1. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов. Киев, 1980. 2. *Дайсон Ф.* Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. М., 1963.

Поступила в редколлегию 23.04.80

V. L. Girko

THE DISTRIBUTION OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF UNITARY RANDOM MATRICES

The distribution of eigenvalues and eigenvectors of the unitary random matrix whose Eiler angles have the joint density function is obtained.

УДК 519.21

О. К. ЗАКУСИЛО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВМЕШАТЕЛЬСТВОМ СЛУЧАЯ

В настоящей статье исследуется вопрос о существовании пределов вероятностей перехода, не зависящих от начального состояния, для некоторых однородных марковских процессов, которые мы, следуя терминологии книги [1], назовем процессами с дискретным вмешательством случая.

Введем следующие обозначения: $R^n_+(R^n_-)$ — множество n-мерных векторов с неотрицательными (неположительными) компонентами; A — множество невозрастающих неположительных функций $f: R^1_+ \to R^1_-$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $A^n = \{\bar f(\bar x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)),\ f_i \in A,\ i = \overline{1, n}\}$, $\bar\alpha(t)$ — обобщенный пуассоновский процесс со значениями в R^n_+ и с непрерывными справа траекториями.

Рассмотрим соотношения

$$d\bar\xi(\bar x, t) = \bar f(\bar\xi(\bar x, t))\, dt + d\bar\alpha(t), \quad t \geqslant t_0, \quad \bar\xi(\bar x, t_0) = \bar x, \tag{1}$$

которые, как обычно, будем считать эквивалентными уравнению

$$\bar\xi(\bar x, t) = \int_{t_0}^{t} \bar f(\bar\xi(\bar x, u)) + \bar\alpha(t) - \bar\alpha(t_0) + \bar x, \quad t \geqslant t_0. \tag{2}$$

Лемма 1. Уравнение (2) имеет единственное решение в R^n_+.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$y_i(t) = \int_{t_0}^{t} f_i(y_i(u))\, du + y_i(t_0), \qquad t \geqslant t^0, \tag{3}$$

которое задает взаимно-однозначное соответствие

$$t(y_i) = t = \int\limits_{y_i(t_0)}^{y_i} dz/f_i(z), \quad y_i = y_i(t)$$

в области $y_i > 0$, $t < T = \lim\limits_{y_i \downarrow 0} t(y_i)$. Расширяя область определени: $y_i(t)$, полагая $y_i(t) = 0$ при $t \geqslant T$, получаем функцию, котора: удовлетворяет соотношению (3), является непрерывной неотрица тельной невозрастающей выпуклой функцией, $y_i(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Обозначим $\bar{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$. Тогда

$$\bar{y}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\bar{y}(u))\,du + \bar{y}(t_0), \quad t \geqslant t_0.$$

В качестве вероятностного пространства удобно взять множе ство траекторий процесса $\bar{\alpha}(t)$ с σ-алгеброй и мерой, которые $\bar{\alpha}$(t индуцирует на этом множестве.

Фиксируя элементарный исход, зададим траекторию $\bar{\xi}(\bar{x}, t)$ сле дующим образом:

а) $\bar{\xi}(\bar{x}, t_0) = \bar{x}$;

б) если θ_i — момент i-го скачка $\bar{\alpha}(t)$ $(\theta_0 = t_0)$, то при $t \in [\theta_i, \theta_{i+1}$ траектория $\bar{\xi}(\bar{x}, t)$ совпадает с построенной ранее интегральної кривой $\bar{y}(t)$, проходящей через точку $(\theta_i, \bar{\xi}(\bar{x}, \theta_i))$;

в) $\bar{\xi}(\bar{x}, \theta_{i+1}) - \bar{\xi}(\bar{x}, \theta_{i+1} - 0) = \bar{\alpha}(\theta_{i+1}) - \bar{\alpha}(\theta_{i+1} - 0)$.

Процесс $\bar{\xi}(\bar{x}, t)$, очевидно, удовлетворяет соотношению (2).

Покажем теперь, что решение единственно. Допустим, что су ществует процесс $\bar{\eta}(\bar{x}, t)$, для которого выполняется равенство

$$\bar{\eta}(\bar{x}, t) = \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\bar{\eta}(\bar{x}, u))\,du + \bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}(t_0) + \bar{x}, \tag{4}$$

и существует точка $\tau > t_0$, в которой $\bar{\eta}(\bar{x}, \tau) \neq \bar{\xi}(\bar{x}, \tau)$.

Не ограничивая общности, можем предположить, что различны ми являются 1-е компоненты векторов $\bar{\eta}(\bar{x}, \tau)$ и $\bar{\xi}(\bar{x}, \tau)$:

$$\xi_1(x_1, \tau) \neq \eta_1(x_1, \tau). \tag{5}$$

Вычитая (4) из (2), получаем

$$\xi_1(x_1, t) - \eta_1(x_1, t) = \int\limits_{t_0}^{t} (f_1(\xi_1(x_1, u)) - f_1(\eta_1(x_1, u)))\,du. \tag{6}$$

Из (6) и (5) следует, что траектории процесса $\zeta(t) = \xi_1(x_1, t) - \eta_1(x_1, t)$ непрерывны, причем $\zeta(t_0) = 0$, $\zeta(\tau) \neq 0$. Допустим, на пример, что $\zeta(\tau) < 0$. Обозначим $\theta = \max\{t : t_0 \leqslant t < \tau,\ \zeta(t) = 0\}$

Тогда

$$\xi_1(x_1, \theta) = \eta_1(x_1, \theta), \tag{7}$$

$$\xi_1(x_1, t) < \eta_1(x_1, t), \qquad t \in (\theta, \tau].$$

Учитывая соотношение (6), находим

$$\xi_1(x_1, \tau) - \eta_1(x_1, \tau) = \xi_1(x_1, \tau) - \eta_1(x_1, \tau) - (\xi_1(x_1, \theta) - \eta_1(x_1, \theta)) =$$

$$= \int_{\theta}^{\tau} (f_1(\xi_1(x_1, u)) - f_1(\eta_1(x_1, u)))\, du \geqslant 0, \tag{8}$$

так как $f_1(\xi_1(x_1, u)) \geqslant f_1(\eta_1(x_1, u))$ при $u \in (0, \tau]$ в силу условий (7).

Неравенство (8) противоречит допущению $\zeta(\tau) < 0$. Случай $\zeta(\tau) > 0$ рассматривается аналогично.

Итак, $\zeta(t) \equiv 0$, и лемма 1 доказана.

Мы будем называть решение уравнения (2) процессом с дискретным вмешательством случая (ПДВС), так как его свойства сходны со свойствами «динамической системы, траектории которой в случайные моменты времени терпят разрывы 1-го рода со случайными скачками» (см. [1, с. 27]).

Теорема. Если ПДВС $\xi(\bar{x}, t) \in R^n_+$ стохастически ограничен, то последовательность мер

$$P_{t,\bar{x}}(\cdot) : P_{t,\bar{x}}(A) = P\{\xi(\bar{x}, t) \in A\}$$

при $t \to \infty$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере в R^n_+, не зависящей от начального значения $\bar{x}$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 2. Процесс $\xi(\bar{x}, t)$ — строго марковский.

Доказательство. Нам достаточно проверить непрерывность $Mg(\xi(\bar{x}, t))$ по $\bar{x}$, где g — произвольная финитная функция (см. [2, с. 144 и 129]). Из (2) следует

$$\xi_i(x_i, t) - \xi_i(y_i, t) = \int_{t_0}^{t} [f_i(\xi_i(x_i, u)) - f_i(\xi_i(y_i, u))]\, du + x_i - y_i. \tag{9}$$

Допустим, что $x_i > y_i$. Тогда при всех $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство

$$\xi_i(x_i, t) \geqslant \xi_i(y_i, t). \tag{10}$$

В самом деле, допустив противное, мы можем повторить рассуждения леммы 1, и прийти к противоречию. Из (10) следует, что подынтегральное выражение в правой части равенства (9) неположительно, и, следовательно, при $t_0 \leqslant s \leqslant t$

$$x_i - y_i \geqslant \xi_i(x_i, s) - \xi_i(y_i, s) \geqslant \xi_i(x_i, t) - \xi_i(y_i, t) \geqslant 0, \tag{11}$$

откуда $\|\bar{\xi}(\bar{x}, t) - \bar{\xi}(\bar{y}, t)\| \leqslant \|\bar{x} - \bar{y}\|$. Обозначая $\Delta(u) = \max\limits_{\bar{s}, \bar{z}: \|\bar{z}\| < u} |g(\bar{s} + \bar{z}) - g(\bar{s})|$ модуль непрерывности $g(\bar{z})$, получаем

$$|Mg(\bar{\xi}(\bar{x}, t)) - Mg(\bar{\xi}(\bar{y}, t))| \leqslant M|g(\bar{\xi}(\bar{x}, t)) - g(\bar{\xi}(\bar{y}_1 t))| \leqslant$$
$$\leqslant M\Delta)(\|\bar{\xi}(\bar{x}, t) - \bar{\xi}(\bar{y}, t)\|) \leqslant \Delta(\|\bar{x} - \bar{y}\|) \xrightarrow[y \to \bar{x}]{} 0.$$

Рассмотрим какую-нибудь компоненту процесса $\bar{\bar{\xi}}(\bar{x}, t)$, скажем, $\xi_1(x_1, t)$.

Лемма 3. $P\{\limsup\limits_{t \to \infty} \xi_1(x_1, t) = \infty\} = 1$.

Доказательство. Допустим, что для фиксированного элементарного исхода $\limsup\limits_{t \to \infty} \xi_1(x_1, t) \leqslant y$. Так как $\alpha_1(t)$ — обобщенный неотрицательный пуассоновский процесс в R^1_+, то с вероятностью 1 для любого $y > 0$ существует бесконечно много интервалов $(t_k, t_k + \Delta)$ сколь угодно малой длины Δ, $t_k \to \infty$, таких что $\alpha(t_k + \Delta) - \alpha(t_k) > 2y$. Поэтому для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon + y \geqslant \xi_1(x_1, t_k + \Delta) \geqslant \xi_1(x_1, t_k + \Delta) - \xi_1(x_1, t_k) =$$
$$= \int\limits_{t_k}^{t_k + \Delta} f_1(\xi_1(x_1, u))\, du + \alpha_1(t_k + \Delta) - \alpha_1(t_k) \geqslant f_1(\varepsilon + y)\Delta + 2y > \varepsilon + y$$

при достаточно малом Δ, что доказывает утверждение леммы.

Обозначим через $\tau(x, y)$ $(x \neq y)$ время перехода процесса $\xi_1(x_1, t)$ из x в y после первого попадания в x, $\tau(x, x)$ — время возвращения в x.

Определение 1. Состояние y — достижимое из x, если $P\{\tau(x, y) < \infty\} > 0$.

Определение 2. Состояние x — существенное, если из соотношения $P\{\tau(x, y) < \infty\} > 0$ следует $P\{\tau(y, x) < \infty\} > 0$.

Определение 3. Состояние x процесса $\xi_1(x_1, t)$ — возвратное, если последовательность $\tau_0 = \tau(x_1, x)$, $\tau_k = \inf\{s > \tau_{k-1}, \ \xi_1(x_1, s) = x, \ \xi_1(x_1, u) \neq x$ при некотором $u, \tau_{k-1} < u < s\}$ бесконечна с вероятностью 1, и невозвратное в противном случае.

Замечание. Из лемм 2, 3 и показательности распределения времени между скачками процесса $\xi_1(x_1, t)$ следует, что все положительные состояния существенны.

Состояние 0 будет существенным, если момент T попадания в 0 кривой $y_i(t)$ (см. лемму 1) конечен, т. е. $\int\limits_{x_1}^{0} dz/f_1(z) < \infty$. В противном случае оно недостижимо ни из какого положительного состояния.

С помощью леммы 3 можно установить справедливость лемм 4 и 5.

Лемма 4. Все существенные состояния процесса $\xi_1(x_1, t)$ возвратны или невозвратны одновременно и независимо от начального состояния x_1.

Будем говорить, что процесс $\xi_1(x_1, t)$ возвратен, если его существенные состояния возвратны.

Лемма 5. Для возвратности процесса $\xi_1(x_1, t)$ необходимо, чтобы при любых $x \geqslant 0$ и существенных состояниях y $P\{\tau(x, y) < \infty\} = 1$, и достаточно, чтобы $P\{\tau(x, y) < \infty\} = 1$ при некоторых $x > 0$, $y \leqslant 0$.

Лемма 6. Если процесс $\xi_1(x_1, t)$ стохастически ограничен, то он возвратен.

Доказательство. Допустим, что $\xi_1(x_1, t)$ невозвратен. Тогда для произвольного состояния x в силу леммы 5 $P\{\tau(x, x) = \infty\} > 0$ и последовательность $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ конечна с вероятностью 1.

С учетом леммы 3 случайная величина $\theta(x_1, x) = \inf\{s : \xi_1(x_1, u) > x$ при $u > s\}$ также конечна с вероятностью 1.

Зафиксируем произвольное достаточное большое y. Тогда

$$P\{\xi_1(x_1, t) < y\} \leqslant P\{\theta(x_1, y) \geqslant t\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

что противоречит условию стохастической ограниченности. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Покажем сначала, что

$$\bar{\xi}(\bar{x}, t) - \bar{\xi}(\bar{y}, t) \xrightarrow[t\to\infty]{1} \bar{0} \tag{12}$$

равномерно по $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из произвольного компакта. Для этого достаточно проверить, что для всех i

$$\xi_i(x_i, t) - \xi_i(y_i, t) \xrightarrow[t\to\infty]{1} 0$$

равномерно по x_i, $y_i : 0 \leqslant x_i \leqslant K$, $0 \leqslant y_i \leqslant K$.

Не ограничивая общности, допустим, что $x_i > y_i$. Из неравенства (10) следует, что

$$\xi_i(K, t) - \xi_i(0, t) \geqslant \xi_i(x_i, t) - \xi_i(y_i, t) \geqslant 0$$

и

$$\xi_i(K, t) - \xi_i(0, t) \leqslant \xi_i(K, s) - \xi_i(0, s)$$

при $t \geqslant s$. Поэтому с вероятностью 1 существует

$$C = \lim_{t\to\infty}(\xi_i(K, t) - \xi_i(0, t)),$$

$$C \geqslant 0, \quad C \leqslant \xi_i(K, t) - \xi_i(0, t). \tag{13}$$

Нам достаточно проверить, что $C \equiv 0$. Так как в силу леммы 6 процесс $\xi_i(K, t)$ возвратен, а по замечанию произвольное состояние $\varepsilon > 0$ существенно, то $\tau = \tau(K, \varepsilon) < \infty$ с вероятностью 1. Из (13) следует, что $C \leqslant \xi_i(K, \tau) - \xi_i(0, \tau) \leqslant \xi_i(K, \tau) = \varepsilon$. Ввиду произвола в выборе ε $C \equiv 0$.

Возьмем теперь произвольную ограниченную равномерно непрерывную функцию $f: R^n \to R^1$ и покажем, что последовательност $I = M(f(\bar{\xi}(\bar{x}, t)) - f(\bar{\xi}(\bar{y}, s)))$ стремится к 0 при $t \to \infty$, $s \to \infty$. В таком случае по критерию Коши будет существовать $\lim\limits_{t \to \infty} Mf(\bar{\xi}(\bar{x}, t))$, который не зависит от $\bar{x}$. Пусть для определенности $t \geqslant s$. Тогда

$$I = \left(\int\limits_{\|\bar{z}\| \leqslant K} + \int\limits_{\|\bar{z}\| > K} \right) P\{\bar{\xi}(\bar{x}, t-s) \in d\bar{z}\} \times$$

$$\times M(f(\bar{\xi}(\bar{z}, s)) - f(\bar{\xi}(\bar{y}, s))) = I_1 + I_2.$$

Обозначим $\Delta(\bar{u}) = \sup\limits_{\bar{z}} |f(\bar{z} + \bar{u}) - f(\bar{z})|$, $M = \sup\limits_{\bar{z}} |f(\bar{z})|$. Имеем

$$I_1 \leqslant \int\limits_{\|\bar{z}\| \leqslant K} P\{\bar{\xi}(\bar{x}, t-s) \in d\bar{z}\} M\Delta(\bar{\xi}(\bar{z}, s) - \bar{\xi}(\bar{y}, s)) \xrightarrow[\substack{s \to \infty \\ t \geqslant s}]{} 0,$$

так как $M\Delta(\bar{\xi}(\bar{z}, s) - \bar{\xi}(\bar{y}, s)) \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$ равномерно по $\bar{z}: \|\bar{z}\| \leqslant K$ вследствие непрерывности $\Delta(\bar{x})$ в нуле и утверждений (12) и (11). Далее, $|I_2| \leqslant 2M \; P\{\|\bar{\xi}(\bar{x}, t-s)\| > K\} < \varepsilon$ при достаточно большом K. Поэтому $I \xrightarrow[t, s \to \infty]{} 0$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться критерием слабой сходимости мер в R^n и условием стохастической ограниченности процесса $\bar{\xi}(\bar{x}, t)$.

Доказанная нами теорема позволяет утверждать, что для ПДВС наличие стационарного распределения (которое обязано быть единственным и совпадать с финальным) эквивалентно стохастической ограниченности. Кроме того, свойство быть стохастически ограниченным не зависит от начального состояния.

В некоторых случаях проверка стохастической ограниченности может осуществляться с помощью таких двух лемм.

Лемма 7. Если $\bar{\alpha}_1(t)$ и $\bar{\alpha}_2(t)$ — обобщенные пуассоновские процессы со значениями в R^n_+ с непрерывными справа траекториями и одинаковыми распределениями, $\bar{f}^i = (f_1^i, \ldots, f_n^i) \in A^n$, $i = 1, 2$, $f_j^1 \geqslant f_j^2$, $j = \overline{1, n}$, ПДВС $\bar{\xi}_1(\bar{x}_1, t)$ и $\bar{\xi}_2(\bar{x}_2, t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\bar{\xi}_i(\bar{x}_i, t) = \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}^i(\bar{\xi}(\bar{x}_i, u))\, du + \bar{\alpha}_i(t) - \bar{\alpha}_i(t_0) + \bar{x}_i, \qquad i = 1, 2$$

и $\bar{\xi}_1(\bar{x}_1, t)$ стохастически ограничен, то стохастически ограниченным будет и процесс $\bar{\xi}_2(\bar{x}_2, t)$.

Доказательство. Так как нас интересуют лишь свойства распределений, то можно предположить, что $\bar{\alpha}_1(t) = \bar{\alpha}_2(t)$. Полагая $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ и повторяя рассуждения доказательства един ченности решения в лемме 1, получаем $\bar{\xi}_1(\bar{x}_1, t) \geqslant \bar{\xi}_2(\bar{x}_2, t)$, что достаточно для стохастической ограниченности процесса $\bar{\xi}_2(\bar{x}_2, t)$.

Лемма 8. Стохастическая ограниченность ПДВС $\bar{\xi}(\bar{x}, t)$, удовлетворяющего соотношению (2), не зависит от значений $\bar{f}$, принимаемых на произвольном компакте K.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно проверить для случая $n = 1$. Положим $x_0 = \max\{y : y \in K\}$,

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & y > x_0, \\ 0, & y \leqslant x_0, \end{cases} \qquad h(y) = \begin{cases} f(y), & y > x_0, \\ f(x_0), & x_0 \geqslant y > 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

и рассмотрим ПДВС $\eta(x, t)$ и $\zeta(x, t)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\eta(x, t) = \int_{t_0}^{t} g(\eta(x, u))\,du + \alpha(t) - \alpha(t_0) + x,$$

$$\zeta(x, t) = \int_{t_0}^{t} h(\zeta(x, u))\,du + \alpha(t) - \alpha(t_0) + x, \quad x \geqslant x_0$$

(процесс $\eta(x, t)$ принимает значения из интервала $[x_0, \infty)$, а $\zeta(x, t)$ — из $[0, \infty)$). Повторяя рассуждения доказательства леммы 7, получаем

$$\eta(x, t) \geqslant \xi(x, t) \geqslant \zeta(x, t) \geqslant 0. \tag{14}$$

Если

$$\xi_1(x, t) = \int_{t_0}^{t} f_1(\xi_1(x, u))\,du + \alpha(t) - \alpha(t_0) + x,$$

где $f_1 \in A$, $f_1(y) = f(y)$ при $y \bar{\in} K$, то

$$g(y) \geqslant f_1(y) \geqslant h(y) \text{ и } \eta(x, t) \geqslant \xi_1(x, t) \geqslant \zeta(x, t) \geqslant 0. \tag{15}$$

Из соотношений (14) и (15) следует, что нам достаточно убедиться в справедливости неравенства $\eta(x, t) - \zeta(x, t) \leqslant x_0$, а оно может быть проверено методом доказательства от противного, так же, как в лемме 1.

Пример 1. $\xi(x, t) \in R^1_+$, $f(x) = -ax$, $a > 0$, $t \geqslant 0$. В этом случае уравнение (2) имеет решение

$$\xi(x, t) = xe^{-at} + \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-s)}\,d\alpha(s).$$

Одномерные распределения процесса $\xi(x, t)$ безгранично делимы и имеют преобразования Лапласа

$$\psi(z, t) = \exp\left\{-zxe^{-at} - \mu \int_0^t (1 - \varphi(ze^{-as}))\,ds\right\},$$

где μ — интенсивность, а $\varphi(z)$ — преобразование Лапласа скачков процесса $\alpha(t)$. Так как существует

$$\lim_{t\to\infty}\psi(z, t) = \exp\left\{-\mu\int_0^\infty (1-\varphi(ze^{-as}))\,ds\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\mu a^{-1}\int_0^z (1-\varphi(u))\,u^{-1}du\right\},$$

то процесс $\xi(x, t)$ стохастически ограничен тогда и только тогда, когда

$$\int_0^z (1-\varphi(u))\,u^{-1}du < \infty \tag{16}$$

при всех $z > 0$.

Выясним вероятностный смысл неравенства (16). Поскольку для $\varphi(z) = Me^{-u\xi} = \int_0^\infty e^{-ux}d\Phi(x)$

$$\int_0^1 (1-\varphi(u))\,u^{-1}du = \int_0^\infty (1-e^{-u})\,u^{-1}(1-\Phi(u))\,du,$$

то (16) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty (1-\Phi(u))\,u^{-1}du < \infty.$$

Так как

$$\int_1^\infty (1-\Phi(u))\,u^{-1}du = \int_0^\infty (1-\Phi(e^x))\,dx = \int_0^\infty P\{\ln\xi > x\}\,dx,$$

то неравенство (16) эквивалентно условию

$$M(\ln\xi;\ \ln\xi > 0) = \int_1^\infty \ln x d\Phi(x) < \infty.$$

Учитывая леммы 7 и 8, сформулируем следующее утверждение.

Следствие. Если для некоторого $a > 0$ при всех достаточно больших x $f_i(x) \leqslant -ax$, $\int_1^\infty \ln x d\Phi_i(x) < \infty$, $i = \overline{1, n}$, где $\Phi_i(x)$ — функции распределения скачка процесса $\alpha_i(t)$, то существует финальное распределение процесса $\xi(\bar{x}, t)$, не зависящее от $\bar{x}$.

Пример 2. $\xi(\bar{x}, t) \in R_+^n$,

$$\lim_{x\to\infty} f_i(x) = -c_i > -\infty, \quad i = \overline{1, n},$$

Из условия эргодичности для системы $M|G|1$, теоремы, лемм 7 и 8 следует, что процесс $\bar{\xi}(\bar{x}, t)$ имеет финальное распределение тогда и только тогда, когда $\lambda_i m_i c_i^{-1} < 1$, где λ_i — интенсивность, m_i среднее значение скачков компоненты $\alpha_i(t)$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 2. М., 1973.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., 1963.

Поступила в редколлегию 25.04.80

O. K. Zakusilo

ON EXISTENCE OF FINAL DISTRIBUTION FOR PROCESSES WITH DISCRETE INTERFERENCE OF CHANCE

It is proved that stochastic boundedness of processes with discrete interference of chance is equivalent to existence of limits of trasition probabilities which do not depend on initial state.

УДК 519.21

Ю. И. ИГНАТ, ст. преп.
Ужгородский университет

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ В СХЕМЕ СЕРИЙ

Пусть $\{\xi_{nk};\ k = 1, 2, 3, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин. Образуем суммы $\zeta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}$ и введем следующие обозначения:

$$F_{nk}(x) = P\{\xi_{nk} < x\}, \qquad f_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nk}(x),$$

$$\Phi_n(x) = P\{\zeta_n < x\}, \qquad \varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_n(x),$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \qquad \varphi(t) = e^{-t^2/2}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\alpha_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \leqslant \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x), \qquad \beta_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} |x| dF_{nk}(x),$$

$$\gamma_n(\varepsilon) = \left| 1 - \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \leqslant \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right|, \ \beta_n^*(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x);$$

C, C^*, c с индексами обозначают абсолютные постоянные.