Из условия эргодичности для системы $M|G|1$, теоремы, лемм 7 и 8 следует, что процесс $\bar{\xi}(\bar{x}, t)$ имеет финальное распределение тогда и только тогда, когда $\lambda_i m_i c_i^{-1} < 1$, где λ_i — интенсивность, m_i среднее значение скачков компоненты $\alpha_i(t)$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 2. М., 1973.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., 1963.

Поступила в редколлегию 25.04.80

O. K. Zakusilo

ON EXISTENCE OF FINAL DISTRIBUTION FOR PROCESSES WITH DISCRETE INTERFERENCE OF CHANCE

It is proved that stochastic boundedness of processes with discrete interference of chance is equivalent to existence of limits of trasition probabilities which do not depend on initial state.

УДК 519.21

Ю. И. ИГНАТ, ст. преп.
Ужгородский университет

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ В СХЕМЕ СЕРИЙ

Пусть $\{\xi_{nk};\ k = 1, 2, 3, \dots, k_n;\ n = 1, 2, 3, \dots\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин. Образуем суммы $\zeta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}$ и введем следующие обозначения:

$$F_{nk}(x) = P\{\xi_{nk} < x\}, \qquad f_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{nk}(x),$$

$$\Phi_n(x) = P\{\zeta_n < x\}, \qquad \varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_n(x),$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz, \qquad \varphi(t) = e^{-t^2/2}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\alpha_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \leqslant \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x), \qquad \beta_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} |x|\, dF_{nk}(x),$$

$$\gamma_n(\varepsilon) = \left| 1 - \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \leqslant \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right|, \ \beta_n^*(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x);$$

C, C^*, c с индексами обозначают абсолютные постоянные.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_{nk}\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF_{nk}(x) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_1 \{\alpha_n(\varepsilon) + \beta_n(\varepsilon) + \gamma_n(\varepsilon)\}. \tag{1}$$

Если же дополнительно и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) < +\infty$, то

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_1^* \{\alpha_n(\varepsilon) + \beta_n(\varepsilon) + \gamma_n(\varepsilon)\}. \tag{2}$$

Доказательство. Используя неравенства

$$|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha/1! - (i\alpha)^2/2! - \cdots - (i\alpha)^n/n!| \leqslant \begin{cases} |\alpha|^{n+1}/(n+1)!, \\ 2|\alpha|^n/n!, \end{cases}$$

справедливые для любого вещественного α, и неравенство Коши—Буняковского для произвольного $\varepsilon > 0$, находим

$$|f_{nk}(t) - 1|^2 = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\, dF_{nk}(x) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left| \int\limits_{|x| \leqslant \varepsilon} (\ldots)\, dF_{nk}(x) \right|^2 + 2 \left| \int\limits_{|x| > \varepsilon} (\ldots)\, dF_{nk}(x) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2|t|^3 \int\limits_{|x| \leqslant \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x) + 8t^2 \left\{ \int\limits_{|x| > \varepsilon} |x|\, dF_{nk}(x) \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2|t|^3 \alpha_n(\varepsilon) + 8t^2 \beta_n^2(\varepsilon). \tag{3}$$

Если выбрать $T_n' = \min\{[16\alpha_n(\varepsilon)]^{-1/3}, |8\beta_n(\varepsilon)|^{-1}\}$, то в промежутке $|t| \leqslant T_n'$ при любом k из (3) следует

$$|f_{nk}(t) - 1| \leqslant 1/2. \tag{4}$$

Аналогичным образом в указанном промежутке получим

$$\sum_{k=1}^{k_n} |f_{nk}(t) - 1|^2 \leqslant 2|t|^3 \alpha_n(\varepsilon) + |t|\beta_n(\varepsilon). \tag{5}$$

В силу того, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} [f_{nk}(t) - 1] + t^2/2 = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x| \leqslant \varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx - itx/2)\, dF_{nk}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x| > \varepsilon} (e^{itx} - 1 - itx)\, dF_{nk}(x) + (t^2/2) \left[1 - \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x| \leqslant \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right],$$

имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{k_n}[f_{nk}(t)-1]+t^2/2\right|\leqslant(|t|^3/6)\,\alpha_n(\varepsilon)+2\,|t|\,\beta_n(\varepsilon)+0{,}5t^2\gamma_n(\varepsilon). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует неравенство

$$r_n=\left|\sum_{k=1}^{k_n}\log f_{nk}(t)+t^2/2\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{k_n}[f_{nk}(t)-1]+t^2/2\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_n}|f_{nk}(t)-1|^2\leqslant(13/6)\,|t|^3\,\alpha_n(\varepsilon)+3\,|t|\,\beta_n(\varepsilon)+0{,}5t^2\gamma_n(\varepsilon). \tag{7}$$

Легко доказать с учетом (4), что $|\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}|\leqslant r_n\exp\{-t^2/2+r_n\}$, поэтому

$$|\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}|\leqslant\{(13/6)\,|t|^3\,\alpha_n(\varepsilon)+3\,|t|\,\beta_n(\varepsilon)+0{,}5t^2\gamma_n(\varepsilon)\}\times$$
$$\times\exp\{3\,|t|\,\beta_n(\varepsilon)\}\cdot\exp\{-(t^2/2)\,[1-(13/3)\,|t|\,\alpha_n(\varepsilon)-\gamma_n(\varepsilon)]\}.$$

Предположим теперь, что

$$\gamma_n(\varepsilon)\leqslant 1/2, \tag{8}$$

так как из неравенства, противоположного (8), следует (1). При условии (8) в промежутке $|t|\leqslant T_n'$

$$|\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}|\leqslant\{(13/6)\,|t|^3\,\alpha_n(\varepsilon)+3\,|t|\,\beta_n(\varepsilon)+0{,}5t^2\gamma_n(\varepsilon)\}\cdot 2e^{-t^2/2}. \tag{9}$$

Оцениваем величину $\varphi_n(t)=\prod_{k=1}^{k_n}f_{nk}(t)$. Из очевидного неравенства

$$|f_{nk}(t)|^2=1-2\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{nk}(x)+\left[\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{nk}(x)\right]^2+$$
$$+\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\,dF_{nk}(x)\right]^2\leqslant\exp\left\{-2\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{nk}(x)+\right.$$
$$\left.+\left[\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{nk}(x)\right]^2+\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\,dF_{nk}(x)\right]^2\right\}$$

получаем

$$|\varphi_n(t)|=\prod_{k=1}^{k_n}|f_{nk}(t)|\leqslant\exp\left\{-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{nk}(x)+\right.$$
$$\left.+0{,}5\sum_{k=1}^{k_k}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)^2\,dF_{nk}(x)+0{,}5\sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\,dF_{nk}(x)\right|\right\}.$$

Оцениваем каждое слагаемое экспоненты:

$$-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{nk}(x)=-t^2/2+(t^2/2)\Bigg[1-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\leqslant\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\leqslant\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)\Bigg]-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{nk}(x)\leqslant -t^2/2+$$

$$+(t^2/2)\,\gamma_n(\varepsilon)+(1/6)\,|t|^3\alpha_n(\varepsilon)+|t|\,\beta_n(\varepsilon);$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)^2\,dF_{nk}(x)\leqslant |t|^3\alpha_n(\varepsilon)+2\,|t|\,\beta_n(\varepsilon);$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\,dF_{nk}(x)\right|=\sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\sin tx-tx)\,dF_{nk}(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant(1/6)\,|t|^3\alpha_n(\varepsilon)+2\,|t|\,\beta_n(\varepsilon).$$

С учетом последних неравенств имеем

$$|\varphi_n(t)|\leqslant\exp\{-t^2/2\,[1-(3/4)\,|t|\,\alpha_n(\varepsilon)-\gamma_n(\varepsilon)]\}\exp\{3\,|t|\,\beta_n(\varepsilon)\}.$$

Выберем теперь $T_n=\min\{[3\alpha_n(\varepsilon)]^{-1},[8\beta_n(\varepsilon)]^{-1}\}$ и будем считать, что $T_n'<T_n$, поскольку противоположное неравенство только упрощает оценки. Тогда в промежутке $|t|\leqslant T_n$

$$|\varphi_n(t)|\leqslant 2e^{-t^2/8}. \tag{10}$$

Наконец, воспользуемся известной теоремой Эссеена см. [1, с. 24]), в которой положим $T=T_n$, $A=(2\pi)^{-1/2}$, $F(x)=\Phi_n(x)$, $G(x)=\Phi(x)$, и следующей оценкой, в которой учтены неравенства (9), (10);

$$\varepsilon_1=\int_{|t|\leqslant T_n}|\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}|\,|t|^{-1}\,dt\leqslant\int_{|t|\leqslant T_n'}|\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}|\,|t|^{-1}\,dt+$$

$$+\int_{T_n'<|t|\leqslant T_n}\sum_{k=1}^{k_n}|f_{nk}(t)|\,|t|^{-1}\,dt+2\int_{T_n'}^{\infty}e^{-t^2/2}t^{-1}dt\leqslant\int_{|t|\leqslant T_n'}|\varphi_n(t)-$$

$$-e^{-t^2/2}|\,|t|^{-1}\,dt+2\int_{T_n'}^{\infty}e^{-t^2/8}t^{-1}dt+2\int_{T_n'}^{\infty}e^{-t^2/2}t^{-1}dt\leqslant$$

$$\leqslant c_1\alpha_n(\varepsilon)+c_2\beta_n(\varepsilon)+c_3\gamma_n(\varepsilon).$$

Применением теоремы Эссеена завершается доказательство основного неравенства (1).

В заключение отметим, что предположение о существовании конечных дисперсий упрощает получение оценок и поэтому доказательство неравенства (2) здесь не приводится.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_{nk}\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{nk}(x) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) = 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_2 \{\alpha_n(\varepsilon) + \beta_n^*(\varepsilon)\}. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 2 следует непосредственно из неравенства (2).

Пользуясь неравенствами (1), (2), (11), легко получить некоторые известные оценки сближения с нормальным законом распределений сумм независимых случайных величин, содержащиеся в работах [2—5].

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965. 2. *Петров В. В.* Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона.— ДАН СССР, 1965, **160**, № 5. 3. *Осипов Л. В.* Уточнение теоремы Линдеберга.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, **11**, вып. 2. 4. *Студнев Ю. П.* Об одной универсальной оценке.— В кн.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент, 1963. 5. *Студнев Ю. П., Игнат Ю. И.* Об уточнении центральной предельной теоремы и ее глобального варианта.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, **12**, вып. 3.

Поступила в редколлегию 20.03.80

Yu. I. Ignat

ON AN ESTIMATE OF DEVIATION FROM NORMAL LAW OF DISTRIBUTION OF SUM IN SCHEME OF SERIES

Upper estimates of deviation from normal law of distributions of sums of independent random variables in a scheme of series for uniform matrix under zero mathematical expectations are obtained. The estimates are expressed in terms of truncated moments.

УДК 519.21

О. И. КЛЕСОВ, асп.
Киевский университет

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Пусть $\{\xi(k, l);\ k \geqslant 0,\ l \geqslant 0\}$ — однородное (в широком смысле) поле, определенное на целочисленной решетке R^2, т. е. $M\xi(k, l) = 0$, $M\xi(m, n)\,\xi(m + k, n + l) = R_0(k, l)$. Положим

$$S(m, n) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \xi(i, j),\ R_1(m, n) = M[S(m, n)/mn]^2.$$