Теорема 2. Пусть $\{\xi_{nk}\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{nk}(x) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) = 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C_2 \{\alpha_n(\varepsilon) + \beta_n^*(\varepsilon)\}. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 2 следует непосредственно из неравенства (2).

Пользуясь неравенствами (1), (2), (11), легко получить некоторые известные оценки сближения с нормальным законом распределений сумм независимых случайных величин, содержащиеся в работах [2—5].

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965. 2. *Петров В. В.* Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона.— ДАН СССР, 1965, **160**, № 5. 3. *Осипов Л. В.* Уточнение теоремы Линдеберга.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, **11**, вып. 2. 4. *Студнев Ю. П.* Об одной универсальной оценке.— В кн.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент, 1963. 5. *Студнев Ю. П., Игнат Ю. И.* Об уточнении центральной предельной теоремы и ее глобального варианта.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, **12**, вып. 3.

Поступила в редколлегию 20.03.80

Yu. I. Ignat

ON AN ESTIMATE OF DEVIATION FROM NORMAL LAW OF DISTRIBUTION OF SUM IN SCHEME OF SERIES

Upper estimates of deviation from normal law of distributions of sums of independent random variables in a scheme of series for uniform matrix under zero mathematical expectations are obtained. The estimates are expressed in terms of truncated moments.

УДК 519.21

О. И. КЛЕСОВ, асп.
Киевский университет

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Пусть $\{\xi(k, l);\ k \geqslant 0,\ l \geqslant 0\}$ — однородное (в широком смысле) поле, определенное на целочисленной решетке R^2, т. е. $M\xi(k, l) = 0$, $M\xi(m, n)\,\xi(m+k, n+l) = R_0(k, l)$. Положим

$$S(m, n) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \xi(i, j),\ R_1(m, n) = M[S(m, n)/mn]^2.$$

В этой работе рассматриваются условия, при которых справедлив усиленный закон больших чисел (у. з. б. ч.), т. е. почти наверное (п. н.)

$$\lim (mn)^{-1} S(m, n) = 0$$

(здесь и везде в дальнейшем предельный переход производится при $mn \to \infty$). Нетрудно доказать, что условие $\lim R_0(m, n) = 0$ влечет $\lim R_1(m, n) = 0$ и, таким образом, каждое из них достаточно для того, чтобы средние $\sigma(m, n) = (mn)^{-1} S(m, n)$ сходились к 0 по вероятности (и в среднем квадратическом). Тем не менее эти условия не гарантируют выполнения у. з. б. ч.

В статье В. Ф. Гапошкина [1] приведены условия для выполнимости п. н. соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} S_{A_k}/|A_k| = 0$, где $\{A_k \in R^2, \ k \geqslant 1\}$ последовательность монотонно расширяющихся множеств специальной структуры, площадь которых стремится к ∞, $|A_k|$ — площадь A_k, $S_{A_k} = \sum\limits_{(i,j)\in A_k} \xi(i, j)$. В предлагаемой же работе суммирование производится по системе прямоугольников, которые не образуют системы монотонно расширяющихся множеств, поэтому результаты [1] здесь не применимы. Однако идея доказательства — представление средних $\sigma(m, n)$ через ортогональные ряды — та же, что и в статье [1]. При этом вместо классической теоремы Меньшова — Радемахера мы используем ее аналог для кратных рядов, полученный Ф. Морицем [2].

Теорема 1. Пусть последовательность $\{X(m, n); \ m, n \geqslant 1\}$ ортогональна, т. е. $MX(m, n)X(m', n') = 0$ для несовпадающих индексов (m, n), (m', n'). Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{\substack{m\geqslant 1\\ n\geqslant 1}} MX^2(m, n) \times$ $\times (\log^{*)}(2m))^2 (\log(2n))^2$ вытекает, что п. н. сходится ряд $\sum\limits_{m,n\geqslant 1} X(m, n)$.

2. Пусть $F(\lambda, \mu)$ и $Z(d\lambda, d\mu)$ — спектральная мера и стохастическая спектральная мера последовательности $\{\xi(k, l); \ k, l \geqslant 0\}$, т. е.

$$\xi(k, l) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(k\lambda + l\mu)) Z(d\lambda, d\mu),$$
$$R_0(k, l) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(k\lambda + l\mu)) F(d\lambda, d\mu). \quad (1)$$

Известно, что для всех интегрируемых с квадратом функций f и g имеет место равенство

$$M \int\limits_{R^2} f(\lambda, \mu) Z(d\lambda, d\mu) \overline{\int\limits_{R^2} g(\lambda, \mu) Z(d\lambda, d\mu)} =$$

*) Логарифмы по основанию 2.

$$= \int_{R^2} f(\lambda, \mu) \overline{g(\lambda, \mu)} F(d\lambda, d\mu). \tag{2}$$

В частности, если функция f отлична от 0 на множестве V_f, а функция g — на множестве V_g и $V_f \cap V_g = \varnothing$, то

$$M \int_{R^2} f(\lambda, \mu) Z(d\lambda, d\mu) \overline{\int_{R^2} g(\lambda, \mu) Z(d\lambda, d\mu)} = 0. \tag{3}$$

Из спектрального представления (1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sigma(m, n) &= \int_{R^2} \chi(K_m(\lambda), K_n(\mu)) Z(d\lambda, d\mu), \\ R_1(m, n) &= \int_{R^2} \chi(|K_m(\lambda)|^2, |K_n(\mu)|^2) F(d\lambda, d\mu), \end{aligned} \tag{4}$$

где $K_0(\lambda) = 1$; $K_m(\lambda) = (\exp(im\lambda) - 1)/m(\exp(i\lambda) - 1)$, $m \geqslant 1$ и функционал $\chi(\cdot, \cdot)$ действует на последовательность чисел $\{a_k, k \geqslant 0\}$ следующим образом:

$$\chi(a_k, a_l) = \begin{cases} a_k a_l, & k \geqslant 1,\ l \geqslant 1, \\ a_k, & k \geqslant 1,\ l = 0, \\ a_l, & k = 0,\ l \geqslant 1, \\ 1 & k = 0,\ l = 0. \end{cases}$$

Для ядра $K_m(\lambda)$ $(m \geqslant 1)$ справедливы оценки

$$|K_m(\lambda)| \leqslant C(m|\lambda|)^{-1}, \quad \lambda \neq 0; \tag{5}$$

$$|K_m(\lambda) - 1| \leqslant Cm|\lambda|, \tag{6}$$

где C обозначает все константы, не зависящие от последовательности $\{\xi(k, l)\}$ и встречающихся в формулах индексов.

Теорема 2. У. з. б. ч. выполнен, если

$$\int_{R^2} (\log|\log 1/|\lambda||)^2 (\log|\log 1/|\mu||)^2 F(d\lambda, d\mu) < \infty. \tag{7}$$

Теорема 3. Пусть $t_m = 3(m+1)$; $\alpha(m) = (\log\log t_m)/t_m \log t_m$. У. з. б. ч. выполнен, если сходится хотя бы один из рядов:

$$\sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} R_1(m, n) \alpha(m) \alpha(n); \tag{8}$$

$$\sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} |R_0(m, n)| \alpha(m) \alpha(n). \tag{9}$$

Теорема 3 вытекает из теоремы 2. Действительно,

$$R_1(m, n) = (mn)^{-1} R_0(0, 0) + 2(mn^2)^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} R_0(0, j)(n - j) +$$

$$+ 2(m^2n)\sum_{i=1}^{m-1} R_0(i, 0)(m-i) +$$

$$+ 4(m^2n^2)^{-1}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} R_0(i, j)(m-i)(n-j).$$

Следовательно, из сходимости ряда (9) вытекает сходимость ряда (8). В свою очередь, сходимость ряда (8) влечет сходимость интеграла (7). В самом деле, из формулы (4) следует, что

$$R_1(m, n) \geqslant C \int_{|\lambda|\leqslant 1/m}\int_{|\mu|\leqslant 1/n} F(d\lambda, d\mu) \equiv F_{m,n}$$

(если в этой формуле m либо n равны 0, то интегрирование в соответствующем интеграле следует производить от $-\infty$ до $+\infty$). Положив $\Delta F_{0,0} = F_{0,0}$; $\Delta F_{m,0} = F_{m,0} - F_{m-1,0}$, $m \geqslant 1$; $\Delta F_{0,n} = F_{0,n} - F_{0,n-1}$, $n \geqslant 1$; $\Delta F_{m,n} = F_{m,n} - F_{m-1,n} - F_{m,n-1} + F_{m-1,n-1}$, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta F_{m,n} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \alpha(i)\,\alpha(j) \leqslant C + C\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} F_{m,n}\alpha(m)\,\alpha(n) < \infty.$$

Так как $\sum_{j=0}^{m} \alpha(j) \geqslant C(\log\log t_m)^2$, то из (8) вытекает

$$U_1 \equiv \int_{|\lambda|\leqslant 1/3}\int_{|\mu|\leqslant 1/3} (\log|\log 1/|\lambda||)^2 (\log|\log 1/|\mu||)^2 F(d\lambda, d\mu) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m\geqslant 3}\sum_{n\geqslant 3} \Delta F_{m,n} (\log\log m)^2 (\log\log n)^2 < \infty.$$

Легко показать, что

$$U_2 \equiv \int_{|\lambda|\geqslant 1/3}\int_{|\mu|\geqslant 1/3} (\log|\log 1/|\lambda||)^2 (\log|\log 1/|\mu||)^2 F(d\lambda, d\mu) < \infty.$$

Кроме того,

$$U_3 \equiv \int_{|\lambda|\leqslant 1/3}\int_{|\mu|\geqslant 1/3} (\log\log 1/|\lambda|)^2 (\log|\log 1/|\mu||)^2 F(d\lambda, d\mu) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m=3}^{\infty} (\log\log m)^2 f_m,$$

где $f_m = \int_{1/(m-1)<|\lambda|\leqslant 1/m}\int_{|\mu|>1/3} F(d\lambda, d\mu).$

оэтому

$$U_3 \leqslant C \sum_{m=3}^{\infty} f_m \sum_{i=3}^{\infty} \alpha(i) \leqslant C \sum_{m=3}^{\infty} \alpha(m) \int\limits_{|\lambda|\leqslant 1/m} \int\limits_{|\mu|>1/3} F(d\lambda, d\mu) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m=3}^{\infty} \alpha(m) R_1(m, 0) < \infty.$$

Аналогично можно доказать, что

$$U_4 \equiv \int\limits_{|\lambda|>1/3} \int\limits_{|\mu|\leqslant 1/3} (\log|\log 1/|\lambda||)^2 (\log\log 1/|\mu|)^2 F(d\lambda, d\mu) < \infty.$$

Таким образом, $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 < \infty$ и интеграл (7) сходится, если сходится ряд (8).

Лемма 1. Пусть $A_1(m,n) = \{\lambda, \mu : |\lambda| \leqslant 2^{-m}, |\mu| \leqslant 2^{-n}\}$ и $I_1(m, n) = \int\limits_{A_1(m,n)} Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_1(m, n) = 0$ п. н.

Доказательство леммы 1. Из соотношения (3) вытекает, что последовательность $X(k, l) = \int\limits_{B(k,l)} Z(d\lambda, d\mu)$ будет ортогональной $(B(k, l) = \{\lambda, \mu : 2^{-(k+1)} < |\lambda| \leqslant 2^{-k};\ 2^{-(l+1)} < |\mu| \leqslant 2^{-l}\})$. Воспользовавшись соотношениями (2) и (7), заключаем, что

$$\Sigma M |X(m, n)|^2 (\log m)^2 (\log n)^2 < \infty.$$

Поэтому из теоремы 1 следует, что ряд $\Sigma X(m, n)$ сходится п. н. А так как $I_1(m, n) = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} X(k, l)$, то лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $I_2(m, n) = \int\limits_{A_1(m,n)} (K_{2^m}(\lambda) - 1)(K_{2^n}(\mu) - 1) \times Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_2(m, n) = 0$ п. н.

Доказательство. Из формулы (2) и оценки (6) вытекает, что

$$M|I_2(m, n)|^2 \leqslant C \cdot 2^{2(m+n)} \int\limits_{A_1(m,n)} |\lambda|^2 |\mu|^2 F(d\lambda, d\mu).$$

Поэтому

$$\sum_{m,n} M|I_2(m, n)|^2 \leqslant C \sum_{m,n} 2^{2(m+n)} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \int\limits_{B(k,l)} |\lambda|^2 |\mu|^2 F(d\lambda, d\mu) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{B(k,l)} (2^{2k} |\lambda|^2)(2^{2l} |\mu|^2) F(d\lambda, d\mu) < \infty.$$

Применение леммы Бореля—Кантелли заканчивает доказательство леммы 2.

Лемма 3. Пусть для каждого n последовательность $\{Y(k, n), k \geqslant 1\}$ является ортогональной. Если

$$\sum_{k,n} MY^2(k, n)(\log 2k)^2 < \infty,$$

то

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \left| \sum_{k=m}^{\infty} Y(k, n) \right| = 0 \text{ п. н.}$$

Доказательство. Учитывая оценку

$$\sum_{n\geqslant 1} \sum_{\nu\geqslant 1} M\nu^2 \left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} Y(k, n) \right]^2 = \sum_{n\geqslant 1} \sum_{\nu\geqslant 1} \nu^2 \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} MY^2(k, n) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n\geqslant 1} \sum_{k\geqslant 1} MY^2(k, n)(\log 2k)^2 < \infty,$$

заключаем, что ряд $\sum_{n\geqslant 1} \sum_{\nu\geqslant 1} \nu^2 \left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} Y(k, n) \right]^2$ сходится п. н. Применяя неравенство Коши, убеждаемся в справедливости оценки

$$\sum_{n\geqslant 1} \left[\sum_{k=1}^{2^{m+p}} Y(k, n) - \sum_{k=1}^{2^m} Y(k, n) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu\geqslant m} \nu^{-2} \right) \sum_{n\geqslant 1} \sum_{\nu\geqslant m} \nu^2 \left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} Y(k, n) \right]^2.$$

В силу критерия Коши сходимости последовательности последнее соотношение влечет

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \left| \sum_{k=2^m}^{\infty} Y(k, n) \right| = 0 \text{ п. н.} \tag{10}$$

Учитывая, наконец, неравенство Меньшова—Радемахера (см., например, [3]), получаем

$$\sum_{m\geqslant 1} \sum_{n\geqslant 1} M \left[\max_{2^m<\nu\leqslant 2^{m+1}} \left(\sum_{k=1}^{\nu} Y(k, n) - \sum_{k=1}^{2^m} Y(k, n) \right) \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m\geqslant 1} \sum_{n\geqslant 1} m^2 \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} MY^2(k, m) < \infty.$$

Таким образом, в силу леммы Бореля—Кантелли

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \max_{2^m<\nu\leqslant 2^{m+1}} \left| \sum_{k=1}^{\nu} Y(k, n) - \sum_{k=1}^{2^m} Y(k, n) \right| = 0 \text{ п. н.} \tag{11}$$

Соотношения (11), (10) доказывают лемму 3.

Отметим, что доказательство леммы 3 аналогично доказательству теоремы Меньшова—Радемахера [3, с. 87].

Лемма 4. Пусть $I_3(m,n) = \int\limits_{A_1(m,n)} (K_{2^n}(\mu) - 1) Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_3(m,n) = 0$ п. н.

Доказательство. Положим $C(k,n) = \{\lambda, \mu : 2^{-(k+1)} < |\lambda| \leqslant 2^{-k},\ |\mu| \leqslant 2^{-n}\}$ и

$$Y_1(k,n) = \int\limits_{C(k,n)} (K_{2^n}(\mu) - 1) Z(d\lambda, d\mu).$$

В силу равенства (3) последовательность $\{Y_1(k,n),\ k \geqslant 0\}$ при каждом n ортогональна. Поэтому из оценки (6) вытекает

$$\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0} M\,|Y_1(k,n)|^2 (\log 2(k+1))^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0} (\log 2(k+1))^2\, 2^{2n} \sum_{l\geqslant n} \int\limits_{B(k,l)} |\mu|^2 F(d\lambda, d\mu) \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{k\geqslant 0}\sum_{l\geqslant 1} (\log 2(k+1))^2 \int\limits_{B(k,l)} F(d\lambda, d\mu) < \infty.$$

Так как $I_3(m,n) = \sum\limits_{k\geqslant m} Y_1(k,n)$, то лемма 4 следует из леммы 3.

Лемма 5. Пусть $I_4(m,n) = \int\limits_{A_1(m,n)} (K_{2^m}(\lambda) - 1) Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_4(m,n) = 0$ п. н.

Доказательство леммы 5 совершенно аналогично доказательству леммы 4.

Лемма 6. Пусть $A_2(m,n) = \{\lambda, \mu : |\lambda| \leqslant 2^{-m},\ |\mu| > 2^{-n}\}$ и $I_5(m,n) = \int\limits_{A_2(m,n)} (K_{2^m}(\lambda) - 1) K_{2^n}(\mu) Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_5(m,n) = 0$ п. н.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (2) и оценками (5), (6), получаем

$$M\,|I_5(m,n)|^2 \leqslant C\cdot 2^{2m}\cdot 2^{-2n} \int\limits_{A_2(m,n)} |\lambda|^2 |\mu|^{-2} F(d\lambda, d\mu).$$

Положив $D_k = \{\lambda, \mu :\ 2^{-(k+1)} < |\lambda| \leqslant 2^{-k},\ |\mu| > 1\}$, заключаем, что

$$\sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} M\,|I_5(m,n)|^2 \leqslant C \sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} 2^{2m-2n} \sum_{k\geqslant m}\sum_{l=0}^{n} \int\limits_{B(k,l)} |\lambda|^2 |\mu|^{-2} F(d\lambda, d\mu) +$$
$$+ C \sum_{m\geqslant 0} 2^{2m} \sum_{k\geqslant m} \int\limits_{D_k} |\lambda|^2 |\mu|^{-2} F(d\lambda, d\mu) \leqslant C \sum_{k\geqslant 0}\sum_{l\geqslant 0} 2^{2m-2n} \times$$
$$\times \int\limits_{B(k,l)} |\lambda|^2 |\mu|^{-2} F(d\lambda, d\mu) + C \sum_{k\geqslant 0} 2^{2k} \int\limits_{D_k} |\lambda|^2 |\mu|^{-2} F(d\lambda, d\mu) < \infty.$$

Лемма Бореля—Кантелли и полученные неравенства доказывают лемму 6.

Лемма 7. Пусть $I_6(m, n) = \int\limits_{A_1(m,n)} K_{2^n}(\mu) Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_6(m, n) = 0$ п. н.

Доказательство. Пусть $E(k, n) = \{\lambda, \mu : 2^{-(k+1)} < |\lambda| \leqslant 2^{-k}, |\mu| > 2^{-n}\}$; $Y_2(k, n) = \int\limits_{E(k,n)} K_{2^n}(\mu) Z(d\lambda, d\mu)$. Для каждого n последовательность $\{Y_2(k, n), k \geqslant 0\}$ ортогональна и $M|Y_2(k, n)|^2 \leqslant C \cdot 2^{-2n} \int\limits_{E(k,n)} |\mu|^{-2} F(d\lambda, d\mu)$. Поэтому $\sum\limits_{k\geqslant 0}\sum\limits_{n\geqslant 0} M|Y_2(k, n)|^2 (\log t_k)^2 < \infty$. Так как $I_6(m, n) = \sum\limits_{k\geqslant m} Y_2(k, n)$, то лемма 7 вытекает из леммы 3.

Лемма 8. Пусть $A_3(m, n) = \{\lambda, \mu : 2^{-m} < |\lambda|, |\mu| \leqslant 2^{-n}\}$ и $I_7(m, n) = \int\limits_{A_3(m,n)} K_{2^m}(\lambda)(K_{2^n}(\mu) - 1) Z(d\lambda, d\mu)$, $I_8(m, n) = \int\limits_{A_3(m,n)} K_{2^m}(\lambda) \times Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_k(m, n) = 0$ п. н. $(k = 7, 8)$.

Доказательство леммы 8 аналогично доказательству лемм 6 и 7.

Лемма 9. Пусть $A_4(m, n) = \{\lambda, \mu : |\lambda| > 2^{-m}, |\mu| > 2^{-n}\}$ и $I_9(m, n) = \int\limits_{A_4(m,n)} K_{2^m}(\lambda) K_{2^n}(\mu) Z(d\lambda, d\mu)$. Тогда $\lim I_9(m, n) = 0$ п. н.

Доказательство. В силу оценки (5) сходится ряд $\Sigma M|I_9(m, n)|^2$, что и доказывает лемму 9.

Доказательство теоремы 1. Из лемм 1—9 вытекает, что п. н.

$$\lim \sigma(2^m, 2^n) = \lim \int\limits_{R^2} K_{2^m}(\lambda) K_{2^n}(\mu) Z(d\lambda, d\mu) =$$

$$= \lim \sum_{1\leqslant k\leqslant 9} I_k(m, n) = 0. \tag{12}$$

Положим $\delta_1(m, n) = |\sigma(2^m, l) - \sigma(2^m, 2^n)|$, где $l = 2^n + l_1$, $1 \leqslant l_1 < 2^n$. Как и в работе [1], применяя классический метод «двоичных разбиений», докажем, что $\lim \delta_1(m, n) = 0$ п. н. Полагая $l_1 = \sum\limits_{1\leqslant p\leqslant n} \varepsilon_p 2^{n-q}$;

$$R_{n,q,j}(\mu) = K_{2^n+j2^{n-p}}(\mu) - K_{2^n+(j-1)2^{n-p}}(\mu),$$

где числа ε_p равны 0 или 1, получаем

$$\delta_1(m, n) = \left|\sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p (\sigma(2^m, 2^n + j_p 2^{n-p}) - \sigma(2^m, 2^n + (j_p - 1) 2^{n-p}))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p \int\limits_{|\lambda|\leqslant 2^{-m}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (K_{2^m}(\lambda) - 1) R_{n,p,j_p}(\mu) Z(d\lambda, d\mu)\right| +$$

$$+\left|\sum_{p=1}^{n}\varepsilon_p\int\limits_{|\lambda|\leqslant 2^{-m}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R_{n,p,j_p}(\mu)\,Z(d\lambda,d\mu)\right|+$$

$$+\left|\sum_{p=1}^{n}\varepsilon_p\int\limits_{|\lambda|\leqslant 2^{-m}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{2^m}(\lambda)\,R_{n,p,j_p}(\mu)\,Z(d\lambda,d\mu)\right|\equiv$$

$$\equiv\delta_2(m,n)+\delta_3(m,n)+\delta_4(m,n). \qquad (13)$$

Следовательно, достаточно показать, что каждое из слагаемых, стоящих в правой части неравенства (13), стремится к 0. Положим $G_1(m)=\{\lambda:|\lambda|\leqslant 2^{-m}\}$; $H_1(n)=\{\mu:|\mu|\leqslant 2^{-n}\}$; $H_2(n,q)=$ $=\{\mu:2^{-n}<|\mu|\leqslant 2^{-(n-q)}\}$; $H_3(n,q)=\{\mu:2^{-(n-q)}<|\mu|\}$. Имеют место оценки

$$R_{n,q,j}(\mu)\leqslant\begin{cases}C\cdot 2^{(n-q)}|\mu| & (0\leqslant|\mu|\leqslant 2^{-n}),\\ C\cdot 2^{-q} & (2^{-n}<|\mu|\leqslant 2^{-(n-q)}),\\ C\cdot 2^{-n}|\mu|^{-1} & (2^{-(n-q)}<|\mu|).\end{cases} \qquad (14)$$

Из формул (2), (6), (14) вытекает, что

$$M|\delta_2(m,n)|^2\leqslant C\Bigg(\sum_{1\leqslant q\leqslant n}\Bigg(\sum_{1\leqslant j\leqslant 2^q}2^{2m}2^{2(n-q)}\int\limits_{G_1(m)}\int\limits_{H_1(n)}|\lambda|^2|\mu|^2F(d\lambda,d\mu)+$$

$$+2^{2(m-q)}\int\limits_{G_1(m)}\int\limits_{H_2(n,q)}|\lambda|^2F(d\lambda,d\mu)+$$

$$+2^{2(m-n)}\int\limits_{G_1(m)}\int\limits_{H_3(n,q)}|\lambda|^2|\mu|^{-2}F(d\lambda,d\mu)\Bigg).$$

Поэтому

$$\sum_{n\geqslant 0}M|\delta_2(m,n)|^2\leqslant C\int\limits_{G_1(m)}2^{2m}|\lambda|^2\Bigg[\sum_{n\geqslant 0}\sum_{1\leqslant q\leqslant n}q^2\cdot 2^{2n-q}\times$$

$$\times\int\limits_{H_1(n)}|\mu|^2F(d\lambda,d\mu)\Bigg]+C\int\limits_{G_1(m)}2^{2m}|\lambda|^2\times$$

$$\times\Bigg[\sum_{n\geqslant 0}\sum_{1\leqslant q\leqslant n}q^2 2^{-q}\int\limits_{H_2(n,q)}F(d\lambda,d\mu)\Bigg]+$$

$$+C\int\limits_{G_1(m)}2^{2m}|\lambda|^2\Bigg[\sum_{n\geqslant 0}\sum_{1\leqslant q\leqslant n}q^2 2^{q-2n}\int\limits_{H_3(n,q)}|\mu|^{-2}F(d\lambda,d\mu)\Bigg].$$

Как показано в работе [1], выражения, стоящие в квадратных скобках, не превосходят $C\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(d\lambda,d\mu)$ (интегрирование прямо водится по переменной μ). Значит,

$$\sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} M\,|\,\delta_2(m,n)\,|^2 \leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(d\lambda, d\mu) < \infty.$$

Таким образом, $\lim \delta_2(m,n) = 0$ п. н. Аналогично, используя лишь вместо оценки (6) неравенство (5), можно доказать, что и $\lim \delta_4(m,n) = 0$ п. н.

Итак, для доказательства соотношения

$$\lim \max_{2^n < l < 2^{n+1}} |\,\sigma(2^m, l) - \sigma(2^m, 2^n)\,| = 0 \text{ п. н.} \qquad (15)$$

достаточно показать, что $\lim \delta_3(m,n) = 0$ п. н. Положим

$$Y_3(k,n) = \int_{G_2(k)}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{q=1}^{n}\varepsilon_q R_{n,q,j_q}(\mu)\,Z(d\lambda, d\mu),$$

где $G_2(k) = \{\lambda : 2^{-(k+1)} < |\,\lambda\,| \leqslant 2^{-k}\}$. Понятно, что последовательность $\{Y_3(k,n),\ k \geqslant 0\}$ при каждом n ортогональна. А так как

$$M\,|\,Y_3(k,n)\,|^2 = \int_{G_2(k)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{q=1}^{n}\varepsilon_q R_{n,q,j_q}(\mu)\right|^2 F(d\lambda, d\mu)$$

и

$$\left|\sum_{q=1}^{n}\varepsilon_q R_{n,q,j_q}(\mu)\right|^2 \leqslant \left(\sum_{q=1}^{n} q^{-2}\right)\left(\sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^q} |\,R_{n,q,j}(\mu)\,|^2 q^2\right),$$

то неравенства (14) влекут

$$M\,|\,Y_3(k,n)\,|^2 \leqslant C\sum_{q=1}^{n} q^2\Bigg[2^{2n-q}\int_{G_2(k)}\int_{H_1(n)} |\,\mu\,|^2 F(d\lambda, d\mu) +$$

$$+\,2^{-q}\int_{G_2(k)}\int_{H_2(n,q)} F(d\lambda, d\mu) + 2^{-2n}\int_{G_2(k)}\int_{H_3(n,q)} |\,\mu\,|^{-1} F(d\lambda, d\mu)\Bigg].$$

Используя условия теоремы, теперь легко доказать, что $\Sigma M\,|\,Y_3(k,n)\,|^2(\log t_k)^2 < \infty$. Отсюда с учетом леммы 3 доказываем, что равенство (15) имеет место. В силу симметрии мы таким образом доказали, что и

$$\lim \max_{2^m < k < 2^{m+1}} |\,\sigma(k, 2^n) - \sigma(2^m, 2^n)\,| = 0 \text{ п. н.} \qquad (16)$$

Так как соотношения (12), (15), (16) установлены, то для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\lim \max_{\substack{2^m < k < 2^{m+1}\\ 2^n < l < 2^{n+1}}} |\,\sigma(k,l) - \sigma(2^m, l) - \sigma(k, 2^n) + \sigma(2^m, 2^n)\,| = 0 \text{ п. н.} \qquad (17)$$

усть $\delta_5(m, n) = \sigma(k, l) - \sigma(2^m, l) - \sigma(k, 2^n) + \sigma(2^m, 2^n)$ $(2^m < k <$ 2^{m+1}, $2^n < l < 2^{n+1})$. Из «двоичного разбиения» чисел m и n іедует, что

$$M|\delta_5(m, n)|^2 \leqslant C \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} (pq)^2 \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^{2^q} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |R_{m,p,i}(\lambda)|^2 \times$$

$$\times |R_{n,q,j}(\mu)|^2 F(d\lambda, d\mu). \tag{18}$$

оложим $L_1(m, p) = \{\lambda : |\lambda| \leqslant 2^{-m}\}$, $L_2(m, p) = \{\lambda : 2^{-m} < |\lambda| \leqslant$ $2^{-(m-p)}\}$, $L_3(m, p) = \{\lambda : 2^{-(m-p)} < |\lambda|\}$;

$$\Delta(m, p, i; n, q, j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |R_{m,p,i}(\lambda)|^2 |R_{n,q,j}(\mu)|^2 F(d\lambda, d\mu).$$

сно, что

$$(m, p, i; n, q, j) = \sum_{1 \leqslant s,t \leqslant 3} \int_{L_s(m,p)} \int_{H_t(n,q)} |R_{m,p,i}(\lambda)|^2 |R_{n,q,j}(\mu)|^2 F(d\lambda, d\mu)$$

$H_1(n, q) \equiv H(n)$). Оценивая слагаемые в последней сумме по подэдящему неравенству (14) и суммируя по m и n, доказываем, что

$$\sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} M|\delta_5(m, n)|^2 < \infty.$$

з этого неравенства вытекает соотношение (17). Теорема доказана.

3. Пусть $r \geqslant 1$. Назовем случайное поле $\{\xi(k_1, \dots, k_r);\ k_1 \geqslant 0, \dots, k_r \geqslant 0\}$ однородным, если $M\xi(k_1, \dots, k_r) = 0$; $M\xi(k_1, \dots, k_r) \times \xi(k_1 + n_1, \dots, k_r + n_r) = \Phi_0(n_1, \dots, n_r)$. Положим $S(n_1, \dots, n_r) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k_j=0}^{n_j-1} \xi(k_1, \dots, k_r)$; $\Phi_1(n_1, \dots, n_r) = M[S(n_1, \dots, n_r)/(n_1 \dots n_r)]^2$.

звестно, что существует мера $F(\lambda_1, \dots \lambda_r)$, такая, что

$$\Phi_0(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i \sum_{j=1}^{r} k_j \lambda_j\right) F(d\lambda_1, \dots, d\lambda_r).$$

Теорема 4. Если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (\log\log 1/|\lambda_1|)^2 \dots (\log\log 1/|\lambda_r|)^2 F(d\lambda_1, \dots, d\lambda_r) < \infty,$$

)

$$\lim_{(n_1 \dots n_r) \to \infty} S(n_1, \dots, n_r)/(n_1 \dots n_r) = 0 \text{ п. н.} \tag{19}$$

Теорема 5. Соотношение (19) выполнено также, если сходится хотя бы один из рядов

$$\sum_{n_1 \geqslant 0, \dots, n_r \geqslant 0} |\Phi_0(n_1, \dots, n_r)| \, \alpha(n_1) \dots \alpha(n_r),$$

$$\sum_{n_1\geqslant 0,\dots,n_r\geqslant 0} \Phi_1(n_1, \dots, n_r)\,\alpha(n_1)\dots\alpha(n_r).$$

Теорема 5 вытекает из теоремы 4 так же, как теорема 3 из теоремы 2. Доказательство теоремы 4 проводится по плану доказательства теоремы 2.

Полученные условия улучшают результаты работы [4].

1. *Гапошкин В. Ф.* Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей.— Теория вероятностей и ее применения, 1977, **22**, № 2. 2. *Moricz F.* Multiparameter strong laws of large numbers. I (Second order moment restrictions).— Acta Sci. Math., 1978, **40**, 1—2. 3. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., 1965. 4. *Юринский В. В.* Об усиленном законе больших чисел для однородных случайных полей.— Математические заметки, 1974, **16**, № 1.

Поступила в редколлегию 24.04.80

O. I. Klesov

THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS

The strong law of large numbers for homogeneous random field is proved.

УДК 519.21

В. И. КОЛЧИНСКИЙ, асп.
Киевский университет

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В ФОРМЕ ШТРАССЕНА ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР

В работе [1] при некоторых энтропийных условиях на класс $\mathbf{F} \subseteq L_2(X, d\mu)$ установлена центральная предельная теорема (ЦПТ) для последовательности $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ эмпирических мер, построенной по последовательности $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ независимых случайных элементов со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathbf{B})$ и распределением μ. В данной работе, являющейся продолжением [1], при аналогичных условиях устанавливается закон повторного логарифма (ЗПЛ) в форме Штрассена для $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$. Будем придерживаться обозначений и определений [1].

Последовательность эмпирических мер $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ на $\mathbf{F}$, если существует компакт $\mathbf{K} \subseteq C_b(\mathbf{F})$ такой, что

$$P\{\|(2\ln\ln n)^{-1/2}Z_n - \mathbf{K}\|_\infty \to 0,\ n\to\infty\} = 1$$

и

$$P\{C(\{(2\ln\ln n)^{-1/2}Z_n\}_{n\geqslant 1}) = \mathbf{K}\} = 1.$$

Здесь

$$\|Y - \mathbf{K}\|_\infty = \inf_{Y'\in\mathbf{K}}\|Y - Y'\|_\infty,\quad Y \in D_0(\mathbf{F}),$$