\varphi(\lambda)] - 1|\, (\sin^k \varepsilon\mu/\mu^k)\, d\mu d\lambda\right\} <$$

$$< \infty.$$

Теорема доказана.

*Следствие*. Пусть при некоторых $0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_1+1$ и $C_1$, $C_2>0$ справедливо неравенство

$$C_1(1+|\lambda|^{\alpha_1})<f_1(\lambda)/f_0(\lambda)<C_2(1+|\lambda|^{\alpha_2}).$$

Тогда гипотезы $H_0$ и $H_1$ линейно различимы.

Для доказательства следствия достаточно показать выполнение условий теоремы 2. Возьмем

$$\psi(\lambda)=1/(1+|\lambda|^{\alpha_1+1}).$$

При таком выборе $\psi(\lambda)$ условие 1 теоремы выполняется. Проверим выполнение второго условия теоремы. Заметим, что

$$[(1+|\alpha+\mu|)^{\alpha}/(1+|\lambda|^{\alpha})-1]\sim[(1+|\mu|/|\lambda|^{\alpha}-1]\sim\alpha|\mu/\lambda|$$

при $\mu/\lambda\to 0$ и $\lambda\to\infty$. Следовательно, для всех $\delta>0$ при $|\mu/\lambda|<$ $<\delta$ выполняется неравенство

$$|\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)-1|\leqslant C_\delta|\mu/\lambda|.$$

Оценим

$$\int|\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)-1|(\sin^k\varepsilon\mu/\mu^k)\,d\mu=$$

$$=\int\limits_{|\mu|<\delta|\lambda|}|\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)-1|(\sin^k\varepsilon\mu/\mu^k)\,d\mu+$$

$$+\int\limits_{|\mu|>\delta|\lambda|}|\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)-1|(\sin^k\varepsilon\mu/\mu^k)\,d\mu\leqslant$$

$$\leqslant C_\delta\int|\mu/\lambda|(\sin^k\varepsilon\mu/\mu^k)\,d\mu\leqslant\hat{C}_1(1/|\lambda|)<\infty$$

для достаточно больших $\lambda$, а при $|\lambda|$ ограниченных

$$\int|\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)-1|(\sin^k\varepsilon\mu/\mu^k)\,d\mu$$

также ограничено. Следовательно, при некотором $\hat{C}_2$

$$\int|\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)-1|(\sin^k\varepsilon\mu/\mu^k)\,d\mu\leqslant\hat{C}_2[1/(1+|\lambda|).$$

Значит,

$$\int\psi(\lambda)\left[\int|\psi(\lambda+\mu)/\psi(\lambda)-1|(\sin^k\varepsilon\mu/\mu^k)\,d\mu\right]\times$$
$$\times f_1(\lambda)\,d\lambda/f_0(\lambda)\leqslant\hat{C}_2\int[1/(1+|\lambda|^{\alpha_1+1})]\times$$
$$\times[1/(1+|\lambda|)]\,C_2(1+|\lambda|^{\alpha_2})\,d\lambda<\infty.$$

Таким образом, следствие доказано.

4. Пусть $\varphi_0(\lambda)$ — целая аналитическая функция экспоненциального типа не выше $s$ и

$$\int d\lambda/(1+\lambda^2)|\varphi_0(\lambda)|^2<\infty.$$

Как показано в работе [2, с. 598—599], задача о различении гипотез $H_0$ и $H_1$ при спектральной плотности $f_0(\lambda)$, удовлетворяющей неравенству

$$C_1/(1+\lambda^2)|\varphi_0(\lambda)|^2 \leqslant f_0(\lambda) \leqslant C_2/(1+\lambda^2)|\varphi_0(\lambda)|^2, \qquad (2)$$

сводится с помощью линейного преобразования к различению гипотез $H_0$ и $H_1$ для процессов $\hat{\xi}(t)$, наблюдаемых на интервале $[-T+s, T-s]$, причем по гипотезе $H_k$ спектральные плотности будут иметь вид $\hat{f}_k(\lambda) = f_k(\lambda)|\varphi_0(\lambda)|^2$, где $k=0, 1$. Поскольку $\hat{f}_0(\lambda) = f_0(\lambda)|\varphi_0(\lambda)|^2$ удовлетворяет неравенству

$$C_1/(1+\lambda^2) \leqslant \hat{f}_0(\lambda) \leqslant C_2/(1+\lambda^2), \qquad (3)$$

то из теоремы 2 вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.** Если выполняются неравенство (2) и условия теоремы 2, то гипотезы $H_0$ и $H_1$ о спектральных плотностях $f_0(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ линейно различимы.

Заметим, что для всякого $\alpha > 0$ функция

$$\varphi_0(\lambda) = \int (1+|\mu|^\alpha)[\sin^k \varepsilon(\mu-\lambda)/(\mu-\lambda)^k]\, d\mu,$$

где $k > \alpha + 1$ такова, что

$$0 < \inf_\lambda [|\varphi_0(\lambda)|^2 \cdot 1/(1+|\lambda|^{2\alpha}] <$$
$$< \sup_\lambda [|\varphi_0(\lambda)|^2 \cdot 1/(1+|\lambda|^{2\alpha})] < +\infty.$$

Функция $\varphi_0(\lambda)$ целая, экспоненциального типа не выше $k\varepsilon$.

1. *Степахно В. И.* Линейные методы различения гипотез о корреляционных функциях случайных процессов.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1980, вып. 24. 2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971. 3. *Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В.* Состоятельные оценки параметров случайных процессов. Киев, 1980.

Поступила в редколлегию 22.04.80

*V. I. Stepakhno*

THE LINEAR DISTINGUISHABILITY OF HYPOTHESES ON THE SPECTRUM OF STATIONARY PROCESS

This article deals with the linear distinguishability of two hypotheses of the correlation function (spectral function or spectral density) of the stationary stochastic process.