УДК 519.21

С. М. ХРИСАНОВ, канд. физ.-мат. наук
Киевский институт инженеров гражданской авиации

О РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ С МАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$X^{n+1} = X^n + \mu A(\xi_n) X^n, \tag{1}$$

где $A_\alpha = A(\alpha)$ — квадратная матрица порядка N, $X^n \in E^N$, ξ_n — однородная марковская цепь, принимающая конечное число значений $\xi_n \in \{1, 2, \dots, k\}$ с матрицей переходных вероятностей

$$P = (p_{ij}) = (P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\}), \quad i, j = 1, \dots, k. \tag{2}$$

Пусть $M^n = EX^n$ — вектор математических ожиданий X^n. Если для последовательности векторов M^n при произвольном начальном условии M^0 выполняется соотношение

$$M^n = e^{nK}(C + \mathrm{o}) M^0 \tag{3}$$

при $n \to \infty$, K, C — некоторые постоянные матрицы, о — бесконечно малая матрица при $n \to \infty$, то будем говорить, что для M^n имеет место представимость Флоке [1]. Одной из основных целей настоящей работы является нахождение условий представимости (3) для первых моментов решения системы (1).

Для условной марковской цепи X^n, которая входит в марков скую цепь (X^n, ξ^n), моментные уравнения имеют вид

$$M^{n+1}(\beta) = \sum_{\alpha=1}^{k} p_{\alpha\beta}(E + \mu A_\alpha) M^n(\alpha), \tag{4}$$

где векторы $M^n(\alpha)$ связаны с вектором математических ожиданий M^n по формуле

$$M^n = \sum_{\alpha=1}^{k} M^n(\alpha), \; M^n(\alpha) = E(X^n, \xi_n = \alpha). \tag{5}$$

Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_k) = (X_\alpha)$ — совокупность матриц таких, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} X_\alpha = E$. Множество таких совокупностей матриц обозначим L_1. Если же для $X = (X_\alpha)$ выполняется $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} X_\alpha = 0$, то множество таких совокупностей, являющееся линейным подпространством, обозначим L_0. Линейные операции для $X = (X_\alpha)$ определяются очевидным образом.

Введем в рассмотрение оператор

$$X_\beta^{n+1} = \sum_{\alpha=1}^{k} p_{\alpha\beta} (E + \mu A_\alpha) X_\alpha^n (E + \mu \Phi_{X^n})^{-1}, \tag{6}$$

где $\Phi_{X^n} = \sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha X_\alpha^n$.

Легко показать, что $(X_\alpha^{n+1}) \in L_1$, если $(X_\alpha^n) \in L_1$.

Рассмотрим также k-мерное пространство $E^k = \{x\} = \{(x_1, \ldots, x_k)\}$ и в нем гиперплоскость $\pi = \left\{ x, \sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \right\}$. Преобразование $y_j = \sum_{i=1}^{k} p_{ij} x_i$ отображает гиперплоскость π в себя. Свойство эргодичности матрицы переходных вероятностей P состоит в существовании такого постоянного числа k, $0 < k < 1$, что для всякого $x \in \pi$

$$\max_j |y_j| \leqslant k \max_i |x_i|. \tag{7}$$

Теорема 1. Если матрица P переходных вероятностей (2) эргодична, то для всякого $X^0 = (X_\alpha^0) \in L_1$ найдется такое $\mu_0 > 0$, что для всех $|\mu| < \mu_0$ имеет место $\lim_{n\to\infty} X_\alpha^n = X_\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим матричное преобразование

$$Y_\beta = \sum_{\alpha=1}^{k} p_{\alpha\beta} X_\alpha,$$

где $X_\alpha \in L_0$, значит, $(Y_\beta) \in L_0$. В силу (7) имеет место оценка

$$\max_\beta \| Y_\beta \| \leqslant k \max_\alpha \| X_\alpha \|, \tag{8}$$

где под нормой матрицы $X_\alpha = (x_{\alpha ij})$ понимается

$$\| X_\alpha \| = \| (x_{\alpha ij}) \| = \max_{ij} | x_{\alpha ij} |.$$

Под нормой линейных операторов вида $Y_\alpha = A X_\alpha$ или $Y_\alpha = X_\alpha A$, $A = (a_{ij})$, понимается $\| A \| = \max_i \sum_j | a_{ij} |$ или $\| A \| = \max_j \sum_i | a_{ij} |$.

Пусть (X_α^n) и (Y_α^n) — два каких-либо значения из L_1, (X_β^{n+1}) и (Y_β^{n+1}) — их преобразования по формулам (6). Рассмотрим разности

$$X_\beta^{n+1} - Y_\beta^{n+1} = \sum_{\alpha=1}^{k} p_{\alpha\beta} (U_\alpha - V_\alpha),$$

где

$$U_\alpha = (E + \mu A_\alpha) X_\alpha^n (E + \mu \Phi_{X^n})^{-1},$$

$$V_\alpha = (E + \mu A_\alpha) Y_\alpha^n (E + \mu \Phi_{Y^n})^{-1}.$$

Ясно, что $(U_\alpha - V_\alpha) \in L_0$ и $(X_\beta^{n+1} - Y_\beta^{n+1}) \in L_0$. Согласно формуле (8)

$$\max_\beta \| X_\beta^{n+1} - Y_\beta^{n+1} \| \leqslant k \max_\alpha \| U_\alpha - V_\alpha \|. \tag{9}$$

Далее,

$$U_\alpha - V_\alpha = (E + \mu A_\alpha) [X_\alpha^n (E + \mu \Phi_{X^n})^{-1} - Y_\alpha^n (E + \mu \Phi_{X^n})^{-1}] =$$

$$= (E + \mu A_\alpha) [(X_\alpha^n - Y_\alpha^n) (E + \mu \Phi_{X^n})^{-1} +$$

$$+ Y_\alpha^n ((E + \mu \Phi_{X^n})^{-1} - (E + \mu \Phi_{Y^n})^{-1})].$$

Рассмотрим отдельно

$$(E + \mu \Phi_{X^n})^{-1} - (E + \mu \Phi_{Y^n})^{-1} = \sum_{s=1}^{\infty} (\Phi_{X^n}^s - \Phi_{Y^n}^s) (-\mu^s).$$

Первое слагаемое в этой бесконечной сумме оценивается по формуле

$$\| \Phi_{X^n} - \Phi_{Y^n} \| = \left\| \sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha (X_\alpha^n - Y_\alpha^n) \right\| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{k} \| A_\alpha \| \| X_\alpha^n -$$

$$- Y_\alpha^n \| \leqslant \max_\alpha \| X_\alpha^n - Y_\alpha^n \| \sum_{\alpha=1}^{k} \| A_\alpha \| = a \max_\alpha \| X_\alpha^n - Y_\alpha^n \|,$$

$$a = \sum_{\alpha=1}^{k} \| A_\alpha \|.$$

По индукции доказывается оценка $\| \Phi_{X^n}^s - \Phi_{Y^n}^s \| \leqslant \varphi^{s-1} as \times \times \max \| X_\alpha^n - Y_\alpha^n \|$, где число φ определяется неравенством $\max \{\| \Phi_{X^n} \|, \| \Phi_{Y^n} \|\} \leqslant \varphi$. Поэтому

$$\left\| \sum_{s=1}^{\infty} (-\mu)^s (\Phi_{X^n}^s - \Phi_{Y^n}^s) \right\| \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s a \varphi^{s-1} s \max_\alpha \| X_\alpha^n - Y_\alpha^n \| =$$

$$= \mu a (1 - \mu\varphi)^{-2} \max_\alpha \| X_\alpha^n - Y_\alpha^n \|.$$

Справедливы также оценки $\| E + \mu A_\alpha \| \leqslant 1 + \mu a'$, $\| X_\alpha^n \| \leqslant c$, $\| Y_\alpha^n \| \leqslant c$, $\| (E + \mu \Phi_{X^n})^{-1} \| \leqslant (1 - \mu\varphi)^{-1}$. Поэтому справедлива оценка

$$\max_\alpha \| U_\alpha - V_\alpha \| \leqslant [(1 + \mu a') (1 - \mu\varphi)^{-1} + c\mu a (1 - \mu\varphi)^{-2}] \times$$

$$\times \max_\alpha \| X_\alpha^n - Y_\alpha^n \|,$$

$$\varkappa(\mu) = (1 + \mu a')(1 - \mu\varphi)^{-1} + c\mu a(1 - \mu\varphi)^{-2}.$$

Согласно формуле (8) имеет место оценка

$$\max_{\beta} \| X_\beta^{n+1} - Y_\beta^{n+1} \| \leqslant k\varkappa(\mu) \max_{\alpha} \| X_\alpha^n - Y_\alpha^n \|. \qquad (9')$$

Выберем число $\varkappa$, $k < \varkappa < 1$. Соответствующее число μ_0 такое, что $k\varkappa(\mu_0) = \varkappa$ и при всех $|\mu| \leqslant \mu_0$, $k\varkappa(\mu) < \varkappa$, очевидно, найдется. Члены последовательности $\{(X_\alpha^n)\}$ и их предел X_α легко оцениваются одной и той же постоянной, а именно,

$$\max_{\alpha} \| X_\alpha \| \leqslant \max_{\alpha} \| X_\alpha^0 \| + \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n \max_{\alpha} \| X_\alpha^1 - X_\alpha^0 \| = c. \qquad (10)$$

Это число c и соответствующее число φ присутствуют во всех формулах, приведенных выше. Из произвольности $\| X_\alpha^0 \|$ и возможности найти соответствующее число c по формуле (10) следует утверждение теоремы.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для последовательности первых моментов $\{M^n\}$ справедлива представимость (3) при достаточно малых μ.

Доказательство. Будем рассматривать уравнение (4) как матричное. Согласно (6) последовательность $M^n(\beta)$ может быть найдена по формуле

$$M_\beta^n = X_\beta^n (E + \mu\Phi_{X^{n-1}}) \ldots (E + \mu\Phi_{X^0}). \qquad (11)$$

Суммируя это равенство по β с учетом того, что $(X_\beta^n) \in L_1$, получаем для матрицы первых моментов представление

$$M^n = (E + \mu\Phi_{X^{n-1}}) \ldots (E + \mu\Phi_{X^0}). \qquad (12)$$

Пусть $\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi_{X^n}$. Обозначим $T_n = E + \mu\Phi_{X^n}$, $T = E + \mu\Phi$, $T_n = T + \mu\varkappa^n R_n$, $R_n = \sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} (X_\alpha^i - X_\alpha^{i-1}) \right)$ и рассмотрим произведение

$$T^{-n}M^n = T^{-n}T_{n-1}T_{n-2}\ldots T_0 = T^{-n}\prod_{i=0}^{n-1} T_i =$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} T^{-1}(T^{-i}T_iT^i) = \prod_{i=0}^{n-1} (E + \mu\varkappa^i T^{-1}T^{-i}R_iT_i). \qquad (13)$$

Поскольку для любого i $\| R_i \| \leqslant c$ с некоторой постоянной c, то (также для любого i)

$$\| T^{-1}T^{-i}R_iT^i \| \leqslant \left(\frac{1 + \mu\varphi}{1 - \mu\varphi} \right)^i \| T^{-1} \| c = \left(\frac{1 + \mu\varphi}{1 - \mu\varphi} \right)^i \gamma,$$

где $\|T\| \leqslant 1+\mu\varphi$, под нормой матрицы понимается ее евклидова норма. Поэтому имеет место оценка

$$\|E+\mu\varkappa^i T^{-1} T^{-i} R_i T^i\| \leqslant 1+\mu\varkappa^i \left(\frac{1+\mu\varphi}{1-\mu\varphi}\right)^i \gamma = 1+\mu\varkappa_1^i \gamma,$$

где $\varkappa \leqslant \varkappa_1 < 1$ при достаточно малых μ. Но бесконечное произведение $\prod\limits_{i=0}^{\infty}(1+\mu\varkappa_1^i\gamma)$ сходится, значит, сходится и произведение

$$\prod_{i=0}^{\infty}(E+\mu\varkappa^i T^{-1} T^{-i} R_i T^i) = \lim_{n\to\infty} T^{-n} T_{n-1} \dots T_0 = C,$$

где C — некоторая постоянная матрица. Следовательно,

$$T^{-n} M^n = C + o \tag{14}$$

при $n \to \infty$. Обозначая $T = e^K$, умножая равенство (14) справа на произвольное условие M^0, получаем окончательно представимость (3). В качестве $\mu_0 > 0$ выбираем наименьшее из ограничений на μ в теоремах 1 и 2. Теорема доказана.

Замечание. Асимптотическое поведение последовательности $\{M^n\}$ определяется матрицей K. Собственные значения матрицы K назовем характеристическими показателями системы (4).

Теорема 3. Для достаточно малых μ последовательность первых моментов M^n:

а) устойчива, если вещественные части характеристических показателей неположительны (если они нулевые или чисто мнимые, то им соответствуют простые элементарные делители);

б) асимптотически устойчива, если все вещественные части характеристических показателей отрицательны;

в) неустойчива, если характеристический показатель — с положительной вещественной частью, либо чисто мнимый (в частности, нулевой) с непростым элементарным делителем.

Замечание. Настоящая работа может быть полезна при исследовании систем дифференциальных уравнений со случайными параметрами, в которых возмущения, более регулярные, чем белые шумы, являются, например, колебательными, непрерывными и др.

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., 1972.

Поступила в редколлегию 25.04.80

S. M. Hrisanov

ON DIFFERENCE EQUATIONS WITH MARKOV COEFFICIENTS

It is considered linear homogeneous system of difference equations with Markov coefficients which are realizations of finite Markov's chain. Theorems about exponential representation of first moments of given system solution and its stability are proved.