1. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. М., 1978. 2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1965 3. *Крамер Г.*, *Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М., 1969. 4. *Jain C. N.*, *Marcus M. B.*, Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random series of functions.— Ann. Inst. Fourier, 1974, 24, 2. 5. *Синявский В. Ф.* Умови неперервності вибіркових функцій однорідних гаусівських випадкових полів.— ДАН УРСР. Сер. А, 1975, 6.

Поступила в редколлегию 16.04.80

A. Benmalek, Yu. V. Kozachenko

CONDITIONS OF UNIFORM CONVERGENCE IN PROBABILITY OF GAUSSIAN STOCHASTIC INTEGRALS

The notion of gaussian stochastic integrals is defined and the sufficient conditions of their uniform convergence in probability is given. These conditions appear to be necessary under some restrictions. These results are applied to obtain sufficient conditions of differentiability.

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРОВ УНИТАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Пусть заданы углы Эйлера φ_i унитарной случайной матрицы U_n, которые являются случайными величинами, и их совместная функция распределения. Предположим, что существует совместная плотность распределения случайных величин φ_i, и обозначим ее через $p(x_1, \ldots, x_{n^2})$. Эту плотность можно представить в виде $p = \tilde{p}(T_n(x_1, \ldots, x_{n^2}))$, где T_n — унитарная матрица, заданная с помощью углов x_i.

Распределение матрицы U_n равно $\mathbf{P}\{U_n \in B\} = \int_{H_n \in B} \tilde{p}(H_n)\, dH_n$, где B — измеримое множество элементов группы Γ_n, $dH_n = \Pi_{i=1}^{n^2} dx_i$, x_i — углы Эйлера матрицы H_n. Группа Γ_n — компактная и поэтому на ней существует нормированная мера Хаара ν. Меру ν можно представить в следующем виде: $\nu(B) = \int_{H_n \in B} q(H_n) dH_n$, где $q(H_n)$— некоторая функция углов x_i, которую будем называть плотностью меры ν.

Будем говорить, что случайная матрица U_n имеет распределение, абсолютно непрерывное относительно меры Хаара ν, если $\mathbf{P}\{U_n \in B\} = \int_{H_n \in B} p(H_n)\, \nu(dH_n)$, где $p(H_n)$ — некоторая борелевская функция углов φ_i.

Определим случайные собственные числа и векторы унитарной случайной матрицы U_n, которую можно представить в следующем виде: $U_n = H_n \Theta_n H_n^*$, где H_n — унитарная матрица, $\Theta_n = (\exp(i\theta_p) \times \delta_{pl})$, $\exp(i\theta_p)$ — собственные числа матрицы U_n. Расположим аргументы собственных чисел в неубывающем порядке: $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_n \leqslant 2\pi$. Такие собственные числа будут случайными величинами. Собственные векторы будут заданы однозначно, если $\arg h_{1p} = c_p$, $p = \overline{1, n}$, где $0 \leqslant c_p \leqslant 2\pi$ — некоторые неслучайные числа. Будем считать, что первые компоненты собственных векторов имеют фиксированные аргументы c_i. Теперь можем приступить к нахождению распределения собственных чисел и векторов матрицы U_n.

Пусть Γ — группа n-мерных унитарных матриц, B — σ-алгебра борелевских множеств группы Γ.

Теорема. Если у случайной матрицы U_n существует плотность распределения углов Эйлера $p(\cdot)$, то для любого множества $E \in B$ и любых действительных чисел α_i, β_i, $i = \overline{1,n}$

$$\mathbf{P}\{H_n \in E,\ \alpha_k < \theta_k < \beta_k,\ k = \overline{1, n}\} = c \int \tilde{p}(X_n Y_n X_n^*) \tilde{q}^{-1}(X_n Y_n X_n^*) \times$$

$$\times \Pi_{k<l} |e^{iy_k} - e^{iy_l}|^2 \nu(dX_n / \arg x_{1p} = c_p,\ p = \overline{1, n})\, dY_n, \qquad (1)$$

где $dY_n = \Pi_{i=1}^n dy_i$, $Y_n = (e^{iy_p}\delta_{pl})$, интегрирование ведется по области $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < 2\pi$, $\alpha_k < y_k < \beta_k$, $k = \overline{1, n}$, $X_n \in E$, $c = (n!\,(2\pi)^n)^{-1}$.

Доказательство. Для любой непрерывной и ограниченной функции f элементов матриц H_n и $\Theta = (\exp(i\theta_p)\,\delta_{pl})$

$$\mathbf{M} f(H_n, \Theta) = \int f(X_n, Y_n) \tilde{p}(T_n)\, dT_n = \int f(X_n, Y_n) \bar{p}(T_n) \times$$

$$\times [\bar{q}(T_n)]^{-1} \nu(dT_n) = e^{n/2} \int_{\Gamma \times L} f(X_n, Y_n) \bar{p}(T_n \sqrt{S}) \times$$

$$\times [\bar{q}(T_n \sqrt{S})]^{-1} \exp(-0,5\, \mathrm{Sp}\, S)\, \delta(I - S) \det S dS \nu(dT_n),$$

$$\delta(I - S) = \Pi_{i=1}^n \delta(1 - s_{ii}) \Pi_{i>j} \delta(s_{ij}),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, X_n, Y_n — решения уравнения $X_n Y_n X_n^* = H_n$, $\arg x_{1p} = c_p$, S_n — неотрицательно-определенная эрмитова матрица, L — множество неотрицательно-определенных эрмитовых матриц, функции $\bar{p}$ и $\bar{q}$ заданы следующим образом:

$$\bar{q}(A),\ \bar{p}(A) = \begin{cases} p(A),\ q(A), & \text{если } A \text{ — унитарная матрица,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что функции $q(A)$ и $\bar{p}(A)$ заменены непрерывными функциями).

В этом интеграле сделаем замену переменных $T_n\sqrt{S} = A$. Используя доказательство теоремы 3.1.1 [1], получаем

$$\mathbf{M}f(H_n, \Theta) = \int f(X_n(A), Y_n(A))\bar{p}(A)[\bar{q}(A)]^{-1} \times$$

$$\times \exp(-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,AA^*)\,\delta(I - \sqrt{AA^*})\,dA\,e^{n/2}c_1,$$

$$c_1 = \pi^{n(n-1)-n^2}2^{n^2-n(n+1)/2}\Pi_{i=1}^{n}\Gamma(n+1-i), \qquad (2)$$

где $X_n(A)$, $Y_n(A)$—решение уравнения $X_nY_nX_n^* = (AA^*)^{-1/2}A$, $\arg x_{1p} = c_p$, $p = \overline{1, n}$, $0 < y_1 < \ldots < y_n < 2\pi$, $dA = \Pi_{i,j=1}^{n} d\,\mathrm{Re}\,a_{ij}d\,\mathrm{Im}\,a_{ij}$

В интеграле (2) сделаем замену переменных $A = UQU^*$, где U—унитарная матрица, $\arg u_{1p} = c_p$, $p = \overline{1, n}$, Q — треугольная верхняя матрица, $0 < \arg q_{11} < \arg q_{22} < \ldots < \arg q_{nn} < 2\pi$. В результате находим [1]

$$\mathbf{M}f(H_n, \Theta) = \int f(X_n(UQU^*), Y_n(UQU^*))\bar{p}(UQU^*) \times$$

$$\times [\bar{q}(UQU^*)]^{-1}\exp(-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,QQ^*)\,\delta(I - QQ^*)\,\Pi_{p\neq l}|q_{pp} -$$

$$-q_{ll}|\,\nu(dU/\arg u_{1p} = c_p,\ p = \overline{1, n})\,dQe^{n/2}c_1c_2,$$

$$c_2 = [(2\pi)^{-n(n-1)/2}2^{n(n+1)/2}\Pi_{j=1}^{n}j!]^{-1}.$$

В этом интеграле сделаем сначала замену переменных $q_{ll} = r_le^{i\varphi_l}$ $0 < r < \infty$, $0 < \varphi_l < 2\pi$, а затем $q_{ij} = p_{ij}\exp(i\varphi_j)$, $i > j$. Замена переменных $PP^* = S$ [1], где S — эрмитова неотрицательно-определенная матрица, $P = ((1 - \delta_{ij})p_{ij} + \delta_{ij}r_i)$, $i \geqslant j$, дает (1). После несложных вычислений получаем $c_1c_2 = c$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если плотность распределения углов Эйлера матрицы U_n равна плотности меры Хаара ν, то собственные векторы матрицы U_n стохастически не зависят от ее собственных чисел. Плотность распределения аргументов собственных чисел матрицы U_n равна $(n!\,(2\pi)^n)^{-1}\Pi_{k<l}|e^{iy_k} - e^{iy_l}|^2$, $0 < y_1 < \ldots < y_n < 2\pi$. Распределение матрицы H_n равно

$$\mathbf{P}\{H_n \in E\} = \int_{X_n \in E}\nu(dX_n/\arg x_{1p} = c_p,\ p = \overline{1, n}). \qquad (3)$$

Следствие 2 [2]. Если распределение матрицы U_n абсолютно непрерывно относительно меры Хаара ν с плотностью p и плотность p удовлетворяет соотношению $\tilde{p}(Y_n) \equiv p(X_nY_nX_n^*)$, где $X_n \in \Gamma$ $Y_n = (e^{iy_p}\delta_{pl})$, то собственные числа матрицы U_n не зависят от ее собственных векторов. Плотность распределения аргументов собственных чисел матрицы равна $\Pi_{k<l}|e^{iy_k} - e^{iy_l}|^2\,p(Y_n)\,(n!\,(2\pi)^n)^{-1}$ $0 < y_1 < \ldots < y_n < 2\pi$. Распределение матрицы H_n дается формулой (3).

1. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов. Киев, 1980. 2. *Дайсон Ф.* Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. М., 1963.

Поступила в редколлегию 23.04.80

V. L. Girko

THE DISTRIBUTION OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF UNITARY RANDOM MATRICES

The distribution of eigenvalues and eigenvectors of the unitary random matrix whose Eiler angles have the joint density function is obtained.

УДК 519.21

О. К. ЗАКУСИЛО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВМЕШАТЕЛЬСТВОМ СЛУЧАЯ

В настоящей статье исследуется вопрос о существовании пределов вероятностей перехода, не зависящих от начального состояния, для некоторых однородных марковских процессов, которые мы, следуя терминологии книги [1], назовем процессами с дискретным вмешательством случая.

Введем следующие обозначения: $R_+^n (R_-^n)$ — множество n-мерных векторов с неотрицательными (неположительными) компонентами; A — множество невозрастающих неположительных функций $f: R_+^1 \to R_-^1$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $A^n = \{\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)),\ f_i \in A,\ i = \overline{1, n}\}$, $\bar{\alpha}(t)$ — обобщенный пуассоновский процесс со значениями в R_+^n и с непрерывными справа траекториями.

Рассмотрим соотношения

$$d\bar{\xi}(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{\xi}(\bar{x}, t))\, dt + d\bar{\alpha}(t), \quad t \geqslant t_0, \quad \bar{\xi}(\bar{x}, t_0) = \bar{x}, \tag{1}$$

которые, как обычно, будем считать эквивалентными уравнению

$$\bar{\xi}(\bar{x}, t) = \int_{t_0}^{t} \bar{f}(\bar{\xi}(\bar{x}, u)) + \bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}(t_0) + \bar{x}, \quad t \geqslant t_0. \tag{2}$$

Лемма 1. Уравнение (2) имеет единственное решение в R_+^n.
Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y_i(t) = \int_{t_0}^{t} f_i(y_i(u))\, du + y_i(t_0), \qquad t \geqslant t^0, \tag{3}$$