$$\sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_r \geqslant 0} \Phi_1(n_1, \ldots, n_r)\, \alpha(n_1) \ldots \alpha(n_r).$$

Теорема 5 вытекает из теоремы 4 так же, как теорема 3 из теоремы 2. Доказательство теоремы 4 проводится по плану доказательства теоремы 2.

Полученные условия улучшают результаты работы [4].

1. *Гапошкин В. Ф.* Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей.— Теория вероятностей и ее применения, 1977, **22**, № 2. 2. *Moricz F.* Multiparameter strong laws of large numbers. I (Second order moment restrictions).— Acta Sci. Math., 1978, **40**, 1—2. 3. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., 1965. 4. *Юринский В. В.* Об усиленном законе больших чисел для однородных случайных полей.— Математические заметки, 1974, **16**, № 1.

Поступила в редколлегию 24.04.80

O. I. Klesov

THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS

The strong law of large numbers for homogeneous random field is proved.

УДК 519.21

В. И. КОЛЧИНСКИЙ, асп.
Киевский университет

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В ФОРМЕ ШТРАССЕНА ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР

В работе [1] при некоторых энтропийных условиях на класс $\mathbf{F} \subseteq L_2(X, d\mu)$ установлена центральная предельная теорема (ЦПТ) для последовательности $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ эмпирических мер, построенной по последовательности $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ независимых случайных элементов со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathbf{B})$ и распределением μ. В данной работе, являющейся продолжением [1], при аналогичных условиях устанавливается закон повторного логарифма (ЗПЛ) в форме Штрассена для $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$. Будем придерживаться обозначений и определений [1].

Последовательность эмпирических мер $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ на $\mathbf{F}$, если существует компакт $\mathbf{K} \subseteq C_b(\mathbf{F})$ такой, что

$$P\{\|(2\ln\ln n)^{-1/2} Z_n - \mathbf{K}\|_\infty \to 0,\ n \to \infty\} = 1$$

и

$$P\{C(\{(2\ln\ln n)^{-1/2} Z_n\}_{n\geqslant 1}) = \mathbf{K}\} = 1.$$

Здесь

$$\|Y - \mathbf{K}\|_\infty = \inf_{Y' \in \mathbf{K}} \|Y - Y'\|_\infty, \quad Y \in D_0(\mathbf{F}),$$

$\{Y_n\}_{n\geqslant 1})$ — множество предельных точек последовательности $_n\}_{n\geqslant 1}$ относительно $\|\cdot\|_\infty$.

Пусть $\mathbf{F}$ — равномерно ограниченный и вполне ограниченный в $(X, d\mu)$ класс функций. Если $\mathbf{F}$ — μ-эмпирически измерим (см. [1]), легко убедиться, что $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ на $\mathbf{F}$ тогда и лько тогда, когда для некоторого компакта $\mathbf{K}\subset C_b(\mathbf{F})$ и любого $\in \mathbf{G}(\mathbf{F})$ множество предельных точек последовательности $((2\ln\ln n)^{-1/2}Z_n)\}_{n\geqslant 1}$ совпадает с вероятностью 1 с компактом $(\mathbf{K})$, а сама эта последовательность с вероятностью 1 стремится $\Phi(\mathbf{K})$.

Если $\mathbf{F}$ — допустимый класс [1], то $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ гда и только тогда, когда

$$P\{\overline{\lim_n}\,(2\ln\ln n)^{-1/2}\,\|Z_n\|_\infty < +\infty\} = 1 \qquad (1)$$

$$P\{\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_n}\ \omega\ ((2\ \ln\ \ln\ n)^{-1/2}Z_n;\ \delta) = 0\} = 1. \qquad (2)$$

Доказательство близких утверждений встречалось во многих ботах, и мы на нем останавливаться не будем.

Если $\mathbf{F}$ — компакт в $L_2(X, d\mu)$, то $\mathbf{K}$ в ЗПЛ можно описать та- м образом. Пусть ν — вероятностная мера на борелевских под- ожествах $\mathbf{F}$, принимающая положительные значения на шарах из $\|\cdot\|_\nu$ — норма в пространстве $L_2(\mathbf{F}, d\nu)$, R_μ — корреляционный опе- гор гауссовского случайного элемента G_μ в пространстве $L_2(\mathbf{F}, d\nu)$ i. [1]). Тогда $\mathbf{K} = R_\mu^{1/2}\{Y : \|Y_\nu\| \leqslant 1\}$.

Теорема. Если $\mathbf{F}$ — допустимый класс,

$$\int_0 H^{1/2}(u)\,du < +\infty \qquad (3)$$

для некоторого $q > 1$ и любого $\sigma > 0$

$$P\{u\,|\ln u|^{1/2}\mathbf{H}^{(1)}(\sigma u;\ [u^{-2}]) \geqslant \text{o}\} = O(|\ln u|^{-q}),\quad u\to 0, \qquad (4)$$

$\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ и ЦПТ на $\mathbf{F}$*).

Доказательство. ЦПТ при условиях (3) и (4) следует из ультатов [1]. Согласно лемме 3 [1]

$$P\{\omega(Z_n;\ n^{-1/4}(\ln n)^{1/4}) \geqslant \varepsilon(2\ln\ln n)^{1/2}) = O(\ln^{-q} n),\quad n\to\infty. \qquad (5)$$

кажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых > 0

$$P\{\omega(Z_n;\ \delta) \geqslant \varepsilon\sqrt{2\ln\ln n}\} = O(\ln^{-q} n),\quad n\to\infty. \qquad (6)$$

---

*) Обозначения см. в работе [1].

Заметим, что

$$\omega(Z_n;\ \delta)\leqslant 2\sum_{j=r-1}^{m_n}\eta_j+2\omega(Z_n;\ n^{-1/4}(\ln n)^{1/4}),$$

где $\delta\in(2^{-r-1};\ 2^{-r}]$, $2^{-m_n}=Bn^{-1/4}(\ln n)^{1/4}$, $n\geqslant 1$, B — достаточно велико,

$$\eta_{r-1}=\max\{|Z_n(f)-Z_n(g)|:f,\ g\in\mathfrak{N}(2^{-r}),\quad \|f-g\|<3\cdot 2^{-r}\},$$

$$\eta_j=\max\{|Z_n(f)-Z_n(g)|:f\in\mathfrak{N}(2^{-j}),\quad g\in\mathfrak{N}(2^{-j-1}),$$

$$\|f-g\|<3\cdot 2^{-j-1}\},\qquad j\geqslant r,$$

$\mathfrak{N}(\delta)$ — минимальная δ-сеть для $\mathbf{F}$ относительно $\|\cdot\|$.

Учитывая (5), достаточно оценить

$$P\left\{\sum_{j=r-1}^{m_n}\eta_j\geqslant\varepsilon\sqrt{\ln\ln n}\right\},\qquad \varepsilon\in(0,\ 1).$$

При условиях теоремы легко построить монотонно убывающую функцию $N(\delta)$ такую, что

$$\ln N(\delta)\geqslant H(\delta),\quad \delta>0;\quad \int_0 (\ln N(u))^{1/2}du<+\infty;$$

$$N(2^{-k})\geqslant\gamma N(2^{-k+1}),\quad k\geqslant 1, \tag{7}$$

где $\gamma>1$.

Имеем

$$P\left\{\sum_{j=r-1}^{m_n}\eta_j\geqslant\varepsilon\sqrt{\ln\ln n}\right\}\leqslant\sum_{j=r-1}^{m_n}P\left\{\eta_j\geqslant\varepsilon\alpha_j\sqrt{\ln\ln n}\right\}, \tag{8}$$

где $\alpha_j=\dfrac{2^{-j-2}(\ln N(2^{-j-1}))^{1/2}}{\sum\limits_{j\geqslant r-1}2^{-j-2}(\ln N(2^{-j-1}))^{1/2}}$, $j\geqslant r-1$,

$$P\{\eta_j\geqslant\varepsilon\alpha_j(\ln\ln n)^{1/2}\}\leqslant$$

$$\leqslant N^2(2^{-j-1})\sup_{\|f-g\|<3\cdot 2^{-j-1}}P\{|Z_n(f)-Z_n(g)|\geqslant\varepsilon\alpha_j(\ln\ln n)^{1/2}\}.$$

Воспользовавшись неравенством Бернштейна [3, с. 358], при достаточно больших n и $r-1\leqslant j\leqslant m_n$ находим

$$P\{\eta_j\geqslant\varepsilon\alpha_j(\ln\ln n)^{1/2}\}\leqslant 2\exp\left\{-\beta\cdot 2^{2(j+2)}\alpha_j^2\ln\ln n\left[1-(\beta\ln\ln n)^{-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int_0^\delta(\ln N(u))^{1/2}du\right)^2\right]\right\}\leqslant 2\exp\left\{-0{,}5\beta\cdot 2^{2(j+2)}\alpha_j^2\ln\ln n\right\},$$

где $\beta>0$.

Таким образом, если $\int\limits_0^\delta (\ln N(u))^{1/2} du < 0{,}5\,\beta$, то при больших n, $r-1 \leqslant j \leqslant m_n$

$$P\{\eta_j \geqslant \varepsilon\alpha_j (\ln\ln n)^{1/2}\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\exp\{-\ln\ln n \cdot \ln N(2^{-j-1})\} = 2N^{-\ln\ln n}(2^{-j-1}).$$

Учитывая (7) и (8), получаем

$$P\left\{\sum_{j=r-1}^{m_n} \eta_j \geqslant \varepsilon (\ln\ln n)^{1/2}\right\} \leqslant 2 \sum_{j=r-1}^{m_n} N^{-\ln\ln n}(2^{-j-1}) \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{j\geqslant 0} \gamma^{-j} N^{-\ln\ln n}(2^{-r}) \leqslant CN^{-\ln\ln n}(\delta) = O(\ln^{-q} n), \quad n\to\infty,$$

если $\ln N(\delta) > q$. Тем самым (6) установлено.

Положим теперь $n_k = [(1+\tau)^k]$, $k \geqslant 1$, $\tau > 0$. В силу (6) при достаточно малых $\delta > 0$

$$\sum_{k\geqslant 1} P\{\omega((2\ln\ln n_k)^{-1/2} Z_{n_k};\ \delta) \geqslant \varepsilon\} < +\infty.$$

Учитывая лемму Бореля — Кантелли, получаем

$$P\{\lim_{\delta\downarrow 0} \overline{\lim_{k}}\, \omega((2\ln\ln n_k)^{-1/2} Z_{n_k};\ \delta) = 0\} = 1.$$

Таким образом, для того чтобы установить условие 2, достаточно показать, что

$$\lim_{\tau\downarrow 0} P\{\overline{\lim_{k}} \max_{n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}} \|(2\ln\ln n)^{-1/2} Z_n - (2\ln\ln n_k)^{-1/2} Z_{n_k}\|_\infty \geqslant \varepsilon\} = 0. \tag{9}$$

Обозначим $S_n(f) = \sqrt{n} Z_n(f)$, $f\in F$, $T_k = \max\limits_{n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}} \|S_n - S_{n_k}\|_\infty$.

Справедлива такая оценка:

$$\max_{n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}} \left\| \frac{Z_n}{\sqrt{2\ln\ln n}} - \frac{Z_{n_k}}{\sqrt{2\ln\ln n_k}} \right\|_\infty \leqslant \frac{T_k}{\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}}(1+\tau') +$$
$$+ \frac{\|S_{n_k}\|_\infty}{\sqrt{2n_k\ln\ln n_k}}\tau', \tag{10}$$

$\tau' > \tau$, k — достаточно велико.

Обычным образом устанавливается оценка

$$P\{T_k \geqslant a\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{P\{\|S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\|_\infty \geqslant a - \sqrt{2(n_{k+1}-n_k)b}\}}{1 - \max\limits_{n_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}} P\{\|S_n - S_{n_k}\|_\infty \geqslant \sqrt{2(n_{k+1}-n_k)b}\}}.$$

Далее,

$$\max_{n_k \leqslant n \leqslant n_{k+1}} P\{\| S_n - S_{n_k} \|_\infty \geqslant \sqrt{2(n_{k+1} - n_k)\, b}\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{n \geqslant 1} P\{\| Z_n \|_\infty \geqslant \sqrt{2b}\}.$$

Поскольку $\{\mu_n^*\}_{n \geqslant 1}$ удовлетворяет ЦПТ на $\mathbf{F}$, при больших $b > 0$

$$\sup_{n \geqslant 1} P\{\| Z_n \|_\infty \geqslant \sqrt{2b}\} \leqslant 0{,}5,$$

и, следовательно,

$$P\{T_k \geqslant a\} \leqslant 2P\{\| S_{n_{k+1}} - S_{n_k} \|_\infty \geqslant a - \sqrt{2b(n_{k+1} - n_k)}\}.$$

Значит, при больших k

$$P\{T_k \geqslant \varepsilon \sqrt{n_k \ln \ln n_k}\} \leqslant 2P\{\| S_{n_{k+1}} - S_{n_k} \|_\infty \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon \sqrt{n_k \ln \ln n_k} - \sqrt{2b(n_{k+1} - n_k)})\} \leqslant 2P\{\| S_{n_{k+1}} - S_{n_k} \|_\infty \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{n_k \ln \ln n_k}\} \leqslant 2P\{\| S_{n_{k+1}} - S_{n_k} \|_\infty \geqslant A \sqrt{(n_{k+1} - n_k) \ln \ln (n_{k+1} - n_k)}\}, \tag{11}$$

где $A > 0$, причем A можно сделать сколь угодно большим, выбирая достаточно малое $\tau > 0$.

Заметим теперь, что при больших $b > 0$

$$P\{\| S_n \|_\infty \geqslant b \sqrt{n \ln \ln n}\} = O(\ln^{-q} n), \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Действительно,

$$P\{\| S_n \|_\infty \geqslant b \sqrt{n \ln \ln n}\} = P\{\| Z_n \|_\infty \geqslant b \sqrt{\ln \ln n}\} \leqslant$$
$$\leqslant P\{\max_{f \in \mathfrak{R}(\delta)} | Z_n(f) | \geqslant 0{,}5b(\ln \ln n)^{1/2}\} + P\{\omega(Z_n; \delta) \geqslant 0{,}5b(\ln \ln n)^{1/2}\}$$

и в силу (6) достаточно оценить лишь первое слагаемое. Но

$$P\{\max_{f \in \mathfrak{R}(\delta)} | Z_n(f) | \geqslant 0{,}5b(\ln \ln n)^{1/2}\} \leqslant N(\delta) \max_{f \in \mathfrak{R}(\delta)} P\{| Z_n(f) | \geqslant$$
$$\geqslant 0{,}5b(\ln \ln n)^{1/2}\} = O(\ln^{-q} n), \quad n \to \infty,$$

если b достаточно велико, согласно неравенству Бернштейна. Таким образом, (12) установлено.

Далее,

$$P\{\| S_{n_{k+1}} - S_{n_k} \|_\infty \geqslant A((n_{k+1} - n_k) \ln \ln (n_{k+1} - n_k))^{1/2}\} =$$
$$= P\{\| S_{n_{k+1}} - S_{n_k} \|_\infty \geqslant A((n_{k+1} - n_k) \ln \ln (n_{k+1} - n_k))^{1/2}\} =$$
$$= O(\ln^{-q}(n_{k+1} - n_k)), \quad k \to \infty.$$

Используя (11), получаем

$$P\{T_k \geqslant \varepsilon (n_k \ln\ln n_k)^{1/2}\} = O(\ln^{-q}(n_{k+1} - n_k)), \quad k \to \infty.$$

Так как $q > 1$, $n_k = [(1+\tau)^k]$, $k \geqslant 1$, то

$$\sum_{k \geqslant 1} P\{T_k \geqslant \varepsilon (n_k \ln\ln n_k)^{1/2}\} < +\infty.$$

В силу леммы Бореля — Кантелли отсюда следует

$$P\{\overline{\lim_k}(n_k \ln\ln n_k)^{-1/2} T_k \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Если выполнено условие (1), то, учитывая (10), устанавливаем соотношение (9). Таким образом, нам достаточно проверить выполнение условия (1), и теорема будет доказана.

Аналогично тому, как было установлено соотношение (11), можно показать, что

$$P\{\max_{n \leqslant n_k} \| S_n \|_\infty \geqslant A (n_k \ln\ln n_k)^{1/2}\} \leqslant 2P\{\| S_{n_k} \|_\infty \geqslant$$
$$\geqslant \frac{A}{2}(n_k \ln\ln n_k)^{1/2}\}.$$

Отсюда при больших A, используя (12), получаем

$$P\{\max_{n \leqslant n_k} \| S_n \|_\infty \geqslant A (n_k \ln\ln n_k)^{1/2}\} = O(\ln^{-q} n_k), \quad k \to \infty.$$

Значит,

$$\sum_{k \geqslant 1} P\{\max_{n \leqslant n_k} \| S_n \|_\infty \geqslant A (n_k \ln\ln n_k)^{1/2}\} < +\infty.$$

Как и при доказательстве классического ЗПЛ, легко показать, что

$$P\{\overline{\lim_n}(\ln\ln n)^{-1/2} \| Z_n \|_\infty \geqslant A\} = 0,$$

если A — достаточно велико. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы.

Пусть $\mathbf{F} = \{\chi_A : A \in \mathfrak{B}\}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathbf{B}$.

Следствие 1. Если выполнено условие (3) и

$$P\{n^{-1/2}(\ln n)^{1/2}\mathbf{H}^{(\infty)}(n) \geqslant \sigma\} = O(\ln^{-q} n), \quad n \to \infty,$$

$q > 1$, то $\{\mu_n^*\}_{n \geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ и ЦПТ на $\mathbf{F}$*).

В частности, ЗПЛ и ЦПТ выполняются для классов Вапника — Червоненкиса (их определение см. в работе [2]).

---

*) Обозначения см. в работе [1].

Пусть F — любой равномерно ограниченный допустимый класс. Предположим, что для некоторой метрики ρ на F

$$|f(x)-g(x)|\leqslant L(x)\rho(f,g),\quad f,g\in \mathbf{F},\quad x\in X,$$

$L:X\to R^1$ — $\mathbf{B}$-измерима, $H_\rho(\varepsilon)$ — ε-энтропия $\mathbf{F}$ относительно ρ.

Следствие 2. Если выполнено условие (3), для некоторого $1>\mu>0$ $H_\rho(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-\mu})$, $\varepsilon\to 0$, и для некоторого $p>\frac{2\mu}{1-\mu}$ $ML^p(\xi_1)<+\infty$, то на $\mathbf{F}$ выполняется ЗПЛ и ЦПТ для $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$.

Следствие 3. Если выполнено условие (3), $H_\rho(\varepsilon)=o(\varepsilon^{-\mu})$, $\varepsilon\to 0$, для любого $\mu>0$ и для некоторого $p>2$ $MH_\rho^p\left(\frac{1}{L(\xi_1)}\right)<+\infty$, то на $\mathbf{F}$ выполняется ЦПТ и ЗПЛ для $\{\mu_n^*\}_{n\geqslant 1}$.

Из следствий 2 и 3 легко вывести ЗПЛ и ЦПТ в пространстве $C(S)$ непрерывных на компакте S функций при различных предположениях об ε-энтропии S.

Пусть теперь $X=C[0,1]$, $v(x)$, $x\in X$ — вариация функции x на отрезке $[0,1]$, $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов в $C[0,1]$ с нулевым средним, $\tau^2(s,t)=M[\xi_1(s)-\xi_1(t)]^2$, $s,t\in[0,1]$. Будем считать, что с вероятностью 1 $\|\xi_1\|_\infty\leqslant C<+\infty$.

Следствие 4. Если для некоторого $p>2$

$$M\ln_+^p v(\xi_1)<+\infty$$

и

$$\int_0 H_\tau^{1/2}(u)\,du<+\infty,$$

то $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ и ЦПТ в $C[0,1]$.

Следствие 5. Если

$$M|\xi_1(t)-\xi_1(s)|^\alpha\leqslant C|t-s|^{1+\beta},\quad t,\ s\in[0,1],$$

для некоторых C, α, $\beta>0$ и $\int_0 H_\tau^{1/2}(u)\,du<+\infty$, то $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет ЗПЛ и ЦПТ в $C[0,1]$.

Доказательство следствий 5 и 6 основано на применении теоремы к классу $\mathbf{F}=\{\delta_t:t\in[0,1]\}$. Оценки, необходимые для проверки условия (4), см. в работе [1].

1. *Колчинский В. И.* О центральной предельной теореме для эмпирических мер.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1981, вып. 24. 2. *Dudley R. M.* Central limit theorems for empirical measures.— Ann. Probab , 1978, **6**, 6. 3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., 1972.

Поступила в редколлегию 05.01.80.

V. I. Kolchinsky

ON THE STRASSEN'S LAW OF THE ITERATED LOGARITHM FOR EMPIRICAL MEASURES

The Strassen's law of the iterated logarithm for empirical measures on abstract measurable space is proved. Some versions ofthe Strassen's law in space C (S) are obtained as a corollaries.

УДК 519.21

В. С. КОРОЛЮК, акад. АН УССР, Ю. В. БОРОВСКИХ, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАНГОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ СПИРМЕНА

Пусть $Z_1=(X_1, Y_1)$, $Z_2=(X_2, Y_2), \ldots, Z_n=(X_n, Y_n)$ — двумерная независимая случайная выборка объема n из совокупности с непрерывной функцией распределения $H(x, y)$; $F(x)$ и $G(y)$ — непрерывные маргинальные функции распределения соответственно X_i и Y_i. Обозначим через R_i ранг X_i в выборке $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, а Q_i — ранг Y_i в выборке $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

Для проверки нулевой гипотезы независимости $H_0: H(x, y)= F(x) G(y)$ применяется критерий, основанный на ранговом коэффициенте корреляции Спирмена

$$\rho_n=\frac{12}{n^3-n} \sum_{i=1}^n\left(R_i-\frac{1}{2}(n+1)\right)\left(Q_i-\frac{1}{2}(n+1)\right). \tag{1}$$

Простой подсчет показывает, что при гипотезе H_0 $E\rho_n=0$, $E\rho_n^2= (n-1)^{-1}$.

Положим $\Delta_n=\sup\limits_x|P(\sqrt{n-1}\, \rho_n \leqslant x)-\Phi(x)|$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона. В соответствии с общей теоремой Гусковой [1] об оценке скорости сходимости для линейных ранговых статистик относительно величины Δ_n при гипотезе H_0 и $n \rightarrow \infty$ $\Delta_n=O(1 / \sqrt{n})$.

Нами установлен следующий факт.

Теорема. Если справедлива нулевая гипотеза H_0, то при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\Delta_n=O(\sqrt{\ln n} / n). \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим

$$s(u)=\begin{cases}-1, & \text{если } u<0, \\ 0, & \text{если } u=0, \\ 1, & \text{если } u>0.\end{cases}$$