УДК 519.21

А. БЕНМАЛЕК, асп., Ю. В. КОЗАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ ГАУССОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Определение и некоторые свойства стохастических интегралов. Пусть $\{\Omega, \mathfrak{B}, P\}$ — стандартное вероятностное пространство, $\xi(\lambda, \omega)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, $M\xi(\lambda) = 0$ — измеримый гауссовский процесс (в дальнейшем ω будем опускать), для которого справедливо условие:

А) на любом интервале $[a, b]$ траектории $\xi(\lambda)$ с вероятностью единица ограничены.

Это условие выполняется, например, если $\xi(\lambda)$ выборочно непрерывен с вероятностью единица. (Условия выборочной непрерывности гауссовских процессов см., например, в работе [1]). Для таких процессов с вероятностью единица существуют интегралы

$$\int_a^b |\xi(\lambda)|\, d\lambda. \tag{1}$$

Пусть $f(z, \lambda)$ ($z \in C$ — множеству комплексных чисел, $\lambda \in R$) — функция экспоненциального типа по z порядка $|\lambda|$, т. е. $f(z, \lambda)$ является целой функцией по z и для всякого $\varepsilon > 0$ существует положительное число такое, что для всех $z \in C$ выполняется неравенство $|f(z, \lambda)| \leqslant A_\varepsilon \exp(\lambda + \varepsilon)|z|$.

Предположим, что для любых a, $b \in R$ существует $C_{a,b}$ такое, что

$$\sup_{\substack{-\infty < t < +\infty \\ \lambda \in [a, b]}} |f(t, \lambda)| < C_{a,b}. \tag{2}$$

Кроме того, существует производная $r(z, \lambda) = \partial f(z, \lambda)/\partial\lambda$, $z \in C$, которая является функцией экспоненциального типа порядка $|\lambda| + m$ (m — константа) и для которой выполняется (2).

Будем говорить, что функция $f(z, \lambda)$ принадлежит классу L. Примеры таких функций: $f(z, \lambda) = \cos z\lambda$, $f(z, \lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \cos zu\, du$ (свойства функций экспоненциального типа см., например, в [2]).

Пусть $\varphi(\lambda)$ на любом отрезке $[a, b]$ является функцией ограниченной вариации. Для $f(z, \lambda)$ определим интеграл

$$S_a^b(z) = \int_a^b \varphi(\lambda)\, f(z, \lambda)\, d\xi(\lambda)$$

следующим образом:

$$\int_a^b f(z, \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\xi(\lambda) = \xi(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, f(z, \lambda)\,|_a^b -$$

$$-\int_a^b \xi(\lambda)\, \partial f(z, \lambda) / \partial\lambda \varphi(\lambda)\, d\lambda -$$

$$-\int_a^b f(z, \lambda)\, \xi(\lambda)\, d\varphi(\lambda). \qquad (3)$$

Ясно, что такой интеграл определен на ω-множестве $\Omega_{a,b}$ ($P(\Omega_{a,b}) = 1$), на котором определен интеграл (1). Ясно также, что (3) задает интеграл вида $\int_a^b f(z, \lambda)\, d\xi(\lambda)$ ($\varphi(\lambda) \equiv 1$).

Рассмотрим некоторые свойства $S_a^b(z)$.

Лемма 1. Существует ω-множество $\Omega_\xi \in \mathfrak{B}$, $P(\Omega_\xi) = 1$, такое что для всех $\omega \in \Omega_\xi$ $S_a^b(z)$ определен при всех $-\infty < a < b < +\infty$ и является целой функцией экспоненциального типа порядка $C = \max\{|a| + m, |b| + m\}$, ограниченной на вещественной оси.

Доказательство. Очевидно, что $S_a^b(z)$ — целая функция. Пусть $\Omega_{a,b}$ ($P(\Omega_{a,b}) = 1$) — ω-множество, на котором существует $S_a^b(z)$. Рассмотрим интегралы $S_{-n}^n(z)$ и их множества существования $\Omega_{-n,n} = \Omega_n$. Пусть $\Omega' = \bigcap_{n \in N} \Omega_n$. Ясно, что $P(\Omega') = 1$. Для любых $a < b$ существует такое $n \in N$, что $-n < a < b < n$. Тогда для любого $\omega \in \Omega' \omega \in \Omega_n \in \Omega_{a,b}$. Поэтому для $\omega \in \Omega'$ $S_a^b(z)$ существует. Далее, на множестве существования $S_a^b(z)$

$$|S_a^b(z)| \leqslant |\xi(a)|\,|\varphi(a)|\,|f(z, a)| + |\xi(b)|\,|\varphi(b)|\,|f(z, b)| +$$

$$+\int_a^b |\xi(\lambda)|\,|\partial f(z, \lambda) / \partial\lambda|\,|\varphi(\lambda)|\, d\lambda +$$

$$+\int_a^b |f(z, \lambda)|\,|\xi(\lambda)|\, d\varphi(\lambda).$$

Так как $|\partial f(z, \lambda) / \partial\lambda| < A_\varepsilon \exp|z|(|\lambda| + m + \varepsilon) < A_\varepsilon \exp|z|(c+\varepsilon)$ и $|f(z, \lambda)| < A'_\varepsilon \exp|z|(|\lambda + \varepsilon) < A'_\varepsilon \exp|z|(c + \varepsilon)$, $\int_a^b |\xi(\lambda)|\, d\varphi(\lambda) < < \infty$, то $|S_a^b(z)| < C_\varepsilon \exp|z|(c+\varepsilon)$.

Аналогично доказывается с учетом (2), что $S_a^b(z)$—ограничен на вещественной оси. Лемма доказана.

Замечание 1. Можно определить интеграл $S_a^b(z)$, предположив, что $\xi(\lambda)$ — такой случайный процесс, что его траектории на любом интервале $[a, b]$ имеют ограниченную вариацию с вероятностью единица. В этом случае достаточно требовать, чтобы $f(z, \lambda)$ была целой функцией экспоненциального типа порядка $|\lambda|$ и $|f(t, \lambda)| < C_{ab}$, $t \in R$, $\lambda \in [a, b]$.

При таком определении теорема о равномерной сходимости по вероятности будет иметь место, но сужается множество возможных случайных процессов.

II. Условия сходимости (равномерной) по вероятности стохастических интегралов. Пусть $c(z)$, $z \in C$ — функция экспоненциального типа порядка ε, такая что для нее выполняются условия:

$$|c(t)| < 1,\ t \in R,\ \int_{-\infty}^{\infty} c^2(t)\, dt < \infty,\ c(t) \to 0,\ t \to \pm\infty. \tag{4}$$

Найдем условия, при которых интеграл $c(t)\int_a^b f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda)$ сходится по вероятности при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ равномерно по $-\infty < t < +\infty$. Для этого достаточно найти условия, при которых для любого $\eta > 0$

$$P\left\{\sup_{t \in R}\left|c(t)\int_a^b f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda)\right| > \eta\right\} \to 0,$$

если $a \to +\infty$, $b \to +\infty$ $(a \to -\infty,\ b \to -\infty)$.

Мы будем доказывать, что при некоторых условиях

$$M\left(\sup_{t \in R}\left|c(t)\int_a^b f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda)\right|^2\right) \to 0,$$

если $a \to +\infty$, $b \to +\infty$ $(a \to -\infty,\ b \to -\infty)$. Пусть $\varphi(|\lambda|)$ — монотонно возрастающая при $\lambda > 0$ функция. Обозначим

$$R_a^b(t) = \int_a^b c(t)\, \varphi(\lambda) f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda),$$

$$T_a^b(t) = \int_a^b \varphi(\lambda) f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda),$$

$$\|r(t)\| = \sup_{t \in R}|r(t)|.$$

Лемма 2. Пусть $0 < a < b$. Тогда справедливо неравенство

$$M\|R_a^b(t)\|^2 \leqslant C \sup_{t \in R} M|T_a^b(t)|^2 \log b,$$

где C—некоторая постоянная.

Доказательство. В силу леммы 1 для $R_a^b(t)$ справедливо неравенство Бернштейна [2, с. 183].

$$\| \partial R_a^b(t) / \partial t \| \leqslant (b + m + \varepsilon) \| R_a^b(t) \|.$$

Пусть t_0 — точка максимума $|R_a^b(t)|$. Предположим для определенности, что $R_a^b(t_0) > 0$. Такая точка существует, поскольку в силу (4) с вероятностью единица

$$|R_a^b(t)| = |c(t)| \left| \int_a^b f(t, \lambda) \varphi(\lambda) d\xi(\lambda) \right| \to 0$$

при $t \to \pm\infty$. Поэтому при $t > t_0$ существует $t_0 < t' < t$ такая, что $R_a^b(t) - R_a^b(t_0) = R_a^{b\prime}(t')(t - t_0)$ и, значит, $R_a^b(t_0) - R_a^b(t) \leqslant (b + m + \varepsilon) R_a^b(t_0)(t - t_0)$.

Пусть $\theta \in (0, 1)$ и $A_{t_0} = \{t : t - t_0 \leqslant \theta (b + m + \varepsilon)^{-1}\}$. Тогда для всех $t \in A_{t_0}$

$$R_a^b(t_0) - R_a^b(t) \leqslant \theta R_a^b(t_0)$$

или

$$R_a^b(t) \geqslant (1 - \theta) R_a^b(t_0),$$

$$R_a^b(t_0) \leqslant (1 - \theta)^{-1} R_a^b(t).$$

Для любого $r > 0$ при $t \in A_{t_0}$ справедливо неравенство

$$\{\exp(r | R_a^b(t_0)|^2 (1 - \theta)^2 - 1\} \leqslant \exp(r | R_a^b(t)|^2) - 1.$$

Интегрируя его, получаем

$$\{\exp(r | R_a^b(t_0)|^2 (1 - \theta)^2) - 1\} \theta (b + m + \varepsilon)^{-1} \leqslant \int_{A_{t_0}} (\exp[r | R_a^b(t)|^2] - 1) dt \leqslant \int_{A_{t_0}} (\exp[rc^2(t) | T_a^b(t)|^2] - 1) dt \leqslant \int_{A_{t_0}} c^2(t) \exp\{r | T_a^b(t)|^2\} \times dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} c^2(t) \exp\{r | T_a^b(t)|^2\} dt.$$

(Здесь было использовано неравенство $\exp|xy| - 1 \leqslant |x| \exp|y|$, $|x| < 1$.) Последний интеграл существует, так как $T_a^b(t)$ ограничен с вероятностью единица. Справедливо

$$\{\exp(r \| R_a^b(t)\|^2 (1 - \theta)^2\} \theta (b + m + \varepsilon)^{-1} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} c^2(t) \exp(r | T_a^b(t)|^2) dt + 1$$

или

$$\| R_a^b(t) \| \leqslant r^{-\frac{1}{2}} (1 - \theta)^{-1} \left\{ \log \left[(b + m + \varepsilon) \theta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(t) \exp(r | T_a^b \times (t)|^2) dt + 1 \right] \right\}^{1/2}.$$

Поэтому

$$M \| R_a^b(t) \|^2 \leqslant r^{-1}(1-\theta)^{-2} \log \left[(b+m+\varepsilon)\,\theta^{-1} \times \int_{-\infty}^{\infty} c^2(t) \times M \exp \times (r\,|\,T_a^b(t)\,|^2)\, dt + 1 \right].$$

Берем $\theta = 1/2$ и $r = (1/4) \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} M\,|\,T_a^b(t)\,|^2$. Легко показать, что

$$M \exp (|\,T_a^b(t)\,|^2 / 4 \sup_{t \in \mathbf{R}} M\,|\,T_a^b(t)\,|^2) \leqslant \sqrt{2}.$$

Отсюда

$$M \| R_a^b(t) \|^2 \leqslant 16 \sup_{t \in \mathbf{R}} M\,|\,T_a^b(t)\,|^2 \log \left[2(b+m+\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\, c^2(t)\, dt + 1 \right].$$

Существует $A < \infty$ такое, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2(t)\, dt = A$. Следовательно,

$$M \| R_a^b(t) \|^2 \leqslant 16 \sup_{t \in \mathbf{R}} M\,|\,T_a^b(t)\,|^2 \log [2(b+m+\varepsilon)\sqrt{2}A + 1].$$

Поэтому существует постоянная C такая, что

$$M \| R_a^b(t) \|^2 \leqslant C \sup_{t \in \mathbf{R}} M\,|\,T_a^b(t)\,|^2 \log b.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\xi(\lambda)$ — измеримый гауссовский процесс, для которого выполняется условие А) и $M\xi(\lambda) = 0$, $M\xi(\lambda)\,\xi(\lambda') = r(\lambda, \lambda')$, $f(z, \lambda)$ — функция, принадлежащая классу L.

Если существует монотонно возрастающая при $\lambda > 0$ функция $\varphi(|\lambda|) > 0$ такая, что

$$\int_{\alpha}^{\infty} \log^{1/2} u \cdot \chi(u)\, d(-(\varphi(u))^{-1}) < \infty, \quad a > 0; \tag{5}$$

$$\lim_{b \to \infty} (\log b) \cdot \varphi^{-2}(b) \cdot \chi(b) = 0, \tag{6}$$

где $\chi(u) = \left\{ \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \int\limits_{-u}^{u} \int\limits_{-u}^{u} f(t, x)\, \varphi(|\,x\,|)\, f(t, y)\, \varphi(|\,y\,|)\, dd' r(x, y) \right\}^{1/2}$, то $S_a^b(t) = \int\limits_a^b c(t) f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda)$ сходится равномерно по вероятности для $-\infty < t < +\infty$ при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ к пределу $c(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,$

$\lambda)\, d\xi(\lambda)$ ($c(t)$ — любая функция экспоненциального типа порядка $\varepsilon > 0$, удовлетворяющая (4)).

Доказательство. Справедливо равенство ($0 < a < b$)

$$S_a^b(t) = \int_a^b c(t) f(t, \lambda) \varphi(\lambda) \varphi^{-1}(\lambda)\, d\xi(\lambda) = (\varphi(b))^{-1} \int_0^b c(t) f(t, u) \varphi(u) \times$$

$$\times d\xi(u) - (\varphi(a))^{-1} \int_0^a c(t) f(t, u) \varphi(u)\, d\xi(u) - \int_a^b \left(\int_0^u c(t) f(t, v) \varphi(v) \times \right.$$

$$\left. \times d\xi(v) \right) d(-(\varphi(u))^{-1}) = A_1 + A_2 + A_3.$$

Поэтому $M \| S_a^b(t) \|^2 \leqslant 3 \sum_{i=1}^{3} M \| A_i \|^2$. Рассмотрим

$$\| A_3 \| = \left\| \int_a^b \left(\int_0^u c(t) f(t, v) \varphi(v)\, d\xi(v) \right) d(-(\varphi(u))^{-1}) \right\|.$$

Обозначим $\left\| \int_0^u c(t) f(t, v) \varphi(v)\, d\xi(v) \right\| = \varkappa(u) - (\varphi(u))^{-1} = \psi(u)$. Тогда

$$M \left\{ \int_a^b \varkappa(u)\, d\psi(u) \right\}^2 = M \left[\int_a^b \int_a^b \varkappa(u) \varkappa(v)\, d\psi(u)\, d\psi(v) \right] \leqslant \int_a^b \int_a^b M\varkappa(u) \times$$

$$\times \varkappa(v)\, d\psi(u)\, d\psi(v) \leqslant \int_a^b \int_a^b (M\varkappa(u)^2 M\varkappa(v)^2)^{1/2}\, d\psi(u)\, d\psi(v) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b (M\varkappa \times (u)^2)^{1/2}\, d\psi(u) \right]^2.$$

Так как $\| A_3 \| \leqslant \int_a^b \left\| \int_0^u c(t) f(t, v) \varphi(v)\, d\xi(v) \right\| d(-(\varphi(u))^{-1})$, то, используя лемму 2, получаем

$$M \| A_3 \|^2 \leqslant \left\{ \int_a^b \left\{ M \left\| \int_0^u c(t) f(t, v) \varphi(v)\, d\xi(v) \right\|^2 \right\}^{1/2} d(-(\varphi(u))^{-1}) \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \int_a^b \log^{1/2} u \left\{ \sup_{t \in \mathbf{R}} M \left| \int_0^u f(t, v) \varphi(v)\, d\xi(v) \right|^2 \right\}^{1/2} d(-(\varphi(u))^{-1}) \Bigg\}^2 \leqslant C \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \log^{1/2} u \left\{ \sup_{t \in \mathbf{R}} \int_0^u \int_0^u f(t, x) \varphi(x) f(t, y) \varphi(y)\, dd' r(x, y) \right\}^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times d(-(\varphi(u))^{-1} \right\}^2.$$

Точно так же

$$M\|A_1\|^2 = M\left\|(\varphi(b))^{-1}\int_0^b c(t)\,f(t,u)\,\varphi(u)\,d\xi(u)\right\|^2 \leqslant C\varphi^{-2}(b)\log b\times$$

$$\times\sup_{t\in\mathbf{R}} M\left|\int_0^b f(t,u)\,\varphi(u)\,d\xi(u)\right|^2 \leqslant C\varphi^{-2}(b)\log b\cdot\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_0^b\int_0^b f(t,x)\,\varphi(x)\times$$

$$\times f(t,y)\,\varphi(y)\,dd'r(x,y).$$

Аналогично оцениваем $M\|A_2\|^2$. Таким образом, в силу условий теоремы $M\|A_i\|^2\to 0,\ i=\overline{1,3}$ при $a, b\to+\infty$.

Точно так же можно показать, что $M\|A_i\|^2\to 0,\ i=\overline{1,3}$ при $a, b\to-\infty$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда:

А) $T_a^b(t)=\int_a^b f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)$ сходится равномерно на любом конечном отрезке $c\leqslant t\leqslant d$ к пределу $\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)$ по вероятности при $a\to-\infty,\ b\to+\infty$;

Б) случайный процесс $\eta(t)=c(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)$ выборочно непрерывен с вероятностью единица при $-\infty<t<\infty$, а случайный процесс $\theta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)$ выборочно непрерывен с вероятностью единица на любом конечном интервале $[c, d]$.

Чтобы доказать А), заметим, что функция $c(t)=(\sin t\varepsilon)/t\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$ удовлетворяет условиям, определяющим $c(t)$ в теореме 1. Можно подобрать так $\varepsilon>0$, чтобы на интервале $[c, d]$ выполнялось, например, $c(t)>1/2$. Тогда

$$P\left\{\sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left|\int_a^b f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)\right|>2\eta\right\}=P\left\{(1/2)\sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left|\int_a^b f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)\right|>\eta\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left|c(t)\int_a^b f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)\right|>\eta\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sup_{-\infty<t<+\infty}\left|c(t)\int_a^b f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)\right|>\eta\right\}\to 0$$

при $a, b\to+\infty$.

Справедливость Б) следует из того, что при любых a и b интегралы $\int_a^b f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)$ и $c(t)\int_a^b f(t,\lambda)\,d\xi(\lambda)$ выборочно непрерывны с вероятностью единица и в силу утверждения теоремы 1 можно выбрать последовательность (a_n, b_n) такую, что интегралы $\int\limits_{a_n}^{b_n} f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda)$, $c(t)\int\limits_{a_n}^{b_n} f(t, \lambda)\, d\xi(\lambda)$ будут сходиться к пределу при $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ с вероятностью единица (первый интеграл равномерно на любом конечном отрезке $c \leqslant t \leqslant d$, а второй равномерно при $-\infty < t < +\infty$).

Следствие 2. Утверждения теоремы 1 и следствия 1 остаются справедливыми, если условия (5), (6) заменить условием: существуют такие монотонно возрастающие функции $\varphi(\lambda)$, $\varphi(\lambda) \uparrow \infty$ и $\int^{\infty} \log^{1/2} u\, d(-(\varphi(u))^{-1}) < \infty$ (например, $\varphi(u) = \log^{1/2+\varepsilon}(1+u)$, $\varepsilon > 0$), для которой выполняется

$$\lim_{b \to +\infty} \sup_{t \in \mathbf{R}} \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-b}^{b} f(t, x)\, \varphi(|x|)\, f(t, y)\, \varphi(|y|)\, dd'r(x, y) < \infty.$$

Доказательство. Пусть $\chi^2(u) = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \int\limits_{-u}^{u}\int\limits_{-u}^{u} f(t, x)\, \varphi(|x|) \times$ $\times f(t, y)\, \varphi(|y|)\, dd'r(x, y)$. Тогда справедливость (5) очевидна, поскольку характер сходимости $\int\limits_{b}^{\infty} \log^{1/2} u \chi(u)\, d(-\varphi(u))^{-1})$ такой же, как и у выражения $\int\limits_{b}^{\infty} \log^{1/2} u d(-(\varphi(u))^{-1})$, кроме того,

$$\int\limits_{b}^{\infty} \log^{1/2} u d(-(\varphi(u))^{-1}) \geqslant \log^{1/2} b \int\limits_{b}^{\infty} d(-(\varphi(u))^{-1}) = \log^{-1/2} b \cdot (\varphi(b))^{-1}.$$

Поэтому выполняется (6).

Следствие 3. Утверждения теоремы 1 и следствия 1 остаются в силе, если $\xi(\lambda)$ — гауссовский процесс с независимыми приращениями и выполняются условия

$$\mathrm{B}_1)\ \int^{\infty} \log^{1/2} u \left\{\sup_{t \in \mathbf{R}} \int\limits_{-u}^{u} f^2(t, x)\, \varphi^2(|x|)\, dF(x)\right\}^{1/2} d(-(\varphi(u))^{-1}) < \infty,$$

$$\lim_{b \to \infty} \log b\, \varphi^{-2}(b) \sup_{t \in \mathbf{R}} \int\limits_{-b}^{b} f^2(t, x)\, \varphi^2(|x|)\, dF(x) < \infty,$$

или

$$\mathrm{B}_2)\ \log^{1/2} u \cdot d(-(\varphi(u))^{-1}) < \infty,$$

$$\lim_{b \to \infty} \sup_{t \in \mathbf{R}} \int\limits_{-b}^{b} f^2(t, x)\, \varphi^2(|x|) . dF(x) < \infty,$$

или

B_3) $f(t, x)$ равномерно ограничена по t, x,

$$\int^{\infty} \log^{1/2} u \left\{ \int_{-u}^{u} \varphi^2(|x|)\, dF(x) \right\}^{1/2} d(-(\varphi(u))^{-1}) < \infty,$$

или

B_4) $f(t, x)$ равномерно ограничена по t, x $F(+\infty) = 1$,

$$\int^{+\infty} \log^{1/2} u\, (1 - F(u))^{-1/2} dF(u) < \infty.$$

Здесь $F(x)$ — спектральная функция процесса $\xi(x)$ ($M(\xi(x) - \xi(s))^2 = F(x) - F(s)$), $\varphi(|\lambda|)$ такая функция, что $\varphi(\lambda) \uparrow +\infty$, $\lambda \to +\infty$.

Утверждения следствия 3 с условиями B_1) и B_2) очевидны, если заметить, что

$$\int_{-u}^{u} \int_{-u}^{u} R(x, y)\, dd'r(x, y) = \int_{-u}^{u} R(x, x)\, dF(x).$$

Легко также показать, что при выполнении условия B_3) выполняется и условие B_2). Условие B_4) выполняется, если в B_3) положить $\varphi(x) = 1/(1 - F(x))^{3/2}$.

III. Гауссовские стационарные процессы. Пусть $\theta(t)$ — сепарабельный, непрерывный в среднем гауссовский стационарный процесс, $M\theta(t) = 0$, $M\theta^2(t) = 1$. Процесс $\theta(t)$ представим в виде (см., например, книгу [3, с. 143])

$$\theta(t) = \int_0^{\infty} \cos \lambda t\, d\xi(\lambda) + \int_0^{\infty} \sin \lambda t\, d\eta(\lambda), \tag{7}$$

где $\xi(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$ — независимые гауссовские процессы с независимыми приращениями, такие что

$$M\xi(\lambda) = M\eta(\lambda) = 0,$$

$$M(\xi(\lambda_1) - \xi(\lambda_2))^2 = M(\eta(\lambda_1) - \eta(\lambda_2))^2 = F(\lambda_1) - F(\lambda_2), \quad \lambda_1 > \lambda_2.$$

Обозначим $r(h) = M\theta(t + h)\,\theta(t)$, $\chi(h) = M(\theta(t + h) - \theta(t))^2 = 2(1 - r(h))$.

Теорема 2. Для процесса $\theta(t)$ справедливы следующие утверждения.

I. Пусть выполняется условие

$$\int_c^{\infty} \log^{1/2} u\, (1 - F(u))^{-1/2} dF(u) < \infty, \quad c > 0. \tag{8}$$

Тогда интегралы в (7) сходятся равномерно по вероятности для $c \leqslant t \leqslant d$, $[c, d]$ — любой интервал. Следовательно, случайный процесс $\theta(t)$ выборочно непрерывен с вероятностью единица на любом интервале $[c, d]$.

II. Если $\theta(t)$ выборочно непрерывен с вероятностью единица на некотором интервале $[c, d]$ и $\chi(h)$ монотонно убывает при $h \downarrow 0$, $h < h_0$, то выполняется (8).

Доказательство. Утверждение 1 теоремы вытекает из следствия 3 (см. условие B_4), так как $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$ удовлетворяют всем предположениям, обеспечивающим принадлежность этих функций классу L, а процессы $\xi(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$ выборочно непрерывны с вероятностью единица на любом конечном интервале.

Докажем утверждение II, используя метод из книги [3, с. 182]. Будем говорить, что функция $S(h) > 0$, $h > 0$ удовлетворяет условию Ферника, если существует такое $h_0 > 0$, что при $0 < h \leqslant h_0$ $S(h) \downarrow 0$ при $h \downarrow 0$ и

$$\int_0^{h_0} (S(h))^{1/2} (h \log^{1/2} h^{-1})^{-1} dh < \infty. \tag{9}$$

Согласно работе [4] из выборочной непрерывности с вероятностью единица на конечном интервале процесса $\theta(t)$ и из $\chi(h) \downarrow 0$, $h \downarrow 0$, $h < h_0$ вытекает, что $\chi(h)$ удовлетворяет условию Ферника, т. е. справедливо (9). Нам достаточно доказать теперь, что из (9) следует (8). Справедливо неравенство (книга [3, с. 184])

$$h(1 - F(h)) \leqslant (2/\pi) \int_0^{\infty} (1 - \cos ht)\, t^{-2} (1 - r(t))\, dt.$$

Пусть $h^{-1/2} < h_0$, тогда

$$R(h) = \int_0^{\infty} (1 - \cos ht)\, t^{-2} \chi(t)\, dt = \int_0^{1/h} (1 - \cos ht)\, t^{-2} \chi(t)\, dt +$$

$$+ \int_{1/h}^{1/\sqrt{h}} (1 - \cos ht)\, t^{-2} \chi(t)\, dt + \int_{1/\sqrt{h}}^{\infty} (1 - \cos ht)\, t^{-2} \chi(t)\, dt =$$

$$= A_1 + A_2 + A_3.$$

Используя монотонность $\chi(t)$ при $t^{-1/2} < h_0$, получаем

$$A_1 \leqslant \chi(1/h) \int_0^{1/h} 2 \sin^2 ht/2 \cdot t^{-2} dt \leqslant (h/2)\, \chi(1/h),$$

$$A_2 \leqslant 2 \int_{1/h}^{1/\sqrt{h}} \chi(t)\, t^{-2} dt \leqslant 2\chi(1/\sqrt{h})\, (-1/t) \Big|_{1/h}^{1/\sqrt{h}} \leqslant 2h\chi(1/\sqrt{h}).$$

Поскольку $|\chi(t)| \leqslant 2$, то $A_3 \leqslant \int_{1/\sqrt{h}}^{\infty} 4t^{-2} dt = 4\sqrt{h}$. Следовательно,

$$(1 - F(h)) \leqslant C(\chi(1/h) + \chi(1/\sqrt{h}) + 1/\sqrt{h}). \tag{10}$$

Из того, что функция $\chi(u)$ удовлетворяет условию Ферника, вытекает (после замены переменных в интеграле (9)), что функция $\chi(1/h)$ удовлетворяет условию

$$\int_c^\infty \chi^{1/2}(1/h)(h(\log^{1/2}h)^{-1}dh < \infty, \quad c > 0.$$

Такому же условию

$$\int_c^\infty \chi^{1/2}(1/\sqrt{h})(h(\log^{1/2}h))^{-1}\,dh < \infty$$

удовлетворяет функция $\chi(1/\sqrt{h})$. Теперь из (10) легко получить

$$\int_c^\infty (1 - F(h))^{1/2}(h(\log h)^{1/2})^{-1}dh < \infty, \quad c > 0.$$

Поэтому справедливо

$$\int_c^\infty \log^{1/2}u\,(1 - F(u))^{-1/2}dF(u) = -2\int_c^\infty \log^{1/2}u\,d((1 - F(u))^{1/2}) =$$

$$-2\log^{1/2}u\,(1 - F(u))^{1/2}\,|_c^\infty + \int_c^\infty (1 - F(u))^{1/2}(\log^{1/2}u\cdot u)^{-1}\,du < \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Достаточность условия (8) для выборочной непрерывности с вероятностью единица стационарных гауссовских процессов была получена в работе [5] другим методом.

IV. Дифференцируемость стохастических интегралов. Пусть $\eta(t)$— гауссовский процесс, представимый в виде стохастического интеграла $\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda)\,d\xi(\lambda)$. Используя методы работы, легко доказать такую теорему.

Теорема 3. Для того чтобы процесс $\eta(t)$ на любом конечном отрезке $[c, d]$ обладал с вероятностью единица выборочно непрерывной производной $\eta'(t)$, представимой в виде интеграла

$$\eta'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial f(t, \lambda)/\partial t\,d\xi(\lambda), \tag{11}$$

сходящегося равномерно по вероятности на $[c, d]$, достаточно, чтобы для функции $\partial f(t, \lambda)/\partial t$ и процесса $\xi(\lambda)$ выполнялись предположения теоремы 1.

Так же легко сформулировать условия дифференцируемости стохастических интегралов, подобные условиям следствий 1—3 и теоремы 2.

1. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. М., 1978. 2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1965 3. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М., 1969. 4. *Jain C. N., Marcus M. B.*, Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random series of functions.— Ann. Inst. Fourier, 1974, 24, 2. 5. *Синявский В. Ф.* Умови неперервності вибіркових функцій однорідних гаусівських випадкових полів.— ДАН УРСР. Сер. А, 1975, 6.

Поступила в редколлегию 16.04.80

A. Benmalek, Yu. V. Kozachenko

CONDITIONS OF UNIFORM CONVERGENCE IN PROBABILITY OF GAUSSIAN STOCHASTIC INTEGRALS

The notion of gaussian stochastic integrals is defined and the sufficient conditions of their uniform convergence in probability is given. These conditions appear to be necessary under some restrictions. These results are applied to obtain sufficient conditions of differentiability.

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРОВ УНИТАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Пусть заданы углы Эйлера φ_i унитарной случайной матрицы U_n, которые являются случайными величинами, и их совместная функция распределения. Предположим, что существует совместная плотность распределения случайных величин φ_i, и обозначим ее через $p(x_1, \ldots, x_{n^2})$. Эту плотность можно представить в виде $p = \tilde{p}(T_n(x_1, \ldots, x_{n^2}))$, где T_n — унитарная матрица, заданная с помощью углов x_i.

Распределение матрицы U_n равно $\mathbf{P}\{U_n \in B\} = \int_{H_n \in B} \tilde{p}(H_n)\, dH_n$,

где B — измеримое множество элементов группы Γ_n, $dH_n = \Pi_{i=1}^{n^2} dx_i$, x_i — углы Эйлера матрицы H_n. Группа Γ_n — компактная и поэтому на ней существует нормированная мера Хаара ν. Меру ν можно представить в следующем виде: $\nu(B) = \int_{H_n \in B} q(H_n) dH_n$, где $q(H_n)$ — некоторая функция углов x_i, которую будем называть плотностью меры ν.

Будем говорить, что случайная матрица U_n имеет распределение, абсолютно непрерывное относительно меры Хаара ν, если $\mathbf{P}\{U_n \in B\} = \int_{H_n \in B} p(H_n)\, \nu(dH_n)$, где $p(H_n)$ — некоторая борелевская функция углов φ_i.

Определим случайные собственные числа и векторы унитарной случайной матрицы U_n, которую можно представить в следующем