*V. I. Kolchinsky*

ON THE STRASSEN'S LAW OF THE ITERATED LOGARITHM FOR EMPIRICAL MEASURES

The Strassen's law of the iterated logarithm for empirical measures on abstract measurable space is proved. Some versions ofthe Strassen's law in space C (S) are obtained as a corollaries.

УДК 519.21

*В. С. КОРОЛЮК, акад. АН УССР, Ю. В. БОРОВСКИХ, канд. физ.-мат. наук*
*Институт математики АН УССР*

## АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАНГОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ СПИРМЕНА

Пусть $Z_1 = (X_1, Y_1)$, $Z_2 = (X_2, Y_2), \ldots, Z_n = (X_n, Y_n)$ — двумерная независимая случайная выборка объема $n$ из совокупности с непрерывной функцией распределения $H(x, y)$; $F(x)$ и $G(y)$ — непрерывные маргинальные функции распределения соответственно $X_i$ и $Y_i$. Обозначим через $R_i$ ранг $X_i$ в выборке $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, а $Q_i$ — ранг $Y_i$ в выборке $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

Для проверки нулевой гипотезы независимости $H_0: H(x, y) = F(x)G(y)$ применяется критерий, основанный на ранговом коэффициенте корреляции Спирмена

$$\rho_n = \frac{12}{n^3 - n}\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \frac{1}{2}(n+1)\right)\left(Q_i - \frac{1}{2}(n+1)\right). \qquad (1)$$

Простой подсчет показывает, что при гипотезе $H_0$ $E\rho_n = 0$, $E\rho_n^2 = (n-1)^{-1}$.

Положим $\Delta_n = \sup\limits_x |P(\sqrt{n-1}\,\rho_n \leqslant x) - \Phi(x)|$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона. В соответствии с общей теоремой Гусковой [1] об оценке скорости сходимости для линейных ранговых статистик относительно величины $\Delta_n$ при гипотезе $H_0$ и $n \to \infty$ $\Delta_n = O(1/\sqrt{n})$.

Нами установлен следующий факт.

**Теорема.** Если справедлива нулевая гипотеза $H_0$, то при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\Delta_n = O(\sqrt{\ln n}/n). \qquad (2)$$

Доказательство. Обозначим

$$s(u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < 0, \\ 0, & \text{если } u = 0, \\ 1, & \text{если } u > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$R_i = 0{,}5 \sum_{j=1}^{n} s(x_i - x_j) + 0{,}5\,(n+1),$$

$$Q_i = 0{,}5 \sum_{k=1}^{n} s(Y_i - Y_k) + 0{,}5\,(n+1). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), находим

$$\rho_n = \frac{3}{n^3 - n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s(X_i - X_j)\, s(Y_i - Y_k). \tag{4}$$

Очевидно, выражение в правой части (4) можно записать как

$$\rho_n = \frac{n-2}{n+1}\,\mathrm{k}_n + \frac{3}{n+1}\,\tau_n, \tag{5}$$

где

$$\mathrm{k}_n = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} s(X_{i_1} - X_{i_2})\, s(Y_{i_1} - Y_{i_3}),$$

$$\tau_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i_1 \neq i_2} s(X_{i_1} - X_{i_2})\, s(Y_{i_1} - Y_{i_2}).$$

Таким образом, по (5) статистика Спирмена представляется в виде линейной комбинации двух $U$-статистик. Это обстоятельство и лежит в основе нашего метода доказательства (2). Поскольку $s(x) = -s(-x)$ при любом $x$, то ядро $s(x_i - x_j)\, s(y_i - y_j)$ симметрично. Поэтому

$$\tau_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \Phi(Z_{i_1}, Z_{i_2}),$$

где $\Phi(z_1, z_2) = s(x_1 - x_2)\, s(y_1 - y_2)$.

У статистики $\mathrm{k}_n$ ядро $3s(x_1 - x_2)\, s(y_1 - y_3)$ не обладает свойством симметрии. Это свойство можно получить при помощи формулы Гефдинга [2]

$$\mathrm{k}_n = \binom{n}{3}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \Phi(Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}),$$

где $\Phi(Z_1, Z_2, Z_3) = \frac{3}{3!} \sum s(X_{i_1} - X_{i_2})\, s(Y_{i_1} - Y_{i_3})$, причем суммирование происходит по всем перестановкам $(i_1\, i_2,\, i_3)$ из (1, 2, 3). В этом случае

$$2\Phi(Z_1, Z_2, Z_3) = s(X_1 - X_2)\, s(Y_1 - Y_3) + s(X_1 - X_3)\, s(Y_1 - Y_2) + s(X_2 - X_1)\, s(Y_2 - Y_3) + s(X_2 - X_3)\, s(Y_2 - Y_1) + s(X_3 - X_1)\, s(Y_3 - Y_2) + s(X_3 - X_2)\, s(Y_3 - Y_1). \tag{6}$$

Отметим, что при гипотезе $H_0$ можно считать без потери общности, что маргинальные функции распределения $F(x)$ и $G(y)$ являются равномерными на интервале $[0, 1]$.

Пусть $x = (\xi, \eta)$,

$$g(x) = \frac{n-2}{n+1} E\left(\Phi(Z_1, Z_2, Z_3) \middle| Z_1 = x\right) + \frac{3}{n+1} E\left(\Phi(Z_1, Z_2) \middle| Z_1 = x\right).$$

Пользуясь (6), нетрудно проверить, что при гипотезе $H_0\, g(x) = (2\xi - 1)(2\eta - 1)$. Обозначим

$$\hat{U} = \frac{3}{n} \sum_{j=1}^{n} g(Z_j),$$

$$\hat{\sigma}^2 = E\hat{U}^2 = \frac{9}{n} Eg^2(Z_1) = \frac{1}{n},$$

$$S = \hat{\sigma}^{-1} \hat{U},$$

$$\delta = \hat{\sigma}^{-1}(U - \hat{U}) = \sqrt{n} \binom{n}{3}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} Y_{i_1, i_2, i_3},$$

где $Y_{i_1, i_2, i_3} = Y(Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}) = \Phi(Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}) - g(Z_{i_1}) - g(Z_{i_2}) - g(Z_{i_3})$

Пусть

$$\hat{\tau}_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} (\Phi(Z_{i_1}, Z_{i_2}) - g(Z_{i_1}) - g(Z_{i_2})).$$

Величина $\hat{\tau}_n$ является вырожденной $U$-статистикой, дисперсия которой равна

$$E\hat{\tau}_n^2 = \frac{2}{n(n-1)} E(\Phi(Z_1, Z_2) - g(Z_1) - g(Z_2))^2. \tag{7}$$

В принятых обозначениях при помощи (7) и некоторых элементарных вычислений нетрудно показать, что

$$\Delta_n = \sup_x |P(S + \delta \leqslant x) - \Phi(x)| + O(1/n). \tag{8}$$

Далее, выберем $T = \varepsilon_1 \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$, где $\varepsilon_1 > 0$ — некоторое достаточно малое фиксированное число, и оценим первое слагаемое справа в (8) по известному неравенству Эссеена:

$$\sup_x |P(S + \delta \leqslant x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right| dt + O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right), \tag{9}$$

где $\varphi_n(t) = Ee^{it(S+\delta)}$ — характеристическая функция случайной величины $S+\delta$.

Рассмотрим подробно интеграл в (9). При больших $n$ выберем числа $K = n - 5[\ln n]$ и $l = [\ln n]$, где $[\ln n]$ — целая часть числа $\ln n$. Пусть

$$\delta_1 = \sqrt{n}\binom{n}{3}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant k} Y_{i_1, i_2, i_3}.$$

Пользуясь формулой Тейлора, напишем очевидное равенство

$$\varphi_n(t) = Ee^{itS + it\delta_1 + it(\delta - \delta_1)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(it)^j}{j!} E\left((\delta - \delta_1)^j e^{itS + jt\delta_1}\right) + \theta_1 \frac{|t|^l}{l!} E|\delta - \delta_1|^l, \qquad (10)$$

где $|\theta_1| \leqslant 1$.

Разность $(\delta - \delta_1)$, присутствующую в (10), удобно представить в виде

$$\delta - \delta_1 = \sqrt{n}\binom{n}{3}^{-1}(S_{1n} + S_{2n} + S_{3n}), \qquad (11)$$

где

$$S_{1n} = \sum_{i_3=k+1}^{n} \sum_{i_2=2}^{k} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} Y(Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}),$$

$$S_{2n} = \sum_{i_3=k+1}^{n} \sum_{i_2=k+1}^{i_3-1} \sum_{i_1=k+1}^{i_2-1} Y(Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}),$$

$$S_{3n} = \sum_{i_3=k+1}^{n} \sum_{i_2=k+1}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{k} Y(Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}).$$

Для любого $j \geqslant 1$ имеем очевидные оценки

$$E|S_{2n}|^j \leqslant (C_1(\ln n)^3)^j, \quad E|S_{3n}|^j \leqslant (C_2(\ln n)^2 n)^j, \qquad (12)$$

где $C_1$ и $C_2$ — абсолютные положительные постоянные.

Запишем

$$S_{1n} = \sum_{i_2=2}^{k} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} \Phi_{1n}(Z_{i_1}, Z_{i_2}),$$

где $\Phi_{1n}(Z_{i_1}, Z_{i_2}) = \sum_{i_3=k+1}^{n} Y(Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3})$.

Очевидно, $E(\Phi_{1n}(Z_1, Z_2) \mid Z_{k+1}, \ldots, Z_n) = 0$. Обозначим

$$g_{1n}(x) = E(\Phi_{1n}(Z_1, Z_2) \mid Z_1 = x, \quad Z_{k+1}, \ldots, Z_n),$$

$$Y_{1n}(Z_{i_1}, Z_{i_2}) = \Phi_{1n}(Z_{i_1}, Z_{i_2}) - g_{1n}(Z_{i_1}) - g_{1n}(Z_{i_2}).$$

Тогда

$$S_{1n} = U_{1n} + U_{2n},$$

где $U_{1n} = (k-1)\sum_{i_1=1}^{k} g_{1n}(Z_{i_1}),\ U_{2n} = \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k} Y_{1n}(Z_{i_1}, Z_{i_2}).$

Отсюда при $j \geqslant 1$

$$E|S_{1n}|^j \leqslant 2^j (E|U_{1n}|^j + E|U_{2n}|^j). \tag{13}$$

Для того чтобы оценить математические ожидания справа в (13), применим неравенство Бикела [3]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность случайных величин, обладающая мартингальным свойством $E(\xi_i | \xi_1, \dots, \xi_{i-1}) = 0,\ i = 1, 2, \dots, n$. Далее, пусть $w_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Определим $M_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} E(\xi_i^{2j}),\ j \geqslant 1$. Тогда для всех $j \leqslant n$

$$E(w_n^{2j}) \leqslant n^j M_n (4ej)^j. \tag{14}$$

По неравенству (14) получаем

$$E|U_{1n}|^j \leqslant \sqrt{E|U_{1n}|^{2j}} \leqslant (C_3 j^{1/2} (\ln n) n^{3/2})^j,$$

$$E|U_{2n}|^j \leqslant \sqrt{E|U_{2n}|^{2j}} \leqslant (C_4 j^{1/2} (\ln n) n)^j.$$

Это совместно с (13) позволяет утверждать, что при всех $j \leqslant k$

$$E|S_{1n}|^j \leqslant (C_5 j^{1/2} (\ln n) n^{3/2})^j, \tag{15}$$

где $C_5 > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

Следовательно, в силу (11), (12), (15) и произвольной малости $\varepsilon_1 > 0$ в области $|t| \leqslant \varepsilon_1 \frac{n}{\sqrt{\ln n}}$

$$\frac{|t|^l}{l!} E|\delta - \delta_1|^l = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{16}$$

Обратимся вновь к (10). Для математического ожидания пишем очевидную формулу

$$E((\delta-\delta_1)^j e^{itS+it\delta_1}) = \left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^l E((\delta-\delta_1)^j e^{it\hat{S}+it\delta_1}), \tag{17}$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины $g(Z_1)$, $\hat{S}$ — сумма независимых случайных величин, такая же как и $S$, но не содержащая в точности $l$ слагаемых.

Оценим $\varphi(t)$. По определению

$$\varphi(t) = \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta e^{it(2\xi-1)(2\eta-1)} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} d\xi \int_{-1}^{1} d\eta e^{it\xi\eta} =$$

$$= \frac{1}{4t}\int_{-1}^{1} d\xi \frac{1}{i\xi}\left(e^{it\xi} - e^{-it\xi}\right) = \frac{1}{2t}\int_{-1}^{1} d\xi \frac{\sin(\xi t)}{\xi} = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} d\xi \frac{\sin\xi}{\xi}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что при всех $|t| \geqslant 1$

$$|\varphi(t)| \leqslant C_6/|t|, \quad C_6 > 0. \quad (19)$$

Пусть $\alpha$ $(0 < \alpha < 1/4)$ — достаточно малое число. Учитывая (10)—(12), (15) — (17) и (19), в области $n^{0,5+\alpha} \leqslant |t| \leqslant \varepsilon_1 n/\sqrt{\ln n}$ получаем оценку

$$|\varphi_n(t)| = O(1/n^2). \quad (20)$$

Из (10) аналогичными рассуждениями находим в области $|t| \leqslant$ $\leqslant n^{0,5+\alpha}$

$$\varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^l E e^{it\hat{S}+it\delta} + |t|\, O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (21)$$

Далее, определим случайную величину $\delta_2$ так же, как и $\delta_1$, однако при $k = n - [\sqrt{n}]$. Тогда

$$E e^{it\hat{S}+it\delta} = E e^{it\hat{S}+it\delta_2+it(\delta-\delta_2)} = \sum_{j=0}^{l_0-1} \frac{(it)^j}{j!} E\left((\delta - \delta_2)^j e^{it\hat{S}+it\delta_2}\right) +$$

$$+ \theta_2 \frac{|t|^{l_0}}{l_0!} E|\delta - \delta_2|^{l_0}, \quad (22)$$

где $|\theta_2| \leqslant 1$. Выбирая в (22) $l_0 = [8/(1-4\alpha)] + 1$, в области $|t| \leqslant n^{1/2+\alpha}$ получаем

$$\frac{|t|^{l_0-1}}{l_0!} E|\delta - \delta_2|^{l_0} = O(1/n^2). \quad (23)$$

Отсюда

$$\varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]} E e^{it\tilde{S}+it\delta_2} + (it)\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]-3} \times$$

$$\times E\left((\delta - \delta_2)\, e^{it\tilde{S}_1+it\delta_2}\right) + \sum_{j=2}^{l_0-1} \frac{(it)^j}{j!}\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]-3j} \times$$

$$\times E\left((\delta - \delta_2)^j e^{it\tilde{S}_j+it\delta_2}\right) + |t|\, O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (24)$$

Поскольку выполнено условие (19), то $\sup\limits_{|t| \geqslant \varepsilon_2} |\varphi(t)| < 1$ для любого достаточно малого $\varepsilon_2 > 0$. Отсюда, учитывая (24), заключаем, что в области $\varepsilon_2\sqrt{n} \leqslant |t| \leqslant n^{0,5+\alpha}$

$$|\varphi_n(t)| = (1 + |t|)\, O(1/n^2). \quad (25)$$

При $|t| \leqslant \varepsilon_2$

$$|\varphi(t)| \leqslant e^{-\varepsilon_3 t^2} \quad (26)$$

с некоторым $\varepsilon_3 > 0$.

В интеграле в (9) сделаем замену по (24) и учтем все найденые оценки. Тогда

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_n(t)-e^{-t^2/2}}{t}\right|dt = I_1+I_2+I_3+O(1/n), \tag{27}$$

де

$$I_1=\int_{-\varepsilon_2\sqrt{n}}^{\varepsilon_2\sqrt{n}}\left|\frac{\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]}Ee^{it\tilde{S}+it\delta_2}-e^{-t^2/2}}{t}\right|dt,$$

$$I_2=\int_{-\varepsilon_2\sqrt{n}}^{\varepsilon_2\sqrt{n}}\left|\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]-3}E\left((\delta-\delta_2)\,e^{it\tilde{S}_1+it\delta_2}\right)\right|dt,$$

$$I_3=\sum_{j=2}^{l_0-1}\frac{1}{j!}\int_{-\varepsilon_2\sqrt{n}}^{\varepsilon_2\sqrt{n}}\left|t^{j-1}\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]-3j}E\left((\delta-\delta_2)^j e^{it\tilde{S}_j+it\delta_2}\right)\right|dt.$$

Іользуясь (26), нетрудно показать, что

$$I_2=O(1/n),\quad I_3=O(1/n). \tag{28}$$

Ιалее, рассмотрим подробно $I_1$. По формуле Тейлора

$$\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]}Ee^{it\tilde{S}+it\delta_2}=\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n}+(it)\left[\varphi\,\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\Big]^{[\sqrt{n}]}E\left(\delta_2 e^{it\tilde{S}}\right)+$$
$$+\frac{(it)^2}{2!}\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]}E\left(\delta_2 e^{it\tilde{S}}\right)+\frac{(it)^3}{3!}\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]}E\left(\delta_2^3 e^{it\tilde{S}}\right)+$$
$$+\theta_3|t|^4E\delta_2^4\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]}, \tag{29}$$

'де $|\theta_3|\leqslant 1$.

Поскольку

$$Eg^m(Z_1)=\int_0^1 d\xi\int_0^1 d\eta\,(2\xi-1)^m(2\eta-1)^m=0 \tag{30}$$

ıри любом нечетном $m\geqslant 1$, то понятно, что

$$\int_{-\varepsilon_2\sqrt{n}}^{\varepsilon_2\sqrt{n}}\left|\frac{\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n}-e^{-t^2/2}}{t}\right|dt=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим второе слагаемое справа в (29). По определению и ıз соображений независимости

$$\left[\varphi\,\frac{3t}{\sqrt{n}}\right]\Big]^{[\sqrt{n}]}E\left(\delta_2 e^{it\tilde{S}}\right)=\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n-3}\times$$

$$\times \sqrt{n}\binom{n}{3}^{-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k} E\left(Y_{i_1,i_2,i_3} e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(g(Z_{i_1})+g(Z_{i_2})+g(Z_{i_3}))}\right) =$$

$$=\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n-3}\sqrt{n}\,\frac{\binom{k}{3}}{\binom{n}{3}}\, E\left(Y_{1,2,3} e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(g(Z_1)+g(Z_2)+g(Z_3))}\right). \tag{31}$$

Далее,

$$E\left(Y_{1,2,3} e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(g(Z_1)+g(Z_2)+g(Z_3))}\right) = EY_{1,2,3} + \frac{it}{\sqrt{n}} E\left(Y_{1,2,3}\left(g(Z_1)+g(Z_2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+ g(Z_3)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^2 E\left(Y_{1,2,3}\left(g(Z_1)+g(Z_2)+g(Z_3)\right)^2\right) + \theta_4 \frac{|t|^3}{n^{3/2}}, \tag{32}$$

причем $|\theta_4| \leqslant 1$.

Заметим, что равенства

$$EY_{1,2,3} = 0,$$

$$E\left(Y_{1,2,3}\left(g(Z_1)+g(Z_2)+g(Z_3)\right)\right) = 0 \tag{33}$$

имеют место в силу свойства вырожденности $E(Y_{1,2,3} \mid Z_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Вычислим третье математическое ожидание справа в (32)

$$E\left(Y_{1,2,3}\left(g(Z_1)+g(Z_2)+g(Z_3)\right)^2\right) = E\left(Y_{1,2,3}g^2(Z_1)\right)+E\left(Y_{1,2,3}g^2(Z_2)\right)+$$

$$+ E\left(Y_{1,2,3}g^2(Z_3)\right) + 2E\left(Y_{1,2,3}g(Z_1)g(Z_2)\right) + 2E\left(Y_{1,2,3}g(Z_1)g(Z_3)\right) +$$

$$+ 2E\left(Y_{1,2,3}g(Z_2)g(Z_3)\right). \tag{34}$$

В силу свойства вырожденности функции $Y_{1,2,3}$ первые три слагаемых в (34) равны нулю. Далее,

$$E\left(Y_{1,2,3}g(Z_1)g(Z_2)\right)=E\left(\Phi(Z_1, Z_2, Z_3)g(Z_1)g(Z_2)\right)-E\left(g^2(Z_1)g(Z_2)\right)-$$

$$-E\left(g(Z_1)g^2(Z_2)\right)-E\left(g(Z_1)g(Z_2)g(Z_3)\right)=E\left(\Phi(Z_1, Z_2, Z_3)g(Z_1)g(Z_2)\right).$$

Сделаем замену по (6). Тогда

$$2E\left(\Phi(Z_1, Z_2, Z_3)g(Z_1)g(Z_2)\right) = E\left(s(X_1-X_2)s(Y_1-Y_3)g(Z_1)g(Z_2)\right)+$$

$$+E\left(s(X_1-X_3)s(Y_1-Y_2)g(Z_1)g(Z_2)\right)+E\left(s(X_2-X_1)s(Y_2-Y_3)\times\right.$$

$$\left.\times g(Z_1)g(Z_2)\right)+E\left(s(X_2+X_3)s(Y_2-Y_1)g(Z_1)g(Z_2)\right)+E\left(s(X_3-\right.$$

$$\left.-X_1)s(Y_3-Y_2)g(Z_1)g(Z_2)\right)+E\left(s(X_3-X_2)s(Y_3-Y_1)g(Z_1)g(Z_2)\right)=0,$$

поскольку каждое слагаемое справа при гипотезе $H_0$ равно нулю согласно (30).

Ввиду симметрии равенство нулю последних двух математических ожиданий справа в (34) доказывается аналогичными рассуждениями. Следовательно,

$$E\left(Y_{1,2,3}(g(Z_1)+g(Z_2)+g(Z_3))^2\right) = 0. \tag{35}$$

Таким образом, по (30) — (33) и (35)

$$\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[\sqrt{n}]} E\,(\delta_2 e^{it\tilde{S}}) = \theta_5 \frac{|t|^3}{n}\left[\varphi\left(\frac{3t}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n-3}, \qquad (36)$$

где $|\theta_5| \leqslant 1$.

Очевидно, что интеграл по области $|t| \leqslant \varepsilon_2 \sqrt{n}$ от выражения справа в (36) ведет себя как $O\,(1/n)$.

Не намного сложнее обстоит дело с доказательством того, что соответствующие интегралы от последних трех слагаемых справа в (29) имеют при больших $n$ порядок $O\,(1/n)$. Стало быть,

$$I_1 = O\,(1/n). \qquad (37)$$

Из (8)—(9), (27)—(28) и (37) вытекает (2). Теорема доказана.

В заключение отметим, что изложенным методом без особого труда доказывается также локальная предельная теорема для статистики Спирмена. По нашим интуитивным соображениям сомножитель $\sqrt{\ln n}$ в (2) излишен.

1. *Huskova M.* The rate of convergence of simple linear rank statistics under hypothesis and alternatives.— Ann. Statist., 1977, **5**, 4. 2. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution.— Ann. Math. Statist., 1948, **19**, 3. 3. *Biskel P. J.* Edgeworth expansions in nonparametric statistics.— Ann. Statist., 1974, **2**, 1.

Поступила в редколлегию 28.12.79

*V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskih*

APPROXIMATION OF THE DISTRIBUTION OF SPIRMEN'S RANK COEFFICIENT OF CORRELATION

In this paper the speed of convergence for Spirmen's statistics is investigated.

УДК 519.21

*А. Г. КУКУШ, мл. науч. сотр.*
*Киевский университет*

## ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ТЕРМИНАХ МЕТРИКИ ЛЕВИ—ПРОХОРОВА

Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство бесконечной размерности. Для вероятностных мер на борелевской $\sigma$-алгебре в $H$ вводится метрика Леви—Прохорова

$$L(\mu, \nu) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall F \in \mathfrak{F}\ \mu(F) \leqslant \nu(F_\varepsilon) + \varepsilon, \quad \nu(F) \leqslant \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon\}, \qquad (1)$$