УДК 519.21

В. А. ДМИТРОВСКИЙ, ассист.
Обнинский филиал МИФИ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА И ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕАЛИЗАЦИЙ ПРЕДГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ

I. Пусть T — некоторое множество, $\xi(t)$, $t \in T$ — случайное поле и существуют такие константы k и K ($0 < k$, $K < \infty$), что $\forall t \in T E \exp\{k|\xi(t)|\} \leqslant K$. Такие поля, следуя работе [1], будем называть предгауссовскими. Нашей целью является определение достаточных условий для ограниченности реализаций поля с вероятностью 1 и оценка вероятности

$$P\{\sup_{t \in T} \xi(t) \geqslant u\}. \tag{1}$$

Кроме того, нас будут интересовать достаточные условия непрерывности $\xi(t)$ в некоторой топологии, естественно связанной с полем, а также условия принадлежности поля некоторым функциональным пространствам, аналогичным пространству липшицевых функций на отрезке [0, 1]. Подобная задача в некоторых частных случаях изучалась в работах [1—4] и др. В настоящей статье она решается в самой общей постановке. Следует заметить, что полученные результаты даже в случае, если $\xi(t)$ — гауссовское поле, улучшают известные оценки вероятности (1), например оценку Ферника [2].

II. Пусть $E\xi(t) \equiv 0$ и $\delta = \sup_{t \in T} E\xi^2(t) > 0$. Введем функцию $\varphi(\lambda) = \max_{|x|=\lambda} \sup_{t \in T} \ln E \exp\{x\xi(t)\}$, $\lambda \geqslant 0$ и положим $\Lambda = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств функции φ:

1) $\Lambda > 0$, не исключен случай $\Lambda = \infty$;

2) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$;

3) $\varphi(\lambda)$ определена, непрерывна, монотонно возрастает и выпукла на $[0, \Lambda)$;

4) для каждого $\lambda \in (0, \Lambda)$ существуют правая ($\varphi'(\lambda + 0)$) и левая ($\varphi'(\lambda - 0)$) производные функции $\varphi(\lambda)$, почти для всех по мере Лебега $\lambda \in (0, \Lambda)$ $\varphi'(\lambda + 0) = \varphi'(\lambda - 0)$;

5) функция $f(\lambda) = \varphi(\lambda)/\lambda$ монотонно возрастает на $[0, \Lambda)$ и $\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda)/\lambda = L > 0$, не исключен случай $L = \infty$.

Из этих свойств вытекает, что для функции $\varphi(\lambda)$ существует обратная к ней функция $\chi(y)$ ($\varphi(\chi(y)) = y$, $\chi(\varphi(\lambda)) = \lambda$), обладающая следующими свойствами:

1) $\chi(0) = 0$, $0 < \chi(y) \leqslant \Lambda$ при $y > 0$;

2) $\chi(y)$ определена, непрерывна, монотонно возрастает и вогнута на полупрямой $[0, \infty)$;

3) $f(y) = \chi(y)/y$ — монотонно убывающая функция, $\lim_{y \to \infty} \chi(y)/y = L^{-1}$.

Для функции φ рассмотрим преобразование Юнга—Фенхеля:

$$\varphi^*(x) = \sup_{\lambda \geqslant 0} (\lambda x - \varphi(\lambda)), \quad x \geqslant 0.$$

Подробно свойства этого преобразования см. в книге [5]. Отметим важнейшие для нас:

1) $\varphi^*(0) = 0$, $\varphi^*(x) > 0$ при $x > 0$;

2) $\varphi^*(x)$ определена, непрерывна, монотонно возрастает и выпукла на $[0, L)$;

3) $\varphi^*(x) = x\lambda_x - \varphi(\lambda_x)$, где λ_x удовлетворяет уравнению $\varphi'(\lambda_x - 0) = x$; $\varphi^*(x) + \varphi(\lambda) \geqslant \lambda x$. Последнее свойство носит название неравенства Юнга—Фенхеля.

Введем функцию $\rho(t, s) = \sup\limits_{x \in (-\infty, \infty)} |x|^{-1} \chi [\ln E\exp \{x (\xi(t) - \xi(s))\}]$. Покажем, что для всех пар $(t, s) \in T \times T \rho(t, s) \leqslant 2$. Действительно, из определения ρ вытекает, что

$$E\exp\{x(\xi(t) - \xi(s))\} \leqslant \exp\{\varphi(|x| \rho(x, s)\}.$$

Пусть $|x| < 0{,}5\Lambda$. Тогда по неравенству Гельдера

$$\ln E\exp\{x(\xi(t) - \xi(s))\} \leqslant 0{,}5 \ln E\exp\{2x\xi(t)\} + $$
$$+ 0{,}5 \ln E\exp\{-2x\xi(s)\} \leqslant \varphi(2|x|),$$

откуда $|x|^{-1}\chi[\ln E\exp\{x(\xi(t) - \xi(s))\} \leqslant 2$.

Если $\Lambda = \infty$, неравенство $\rho(t, s) \leqslant 2$ доказано. Это неравенство справедливо и при $\Lambda < \infty$, поскольку в силу свойства 1 функции χ при $|x| \geqslant 0{,}5\Lambda$

$$|x|^{-1}\chi[\ln E\exp\{x(\xi(t) - \xi(s))\}] \leqslant |x|^{-1}\Lambda \leqslant 2.$$

Далее, очевидно, что $\rho(t, s) = \rho(s, t)$, $\rho(t, t) = 0$, но $\rho(t, s)$ может быть равна нулю и при $t \neq s$.

Докажем для $\rho(t, s)$ неравенство треугольника. Пусть $\alpha \in [0, 1]$. По неравенству Гельдера для любого $z \in T$

$$\chi[\ln E\exp\{x(\xi(t) - \xi(s))\}] \leqslant$$
$$\leqslant \chi\left[\alpha \ln E\exp\left\{\frac{x}{\alpha}(\xi(t)\,\xi(z))\right\} + \right.$$
$$\left. + (1-\alpha)\ln E\exp\left\{\frac{x}{1-\alpha}(\xi(z) - \xi(s))\right\}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \chi\left[\alpha\varphi\left(\frac{|x|}{\alpha}\rho(t, z)\right) + (1-\alpha)\varphi\left(\frac{|x|}{1-\alpha}\rho(z, s)\right)\right]. \qquad (2)$$

Если $\rho(t, z) = \rho(z, s) = 0$, то $\rho(t, s) = 0$, и неравенство треугольника очевидно. Пусть $\rho(t, z) + \rho(z, s) > 0$. Положим в неравенстве (2) $\alpha = \rho(t, z) / (\rho(t, z) + \rho(z, s))$. Тогда

$$\chi[\ln E\exp\{x(\xi(t) - \xi(s))\} \leqslant |x| \rho(t, z) + \rho(z, s),$$

откуда вытекает, что $\rho(t, s) \leqslant \rho(t, z) + \rho(z, s)$. Следовательно, функция $\rho(t, s)$ является псевдометрикой на множестве T. Будем называть ее и индуцируемую ею топологию естественными для предгауссовского поля $\xi(t)$. Соответствующее топологическое пространство будем обозначать (T, ρ); $B(t, \delta)$ — δ-шар с центром в точке t, $B(t, \delta) = \{s : \rho(t, s) < \delta\}$, $S(\varepsilon)$ — ε-сеть на (T, ρ), т. е. такое множество точек, что $T = \bigcup_{s \in S(\varepsilon)} B(s, \varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ — минимально возможное число точек в ε-сети, $H(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$ — ε-энтропия пространства (T, ρ). Минимальной будем называть такую ε-сеть, в которой число точек равно $N(\varepsilon)$.

Введем функцию

$$\Psi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon H(x)\,[\chi(H(x))]^{-1}\,dx.$$

Если для поля $\xi(t)$ $L = \infty$, то конечность $\Psi(\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ влечет за собой конечность $H(\varepsilon)$ и $\Psi(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, следовательно, предкомпактность и сепарабельность пространства (T, ρ). Если же $L < \infty$, то такие выводы несправедливы. Этот случай будет рассмотрен отдельно.

III. Определим условия непрерывности и ограниченности предгауссовских полей.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ — сепарабельное поле относительно некоторого сепарабельного на (T, ρ) множества, $L = \infty$, $\Psi(1) < \infty$. Тогда $\xi(t)$ ограничено и непрерывно на (T, ρ) с вероятностью 1, и для всех

$$u \geqslant \inf_{p \in (0,1)} \left[\frac{2}{p(1-p)}\,\Psi(p) + \frac{1}{1-p}\,\varphi'\left(\frac{1}{2(1-p)}\,\chi(H(p)) - 0\right)\right] \tag{3}$$

справедлива оценка

$$P\{\sup_{t \in T} \xi(t) \geqslant u\} \leqslant \exp\{-\varphi^*(u) - \overline{\Psi}(u)\}, \tag{4}$$

где $\overline{\Psi}(u) = \inf_{p \in (0,1)} [up + 2p^{-1}\Psi(p)]$.

Доказательство. Пусть $p \in (0, 1)$ Рассмотрим минимальные (p^k)-сети на $(T, \rho) : S_k = S(p^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, $S^n = \bigcup_{k=1}^n S_k$, $S = \bigcup_{k=1}^\infty S_k$. Перенумеруем некоторым образом точки каждой из сетей: $S_k = \{s_k^i\}_{i=1}^{N(p^k)}$. Введем множества $W_k(s_k^i)$ следующими рекуррентными соотношениями: $W_k(s_k^1) = B(s_k^1, p^k)$, $W_k(s_k^i) = B(s_k^i, p^k) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} W_k(s_k^j)$, $i = \overline{2, N(p^k)}$. Очевидно, что наборы множеств $\{W_k(s_k^i)\}_{i=1}^{N(p^k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ образуют покрытия T, причем $W_k(s_k^i) \cap W_k(s_k^j) = \varnothing$, $i \neq j$. Определим для всех k отображение $\theta : S_{k+1} \to$

$\to S_k$ по следующему правилу. Для любого $s \in S_{k+1}$ $\theta(s) = s' \in S_k$, если $s \in W_k(s')$. Нетрудно убедиться, что это отображение однозначно.

Заметим, что поле $\xi(t)$ стохастически непрерывно на (T, ρ). Поэтому в силу условий теоремы оно сепарабельно относительно любого сепарабельного на (T, ρ) множества, в том числе — относительно множества S [6, с. 210]. Следовательно,

$$\sup_{t \in T} \xi(t) = \sup_{t \in S} \xi(t) = \lim_{n \to \infty} \sup_{t \in S^n} \xi(t). \qquad (5)$$

Пусть $t \in S_n$. Тогда, очевидно, найдется единственный набор точек $\{t_k\}_{k=1}^n$ такой, что $t_k \in S_k$, $t_k = \theta(t_{k+1})$, $t_n = t$ и $\xi(t) = \xi(t_1) + \sum_{k=2}^{\infty} (\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}))$, откуда следует, что

$$\sup_{t \in S^n} \xi(t) \leqslant \sup_{t \in S_1} \xi(t) + \sum_{k=2}^{n} \sup_{t \in S_k} (\xi(t) - \xi(\theta(t))).$$

Положим $\xi(\theta(t)) = 0$ для всех $t \in S_1$. Тогда в силу равенства (4) и последнего неравенства

$$\sup_{t \in T} \xi(t) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in S_k} (\xi(t) - \xi(\theta(t))).$$

Пусть $z \geqslant H(p)$, $q_k = p^{-k+1} \chi(z + H(p^k))$, $\lambda = \left[\sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1}\right]^{-1}$. Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda q_k^{-1} = 1$, то согласно неравенству Гельдера

$$E \exp\{\lambda \sup_{t \in T} \xi(t)\} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} [E \exp\{q_k \sup_{t \in S_k} (\xi(t) - \xi(\theta(t)))\}]^{\lambda q_k^{-1}}.$$

Для каждого из сомножителей справедливо неравенство

$$E \exp\{q_k \sup_{t \in S_k} (\xi(t) - \xi(\theta)))\} \leqslant \sum_{t \in S_k} E \exp\{q_k (\xi(t) - \xi(\theta(t)))\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t \in S_k} \exp\{\varphi(q_k \rho(t, \theta(t))\} \leqslant \exp\{\varphi(q_k p^{k-1}) + H(p^k)\}. \qquad (6)$$

Следовательно,

$$E \exp\{\lambda \sup_{t \in T} \xi(t)\} \leqslant \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1} (H(p^k) + \varphi(p^{k-1} q_k))\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \frac{z + 2H(p^k)}{\chi(z + H(p^k))}\right\}.$$

Из определения чисел q_k и λ вытекают неравенства $(1 - p)\chi(z + H(p)) \leqslant \lambda \leqslant \chi(z + H(p))$, откуда

$$E \exp\{\lambda \sup_{t \in T} \xi(t)\} \leqslant \exp\left\{2\lambda \sum_{k=2}^{\infty} p^{k-1} \frac{H(p^k) - H(p)}{\chi(z + H(p^k))} + z + 2H(p)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda}{1-p}\right) + 2\lambda \sum_{k=2}^{\infty} p^{k-1} \frac{H(p^k)}{\chi(H(p^k))} + H(p)\right\}.$$

Заметим, что в силу свойства 3 функции $\chi(y)$

$$\sum_{k=2}^{\infty} p^{k-1} \frac{H(p^k)}{\chi(H(p^k))} = \frac{1}{p(1-p)} \sum_{k=2}^{\infty} (p^k - p^{k+1}) \frac{H(p^k)}{\chi(H(p^k))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p(1-p)} \sum_{k=2}^{\infty} \int_{p^{k+1}}^{p^k} H(x)\,[\chi(H(x))]^{-1}\,dx = \frac{1}{p(1-p)} \Psi(p^2).$$

Следовательно,

$$E \exp\{\lambda \sup_{t\in T} \xi(t)\} \leqslant \exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda}{1-p}\right) + \frac{2\lambda}{p(1-p)} \Psi(p^2) + H(p)\right\}.$$

Но при $\lambda \geqslant 0{,}5\chi(H(p))$

$$\frac{2\lambda}{p(1-p)} \Psi(p^2) + H(p) \leqslant \frac{2\lambda}{p(1-p)} \Psi(p^2) + \int_{p^2}^{p} H(x)\,[\chi(H(x))]^{-1}\,dx =$$

$$= \frac{2\lambda}{p(1-p)} \Psi(p).$$

По неравенству Чебышева

$$P\{\sup_{t\in T} \xi(t) \geqslant u\} \leqslant \exp\{-\lambda u\}\, E \exp\{\lambda \sup_{t\in T} \xi(t)\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\left[\frac{\lambda}{1-p}(u - up - 2p^{-1}\Psi(p) - \varphi\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)\right]\right\}.$$

Последнее неравенство справедливо при всех $\lambda \geqslant 0{,}5\chi(H(p))$. Поэтому

$$P\{\sup_{t\in T} \xi(t) \geqslant u\} \leqslant \exp\left\{-\sup_{\lambda \geqslant 0{,}5\chi(H(p))} \left[\frac{\lambda}{1-p}(u - up - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2p^{-1}\Psi(p)) - \varphi\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)\right]\right\}.$$

Но в силу свойства 3 функции $\varphi^*(x)$ при $u \geqslant \frac{2}{p(1-p)} \Psi(p) + \frac{1}{1-p} \varphi'\left(\frac{\chi(H(p))}{2(1-p)} - 0\right)$

$$P\{\sup_{t\in T} \xi(t) \geqslant u\} \leqslant \exp\{-\varphi^*(u - up - 2p^{-1}\Psi(p))\}.$$

Выбирая p из соображений минимальности правой части последнего неравенства, приходим к неравенству (4) при условии (3).

Очевидно, что из доказанного вытекает ограниченность поля с вероятностью 1.

Прежде чем доказывать непрерывность поля, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 для любых $\varepsilon > 0$ и $p \in (0, 1)$

$$\lim_{k\to\infty} [\varphi^*(\varepsilon p^{-k}) - 2H(p^k)] = \infty,$$

Доказательство. Очевидно, что утверждение леммы справедливо, если $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi^*(\varepsilon p^{-k})/H(p^k) = \infty$. По условию теоремы $\Psi(1) < \infty$. Но

$$\Psi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p^{k+1}}^{p^k} H(x)[\chi(H(x))]^{-1} dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} (p^k - p^{k+1}) \times$$

$$\times H(p^k)/\chi(H(p^k)) = (1 - p) \sum_{k=0}^{\infty} p^k H(p^k)/\chi(H(p^k)).$$

Из неравенства Юнга — Фенхеля при $\lambda = \chi(H(p^k))$, $x = \varepsilon p^{-k}$ вытекает, что $H(p^k) + \varphi^*(\varepsilon p^{-k}) \geqslant \varepsilon p^{-k}\chi(H(p^k))$. Поэтому

$$\Psi(1) \geqslant \varepsilon(1 - p) \sum_{k=0}^{\infty} H(p^k)/H(p^k) + \varphi^*(\varepsilon p^{-k}) =$$

$$= \varepsilon(1 - p) \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \varphi^*(\varepsilon p^{-k})/H(p^k))^{-1}.$$

Справедливость утверждения леммы следует из сходимости последнего ряда.

Положим для простоты $p = 0{,}5$, $n = [\log_2(\delta^{-1})]$, где $[\alpha]$ — целая часть α. Рассуждая так же, как при доказательстве ограниченности поля, можно показать, что

$$\sup_{\substack{(t,s)\in T\times T\\ \rho(t,s)\leqslant\delta}} (\xi(t) - \xi(s)) \leqslant \sup_{\substack{(t,s)\in S_n\times S_n\\ \rho(t,s)\leqslant 4\cdot 2^{-n}}} (\xi(t) - \xi(s)) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{t\in S_k} (\xi(t) - \xi(\theta(t)))$$

и для всех $\lambda \geqslant 0$

$$E\exp\{\lambda \sup_{\substack{(t,s)\in T\\ \rho(t,s)\leqslant\delta}} (\xi(t) - \xi(s))\} \leqslant \exp\{\varphi(5\lambda 2^{-n}) + 12\lambda\Psi(2^{-n+1}) + 2H(2^{-n})\}.$$

По неравенству Чебышева

$$P\{\sup_{\substack{(t,s)\in T\times T\\ \rho(t,s)\leqslant\delta}} (\xi(t) - \xi(s)) \geqslant u\} \leqslant \exp\{-\lambda u + \varphi(5\lambda\cdot 2^{-n}) +$$

$$+ 12\lambda\Psi(2^{-n+1}) + 2H(2^{-n})\} = \exp\{-[5\lambda 2^{-n}(0,\ 2u\cdot 2^n -$$

$$- 2{,}4\cdot 2^n\Psi(2^{-n+1})) - \varphi(5\lambda\cdot 2^{-n})] + 2H(2^{-n})\},$$

откуда при всех $u \geqslant 12\Psi(2^{-n+1})$ вытекает неравенство

$$P\{\sup_{\substack{(t,s)\in T\times T\\ \rho(t,s)\leqslant\delta}} (\xi(t) - \xi(s)) \geqslant u\} \leqslant \exp\{-\varphi^*(0{,}2u\cdot 2^n -$$

$$- 3\cdot 2^n\Psi(2^{-n+1})) + 2H(2^{-n})\}.$$

Поэтому в силу леммы 1 для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} P\{\sup_{\substack{(t,s)\in T\times T\\ \rho(t,s)\leqslant\delta}} (\xi(t)-\xi(s)) \geqslant \varepsilon\} \leqslant \lim_{n\to\infty} \exp\{-\varphi^*)0{,}2u\cdot 2^n -$$

$$-3\cdot 2\Psi(2^{-n+1})) + 2H(2^{-n})\} = 0.$$

Но условие $\forall\varepsilon \lim_{\delta\to 0} P\{\sup_{\substack{(t,s)\in T\times T\\ \rho(t,s)\leqslant\delta}} (\xi(t)-\xi(s)) \geqslant \varepsilon\} = 0$ является необходимым и достаточным для непрерывности поля $\xi(t)$ [7, с. 48]. Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что оценка вероятности $P\{\sup_{t\in T}|\xi(t)| \geqslant u\}$ получается из оценки (3) умножением на 2 правой части.

Замечание 2. Если для поля $\xi(t)$ $L < \infty$, то $\Psi(\varepsilon) \leqslant L\varepsilon$ независимо от того, как быстро растет энтропия $H(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. Поэтому если существует такое ε_0, что $H(\varepsilon) = \infty$ при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$, неравенства (5) становятся тривиальными и оценка (3) перестает быть справедливой. Но, как нетрудно показать, в этом случае

$$P\{\sup_{t\in T}|\xi(t)| > L\} = 0,$$

$$P\{\sup_{\substack{(t,s)\in T\times T\\ \rho(t,s)\leqslant\delta}} |\xi(t)-\xi(s)| > L\delta\} = 0,$$

т. е. значения поля $\xi(t)$ ограничены по модулю величиной L, и реализации поля непрерывны с вероятностью 1 в естественной топологии.

Замечание 3. При доказательстве свойств псевдометрики $\rho(t, s)$ использованы далеко не все свойства функций $\varphi(\lambda)$ и $\chi(y)$. Поэтому мы можем рассматривать другие псевдометрики, отличные от естественной и индуцируемые полем $\xi(t)$ по формуле

$$\tilde{\rho}(t, s) = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x|^{-1}\tau[\ln E\exp\{x(\xi(t)-\xi(s))\}],$$

где τ — некоторая строго возрастающая функция, $\tau(0) = 0$. Введение таких псевдометрик имеет смысл, если поле $\xi(t)$ не является предгауссовским, но имеет предгауссовские приращения, т. е. поле $\eta(t, s) = \xi(t) - \xi(s)$ на множестве $T\times T$ является предгауссовским. В следующем пункте введем псевдометрику, отличную от естественной, для того чтобы иметь возможность установить взаимосвязь энтропий двух различных пространств.

IV. Проанализируем локальные свойства предгауссовских полей. Пусть $r(t, s)$ — некоторая метрика на T. Будем говорить, что функция $f(t)$, $t\in T$ принадлежит пространству Липшица относительно метрики r ($f(t)\in \mathrm{Lip}(T, r)$), если для нее существует такая константа $C < \infty$, что для всех пар $(t, s)\in T\times T$ $|f(t)-f(s)|/r(t, s) \leqslant C$.

Рассмотрим вопрос о принадлежности предгауссовского поля $\xi(t)$ пространству $\mathrm{Lip}(T, r)$ с вероятностью 1, для чего оценим распределение случайной величины $\sup\limits_{(t,s)\in T\times T} |\xi(t)-\xi(s)|/r(t,s)$. Потребуем, чтобы для метрики r существовала такая выпуклая монотонно невозрастающая функция $h(\delta)$, что

$$[r(t,s)]^{-1}\leqslant h(\rho(t,s)); \tag{7}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\delta h(\delta)=0. \tag{8}$$

Введем новое поле на множестве $T\times T$. Для каждого $\tilde{t}=(t_1, t_2)$ положим

$$\eta(\tilde{t})=\begin{cases} h(\rho(t_1t_2))(\xi(t_1)-\xi(t_2)), & \rho(t_1,t_2)\neq 0,\\ 0, & \rho(t_1,t_2)=0.\end{cases}$$

Очевидно, что поле $\eta(\tilde{t})$ будет предгауссовским, причем для соответствующей ему функции $\varphi_\eta(\lambda)$ справедливо неравенство

$$\varphi_\eta(\lambda)\leqslant\varphi(\varkappa\lambda),\quad \varkappa=\sup_{0\leqslant\delta\leqslant 2}\delta h(\delta). \tag{9}$$

Введем функцию

$$\omega(\varepsilon)=\inf\{\delta:\delta h(\delta)=\varepsilon\}. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться в том, что она неубывающая, $\omega(0)=0$ и $\delta h(\delta)\leqslant\varepsilon$ для всех $\delta\leqslant\omega(\varepsilon)$.

Определим псевдометрику на $T\times T$:

$$\rho_\eta(\tilde{t},\tilde{s})=\sup_{x\in(-\infty,\infty)}|x|^{-1}\chi[\ln E\exp\{x(\eta(\tilde{t})-\eta(\tilde{s}))\}].$$

Как уже говорилось в замечании 3, она отличается от естественной для поля $\eta(\tilde{t})$ псевдометрики. Нетрудно показать, что $\rho_\eta(\tilde{t},\tilde{s})\leqslant 4\varkappa$, $\tilde{t}\in T\times T$, $\tilde{s}\in T\times T$. Через $H_\eta(\varepsilon)$ будем обозначать ε-энтропию пространства $(T\times T, \rho_\eta)$. Следующая лемма устанавливает связь между энтропиями пространств (T,ρ) и $(T\times T,\rho_\eta)$.

Лемма 2.

$$H_\eta(5\delta)\leqslant 2H(\omega(\delta)). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $S(\omega(\delta))$ — минимальная $(\omega(\delta))$-сеть на (T,ρ). Рассмотрим сеть $\tilde{S}=S(\omega(\delta))\times S(\omega(\delta))$ на пространстве $(T\times T,\rho_\eta)$. Для доказательства леммы достаточно установить, что $\tilde{S}$ является (5δ)-сетью.

Пусть $\tilde{t}=(t_1,t_2)$ — такая точка на $T\times T$, что $\rho(t_1,t_2)\leqslant\omega(2\delta)$. В этом случае она накрывается (2δ)-шаром с центром в любой из точек $\bar{s}=(s, s))$, где $s\in S(\omega(\delta))$. Действительно, в силу свойств функции $h(\delta)$

$$\rho_\eta(\bar{t}, \bar{s}) = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x|^{-1}\chi[\ln E\exp\{xh(\rho(t_1 t_2))(\xi(t_1)-\xi(t_2))\}] =$$

$$= h(\rho(t_1, t_2)) \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x|^{-1}\chi[\ln E\exp\{x(\xi(t_1)-\xi(t_2))\}] =$$

$$= \rho(t_1, t_2)\, h(\rho(t_1, t_2)) \leqslant 2\delta.$$

Пусть теперь $\rho(t_1, t_2) > \omega(2\delta)$. Тогда точка $\bar{t}=(t_1, t_2)$ будет накрываться шаром $B(\bar{s}, 5\delta)$, $\bar{s}=(s_1, s_2)$, где точки s_1, s_2 удовлетворяют условиям $\rho(t_1, s_1)\leqslant\omega(\delta)$, $\rho(t_2, s_2)\leqslant\omega(\delta)$. Действительно, положим $\nu=\rho(t_1, s_1)h(\rho(t_1, t_2))+\rho(t_2, s_2)h(\rho(t_1, t_2))+\rho(s_1, s_2)|h(\rho(t_1, t_2))-h(\rho(s_1, s_2))|$, $\alpha=\nu^{-1}\rho(t_1, s_1)h(\rho(t_1, t_2))$, $\beta=\nu^{-1}\rho(t_2, s_2)h(\rho(t_1, t_2))$, $\gamma=1-\alpha-\beta$. Тогда по неравенству Гельдера

$$\rho_\eta(\tilde{t}, \bar{s}) = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x|^{-1}\chi[\ln E\exp\{xh(\rho(t_1, t_2))(\xi(t_1)-\xi(t_2)) -$$

$$- xh(\rho(s_1, s_2))(\xi(s_1)-\xi(s_2))\}] = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x|^{-1}\chi[\ln E\exp\{xh(\rho(t_1, t_2))\times$$

$$\times(\xi(t_1)-\xi(s_1)) - xh(\rho(t_1, t_2))(\xi(t_2)-\xi(s_2)) - x(h(\rho(s, s_2)) -$$

$$- h(\rho(t_1, t_2))(\xi(s_1)-\xi(s_2))\}] \leqslant \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |x|^{-1}\chi\left[\alpha\varphi\left(\frac{|x|}{\alpha}\rho(t_1, s_1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times h(\rho(t_1, t_2))\right) + \beta\varphi\left(\frac{|x|}{\beta}\rho(t_2, s_2)h(\rho(t_1, t_2))\right) + \gamma\varphi\left(\frac{|x|}{\gamma}\rho(s_1, s_2)|\times\right.\right.$$

$$\times h(\rho(t_1, t_2)) - h(\rho(s_1, s_2))| = \nu \leqslant 2\omega(\delta)h(\omega(\delta)) +$$

$$+ \rho(s_1, s_2)|h(\rho(t_1, t_2)) - h(\rho(s_1, s_2))| \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta + \rho(s_1, s_2)|h(\rho(t_1, t_2)) - h(\rho(s_1, s_2))|.$$

Если $\rho(s_1, s_2)\leqslant\omega(2\delta)$, то $\rho_\eta(\bar{t_1}, \tilde{s_1})\leqslant 2\delta+\omega(2\delta)h(\omega(2\delta))\leqslant 4\delta$. Если же $\rho(s_1, s_2)>\omega(2\delta)$, то в силу выпуклости функции $h(\delta)$ при $y\geqslant x>1$

$$h(x\omega(\delta)) - h(y\omega(\delta)) \leqslant \frac{y-x}{y-1}(h(\omega(\sigma)) - h(y\omega(\delta))) \leqslant \frac{y-x}{y-1}h(\omega(\delta)),$$

откуда при $x=\frac{\rho(t_1, t_2)}{\omega(\delta)}$, $y=\frac{\rho(s_1, s_2)}{\omega(\delta)}$, $z=\max(x, y)$, $\rho_\eta(\tilde{t}, \bar{s})\leqslant 2\delta + \frac{(y-x)}{z-1}y\omega(\delta)h(\omega(\delta))\leqslant\delta\left(2+\frac{y|y-x|}{z-1}\right)\leqslant\frac{14}{3}\delta$, так как $\omega(2\delta) = \inf\{\varepsilon:\varepsilon h(\varepsilon)=2\delta\}\geqslant\inf\left\{\varepsilon:\frac{\varepsilon}{2}h\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\delta\right\}=2\inf\{\varepsilon:\varepsilon h(\varepsilon)=\delta\}=$

$= 2\omega(\delta)$, $x \geqslant \frac{\omega(2\delta)}{\omega(\delta)} \geqslant 2$, $y \geqslant 2$, $|y - x| \leqslant \frac{(\rho(t_1, s_1) + \rho(t_2, s_2))}{\omega(\delta)} \leqslant 2$.

Таким образом, любая точка $\tilde{t} \in T \times T$ накрывается (5δ)-шаром с центром в некоторой точке $\tilde{s} \in \tilde{S}$. Лемма доказана.

Поскольку

$$\sup_{(t_1,t_2)\in T\times T} \frac{|\xi(t_1) - \xi(t_2)|}{r(t_1, t_2)} = \sup_{\tilde{t}\in T\times T} \tilde{\eta}(\tilde{t}), \tag{12}$$

нам достаточно доказать ограниченность поля $\tilde{\eta}(\tilde{t})$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1 с учетом неравенств (8), (10), (11).

Теорема 2. Пусть $\tilde{\xi}(t)$ — предгауссовское поле, для которого выполнены условия теоремы 1, $r(t, s)$ — некоторая метрика на T, для которой существует выпуклая монотонно невозрастающая функция $h(\delta)$, удовлетворяющая условиям (6), (7). Если для некоторого $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\Psi_r(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} H(\omega(x))[\chi(\omega(x))]^{-1}\, dx$$

(функция $\omega(\delta)$ определена формулой (9)), то с вероятностью 1 $\xi(t) \in \mathrm{Lip}(T, r)$, для всех

$$u \geqslant \inf_{p\in(0,1)} \left[\frac{20}{p(1-p)} \Psi_r\left(\frac{p}{5}\right) + \frac{\varkappa+1}{1-p} \varphi' \frac{\varkappa+1}{(1-p)} \chi\left(H\left(\omega\left(\frac{p}{5}\right)\right) - 0\right)\right]$$

справедливо неравенство

$$P\left\{\sup_{(t,s)\in T\times T} \frac{|\xi(t) - \xi(s)|}{r(t,s)} \geqslant u\right\} \leqslant \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{u}{\varkappa+1} - \frac{1}{\varkappa+1} \overline{\Psi}_r(u)\right)\right\},$$

где $\overline{\Psi}_r(u) = \inf\limits_{p\in(0,1)}\left[up + \frac{20}{p} \Psi_r\left(\frac{p}{5}\right)\right]$, $\varkappa = \sup\limits_{0<\delta\leqslant 2} \delta h(\delta)$.

V. Рассмотрим применения полученных результатов. Пусть $\xi(t)$ — гауссовское поле на множестве T, $E\xi(t) \equiv 0$, $\sup\limits_{t\in T} E\xi^2(t) = 1$. Нетрудно убедиться, что в этом случае $\varphi(\lambda) = 0{,}5\lambda^2$, $\chi(y) = \sqrt{2y}$, $\varphi^*(x) = 0{,}5x^2$, $\psi(\varepsilon) = (\sqrt{2}/2)\int_0^{\varepsilon} \sqrt{H(x)}\, dx$, $P\{\sup\limits_{t\in T} \xi(t) \geqslant u\} \leqslant \exp\{-0{,}5(u - \overline{\Psi}(u))^2\}$, $\rho(t, s) = [E(\xi(t) - \xi(s))^2]^{1/2}$. Учитывая, что при $u \geqslant 2\Psi(1)$ $\overline{\Psi}(u) \leqslant \inf\limits_{p\in(0,1)}\left[up + \frac{2}{p}\Psi(1)\right] = 2\sqrt{2\omega\Psi(1)}$, мы можем переписать неравенство (3) в следующем виде: $P\{\sup\limits_{t\in T}\xi(t) \geqslant u\} \leqslant \exp\{-0{,}5u^2 + 3u^{3/2}\sqrt{\Psi(1)}\}$. Нетрудно убедиться, что эта оценка более точная, нежели оценка Ферника.

Пусть теперь $w(t)$ — винеровский процесс на отрезке [0, 1]. Для него $\rho(t, s) = \sqrt{|t - s|}$, $H(\delta) = 2\ln(\delta^{-1}) + O(\delta^2)$, $\Psi(\varepsilon) = \varepsilon\sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})} + o(\varepsilon)$. В книге [8] показано, что $w(t) \in \mathrm{Lip}(T, r)$, где $r(t, s) = \sqrt{|t - s| \ln(|t - s|^{-1})}$, $|t - s| \leqslant e^{-1}$. Теорема 2 гарантирует, что для любого $\alpha > 0$ $w(t) \in \mathrm{Lip}(T, \bar{r})$, где $\bar{r}(t, s) = r(t, s)[\ln\ln(|t - s|^{-1})]^{1+\alpha}$, $|t - s| \leqslant e^{-(3+2\alpha)}$.

Таким образом, несмотря на общую постановку решаемой задачи, результаты теорем 1 и 2 близки к неулучшаемым в конкретных случаях.

1. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О локальных свойствах реализаций некоторых случайных процессов и полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1974, вып. 10. 2. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes.— In: Lect. Notes Math., vol. 480. Berlin, 1975. 3. *Landau H. J., Shepp L. A.* On the supremum of Gaussian process.— Sankhya, Ser. A, 1971, 32, N 2. 4. *Markus M. B.* Hölder conditions Gaussian processes.— Osaka J. Math., 1970, 7, N 3. 5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., 1974. 6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971. 7. *Крамер Г.Н., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М., 1969. 8. *Lévy P.* Theorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 1954.

Поступила в редколлегию 21.04.79

V. A. Dmitrovsky

ON DISTRIBUTION OF MAXIMUM AND LOCAL PROPERTIES OF SAMPLE FUNCTIONS OF PREGAUSSIAN FIELDS

Let T be some set of parametres, $\xi(t)$, $t \in T$ — stochastic field and such constants $k > 0$ and $K < \infty$ exist that $\forall t\ E \exp\{k|\xi(t)|\} \leqslant K$ is valid. A sufficient condition for the field boundedness and continuity of its sample functions almost surely in some topology on T, naturally connected with this field is given. A sufficient condition for the field belonging to some function spaces which are generalisation of Lipschits spaces on [0, 1] is considered.