Рассуждая так же, как и при доказательстве неравенства (7) в работе [5, с. 174], получаем (26). Неравенство (27) доказывается аналогично.

Теорема 7. Для мартингала $X=\{X_{kl},\ (k,l)\in N^2\}$ и $\lambda>0$ справедливы следующие неравенства:

$$M\{\sup_{(k,l)\in N^2}|X_{kl}|\}\leqslant C_1 M\{[X]^{1/2}(\ln^+[X]^{1/2})^4\}+D_1; \tag{28}$$

$$\lambda P\{\sup_{(k,l)\in N^2}|X_{kl}|>\lambda\}\geqslant C_2 M\{[X]^{1/2}(\ln^+[X]^{1/2})^3\}+D_{2l} \tag{29}$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 — некоторые постоянные, не зависящие от X.

Доказательство. Пусть $r_k(s)$, $r_l(t)$, $(k,l)\geqslant 1$ — последовательность функций Радемахера на $[0,1]$, т. е. $r_k(s)=\pm 1$, $r_k(s)$ независимы между собой относительно лебеговой меры на $[0,1]$ и $\int\limits_0^1 r_k(s)\,ds=0$. Тогда $X_{kl}=r_k(s)\,r_l(t)\circ(r_k(s)\,r_l(t)\circ X_{kl})$ $\left(\text{здесь } v_{kl}\circ X_{kl}=\sum\limits_{D_{kl}} v_{ij}\,\square\, X_{ij}\right)$. Используя неравенство (26), получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}C_{ij}r_i(s)\,r_j(t)\left(\ln^+\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}C_{ij}r_i(s)\,r_j(t)\right)^4 dsdt\leqslant\right.\right.$$

$$\leqslant A\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}C_{ij}^2\right)^{1/2}\left(\ln^+\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}C_{ij}^2\right)^{1/2}\right)^4+A,$$

отсюда, положив $C_{ij}=\square\, X_{i-1,j-1}$, получаем (28).

Аналогично доказывается (29).

1. *Cairoli R.*, *Walsh J. B.* Stochastic integrals in the plane.— Acta Math., 1975, 134. 2. *Гихман И. И.* Теория мартингалов и ее применение. Донецк, 1973. 3. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов, ч. 1. Вильнюс, 1975. 4. *Wong E.*, *Zakai M.* Weak martingales and stochastic integrals in the plane.— Ann. Probab., 1976, **4**, N 4. 5. *Mëtraux C.* Quelques inegalites pour martingales a parametre bidimensionnel.— Lectures Notes in Mathematics, 1978, **649**.

Поступила в редколлегию 10.09.80

УДК 519.21

О. И. КЛЕСОВ, мл. науч. сотр., Киевский университет

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ К УСИЛЕННОМУ ЗАКОНУ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть $\{X(m,n);\ m\geqslant 1,\ n\geqslant 1\}$ — двойная последовательность независимых случайных величин, распределенных по закону $F(x)$, $X_k=X(k,1)$, $S_m=S(m,1)$, где

$$S(m,n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}X(k,l).$$

Известно [1], что, если $MX_k=0$, $MX_k^2=1$, то $\sum_{m=1}^{\infty} P(|S_m|\geqslant m\varepsilon)<\infty$ для любого $\varepsilon>0$. Более того [2], при тех же условиях

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} P(|S_m|\geqslant m\varepsilon)=1.$$

Целью настоящей статьи является доказательство подобного соотношения для двойных сумм $S(m,n)$. Для $x>0$ положим $\ln^+ x = \max(1, \ln x)$.

Теорема. Пусть $MX(m,n)=0$, $MX^2(m,n)=1$ и

$$MX^2(m,n)\ln^+|X(m,n)|<\infty. \tag{1}$$

Имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \left\{\varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P(|S(m,n)|\geqslant mn\varepsilon)+2\ln\varepsilon\right\}=E-1+\ln 2, \tag{2}$$

где E — число Эйлера ($E=\lim\limits_{m\to\infty}(1+\ldots+1/m)-\lg m$) [5, с. 13]).

Замечание. Появление дополнительного по сравнению с теоремой Хейди условия (1) объясняется одним результатом Р. Смайза [3], согласно которому для сходимости ряда $\sum\limits_{m\geqslant 1}\sum\limits_{n\geqslant 1} P(|S(m,n)|\geqslant mn\varepsilon)$ необходимо и достаточно, чтобы $MX(m,n)=0$ и было выполнено условие (1).

Прежде всего докажем теорему для гауссовских случайных величин.

Лемма. Предположим, что $\{X(m,n);\ m\geqslant 1,\ n\geqslant 1\}$ — двойная последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин, т. е. $MX(m,n)=0$, $MX^2(m,n)=1$. Тогда выполнено равенство (2).

Доказательство леммы. Пусть $R(\varepsilon)=\sum\limits_{m\geqslant 1}\sum\limits_{n\geqslant 1} P(|S(m,n)|\geqslant mn\varepsilon)$, а τ_k — число решений уравнения $mn=k$ в целых положительных числах. В этих обозначениях $R(\varepsilon)=\sum\limits_{k\geqslant 1}\tau_k P(|\xi|\geqslant\varepsilon\sqrt{k})$, где ξ — стандартная гауссовская величина. Поэтому

$$R(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n+1}} e^{-x^2/2}dx\sum_{k=1}^{n}\tau_k.$$

Если положить $I_n(\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n+1}} e^{-x^2/2}dx$, то в силу асимптотического равенства (см., например, [4, с. 46]) $T_n\equiv\tau_1+\ldots+\tau_n=n\ln n+$

$+ (2E - 1)\,n + O(n^{1/3}\ln^2 n)$, при $\varepsilon \to 0+0$ имеем

$$R(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=3}^{\infty} \{n \ln n + (2E - 1)\,n + O(n^{1/3}\ln^2 n)\}\, I_n(\varepsilon) + o(\varepsilon^{2-}). \tag{3}$$

Дальнейшее доказательство леммы проведем в несколько шагов, рассматривая отдельно каждое слагаемое в фигурных скобках равенства (3).

Шаг 1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \left\{\varepsilon^2 \sum_{n=3}^{\infty} n \ln n I_n(\varepsilon) + 2\varepsilon^2 \ln\varepsilon \sum_{n=3}^{\infty} n I_n(\varepsilon)\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(2-E-\ln 2). \tag{4}$$

Действительно,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \left\{\varepsilon^2 \sum_{n=3}^{\infty} n \ln n I_n(\varepsilon) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon^2 \sum_{n=3}^{\infty} n I_n(\varepsilon)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n+1}} x^2 \ln x^2 e^{-x^2/2} dx = \int_0^{\infty} x^2 \ln x^2 e^{-x^2/2} dx = (\Gamma(3/2)\ln 2 +$$

$$+ \Gamma'(3/2))\sqrt{2} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}(E + \ln 2).$$

Последнее равенство вытекает из соотношений для логарифмической производной гамма-функции (см. [5, с. 48]). Если теперь для произвольного $\delta > 0$ выбрать $n_0 \geqslant 3$ таким, чтобы $n_0/(n_0 + 1) \geqslant 1 - \delta$, $\ln n_0/\ln(n_0 + 1) \geqslant 1 - \delta$, то

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \left\{\varepsilon^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n \ln n I_n(\varepsilon) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n I_n(\varepsilon)\right| \geqslant$$

$$\geqslant (1-\delta) \underline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \left\{\sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1)\ln(n+1)\, I_n(\varepsilon) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n I_n(\varepsilon) -\right.$$

$$\left. - \delta\varepsilon^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n I_n(\varepsilon)\right\}.$$

Понятно, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \varepsilon^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n I_n(\varepsilon) \leqslant \int_0^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = \Gamma(1/2)/\sqrt{2} \tag{5}$$

и

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \left\{\varepsilon^2 \sum_{n\geqslant n_0} (n+1)\ln(n+1)\, I_n(\varepsilon) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon^2 \sum_{n\geqslant n_0} n I_n(\varepsilon)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\infty} x^2 \ln x^2 e^{-x^2/2} dx. \tag{6}$$

В силу (5), (6) и произвольности $\delta > 0$ соотношение (4) доказано.

Шаг 2.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln\varepsilon-\varepsilon^2\ln\varepsilon\sum_{n=3}^{\infty}nI_n(\varepsilon)\right\}=0. \tag{7}$$

В самом деле,

$$|\ln\varepsilon|\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\varepsilon^2\sum_{n\geqslant 3}nI_n(\varepsilon)\right|\leqslant|\ln\varepsilon|\left|\int_0^{\varepsilon\sqrt{3}}x^2e^{-x^2/2}dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=3}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n+1}}(x^2-\varepsilon^2 n)\,e^{-x^2/2}dx\right|\to 0.$$

Шаг 3.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon^2\sum_{n=3}^{\infty}nI_n(\varepsilon)=\Gamma(1/2)/\sqrt{2}. \tag{8}$$

Пусть δ и n_0 такие же, как и в шаге 1, тогда

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon^2\sum_{n=n_0}^{\infty}nI_n(\varepsilon)\geqslant(1-\delta)\,\Gamma(3/2)\sqrt{2}.$$

Учитывая произвольность $\delta>0$ и неравенство (5), видим, что соотношение (8) доказано.

Шаг 4.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon^2\sum_{n=3}^{\infty}O(n^{1/3}\ln^2 n)\,I_n(\varepsilon)=0. \tag{9}$$

Очевидно, что найдется константа $c>0$, для которой $\varepsilon^2\sum_{n\geqslant 3}O(n^{1/3}\ln^2 n)\times$ $\times I_n(\varepsilon)\leqslant C\varepsilon^{2/3}$. Отсюда вытекает равенство (9).

Собирая вместе равенства (4), (7) — (9), доказываем лемму. Отметим, что, если $\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du$ и $X(m,n)$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины, то

$$P(|S(m,n)|\geqslant mn\varepsilon)=2\Phi(-\varepsilon(mn)^{1/2}).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|P(|S(m,n)|\geqslant\varepsilon mn)-2\Phi(-\varepsilon(mn)^{1/2})|=0. \tag{10}$$

Ясно, что соотношение (10) эквивалентно следующему:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\,|P(|S_k|\geqslant\varepsilon k)-2\Phi(-\varepsilon k^{1/2})|=0. \tag{11}$$

В свою очередь, равенство (11) вытекает из совокупности условий

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{[\varepsilon^{-2}n]} \tau_k \, | P(|S_k| \geqslant \varepsilon k) - 2\Phi(-\varepsilon k^{1/2}) | = 0 \tag{12}$$

для любого $n \geqslant 1$;

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \, \varepsilon^2 \sum_{k=[\varepsilon^{-2}n]+1}^{\infty} \tau_k P(|S_k| \geqslant \varepsilon k) = 0. \tag{13}$$

Чтобы доказать соотношение (12), определим для всех $k \geqslant 1$ случайные величины $\{Z_j, \ j \leqslant k\}$ следующим образом:

$$Z_j = \begin{cases} X_j, & \text{если } |X_j| \leqslant k^{1/2}, \\ 0, & \text{если } |X_j| > k^{1/2}. \end{cases}$$

Пусть $S_{k,k} = \sum_{j=1}^{k} Z_j$. Тогда в силу равенства

$$| P(|S_k| \geqslant \varepsilon k) - P(|S_{k,k}| \geqslant \varepsilon k) | \leqslant kP(|X_1| \geqslant k^{1/2})$$

соотношение (12) вытекает из совокупности условий

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{[\varepsilon^{-2}n]} k\tau_k P(|X_k| > k^{1/2}) = 0; \tag{14}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{[\varepsilon^{-2}n]} \tau_k \, | P(|S_{k,k}| \geqslant \varepsilon k) - 2\Phi(-\varepsilon k^{1/2}) | = 0 \tag{15}$$

для любого $n \geqslant 1$.

Вследствие леммы Кронекера условие (14) вытекает из условия

$$R_1 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k P(|X_k| > k^{1/2}) < \infty. \tag{16}$$

Для доказательства (16) заметим, что

$$R_1 = \sum_{j=1}^{\infty} P((j-1)^{1/2} < |X_1| \leqslant j^{1/2}) \sum_{k=1}^{j} \tau_k \leqslant C + C \sum_{j=3}^{\infty} j \ln j \times$$

$$\times P((j-1)^{1/2} < |X_1| \leqslant j^{1/2}) \leqslant C + CMX_1^2 \ln^+ |X_1| < \infty.$$

В этих неравенствах и в дальнейшем буква C обозначает все возможные несущественные для рассуждений константы. Итак, неравенство (16) доказано. Положим $\mu_k = \int_{|x| \leqslant k^{1/2}} x dF(x)$. Понятно, что

$$|P(|S_{k,k}|\geqslant \varepsilon k)-2\Phi(-\varepsilon k^{1/2})|\leqslant 2\sup_{x\in R^1}|P(S_{k,k}<xk^{1/2})-$$
$$\Phi(x-\mu_k k^{1/2})|+|\Phi(-\varepsilon k^{1/2}-\mu_k k^{1/2})-\Phi(-\varepsilon k^{1/2})|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{x\in R^1}\Big|P\Big(\sum_{j=1}^{k}(Z_j-\mu_k)<xk^{1/2}\Big)-\Phi(x)\Big|+(2\pi)^{-1/2}\times$$
$$\times\int\limits_{\varepsilon k^{1/2}}^{k^{1/2}(\varepsilon+|\mu_k|)} e^{-x^2/2}dx. \tag{17}$$

Вследствие неравенства Берри — Эссена [6, с. 140]

$$\sup_{x\in R^1}\Big|P\Big(\sum_{j=1}^{k}(Z_j-\mu_k)<xk^{1/2}\Big)-\Phi(x)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant Ck^{-1/2}\int\limits_{|x|\leqslant k^{1/2}}|x-\mu_k|^3\,dF(x)\leqslant Ck^{-1/2}\int\limits_{|x|\leqslant k^{1/2}}|x|^3\,dF(x)+$$
$$+Ck^{-1/2}|\mu_k|^3. \tag{18}$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k=0$, то из леммы Кронекера вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon^2\sum_{k=1}^{[\varepsilon^{-2}n]}|\mu_k|^3 k^{-1/2}=0 \tag{19}$$

для любого $n\geqslant 1$.

С другой стороны,

$$R_2\equiv\sum_{k=1}^{\infty}k^{-3/2}\tau_k\int\limits_{|x|\leqslant k^{1/2}}|x|^3\,dF(x)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{(j-1)^{1/2}<|x|\leqslant j^{1/2}}|x|^3\,dF(x)\sum_{k=j}^{\infty}k^{-3/2}\tau_k$$

и из преобразования Абеля выводим, что

$$R_2\leqslant C+\sum_{j=3}^{\infty}j^{-1}\ln j\int\limits_{(j-1)^{1/2}<|x|\leqslant j^{1/2}}|x|^3\,dF(x)\leqslant$$
$$\leqslant C+CMX_1^2\ln^+|X_1|<\infty.$$

Еще раз применяя лемму Кронекера, видим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon^2\sum_{k=1}^{[\varepsilon^{-2}n]}k^{-1/2}\tau_k\int\limits_{|x|\leqslant\sqrt{k}}|x|^3\,dF(x)=0 \tag{20}$$

для любого $n\geqslant 1$.

Заметим, наконец, что в силу $MX(m,n)=0$

$$\int_{\varepsilon k^{1/2}}^{k^{1/2}(\varepsilon+|\mu_k|)} e^{-x^2/2}dx \leqslant k^{1/2} \int_{|x|>k^{1/2}} |x|\,dF(x)$$

и поэтому, если

$$R_3 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k k^{-1/2} \int_{|x|>k^{1/2}} |x|\,dF(x) < \infty, \tag{21}$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{[\varepsilon^{-2}n]} \int_{\varepsilon k^{1/2}}^{k^{1/2}(\varepsilon+|\mu_k|)} e^{-x^2/2}dx = 0 \tag{22}$$

для любого $n \geqslant 1$.

Следовательно, если выполнено соотношение (21), то из (17) — (20) и (22) вытекает (15). Покажем, что имеет место (21). Действительно,

$$R_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{j^{1/2}<|x|\leqslant(j+1)^{1/2}} |x|\,dF(x) \sum_{k=1}^{j} k^{-1/2}\tau_k.$$

Так как при $j \geqslant 3$

$$\sum_{k=1}^{j} k^{-1/2}\tau_k = \sum_{k=1}^{j-1} T_k\left(k^{-1/2} - (k+1)^{-1/2}\right) + T_j/j^{1/2} \leqslant Cj^{1/2}\ln j,$$

то

$$R_3 \leqslant C + C\sum_{j=3}^{\infty} j^{1/2}\ln j \int_{j^{1/2}<|x|\leqslant(j+1)^{1/2}} |x|\,dF(x) \leqslant C +$$

$$+ CM|X_1|^2 \ln^+|X_1| < \infty.$$

Таким образом, соотношение (15) доказано. Осталось доказать равенство (13). Воспользуемся неравенством (47) работы [7]:

$$P(|S_k| \geqslant \varepsilon k) \leqslant kP(|X_1| \geqslant k\varepsilon/4) + 128(1+2e^4)\,k^{-2}\varepsilon^{-4},$$

согласно которому соотношение (13) вытекает из совокупности условий

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}}\, \varepsilon^{-2} \sum_{k>[\varepsilon^{-2}n]} k^{-2}\tau_k = 0; \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+0}} \sum_{k>[\varepsilon^{-2}n]} k\tau_k P(|X_1| \geqslant k\varepsilon) = 0. \tag{24}$$

Равенство (23) вытекает из неравенства

$$\sum_{k>[\varepsilon^{-2}n]} \tau_k k^{-2} \leqslant C\varepsilon^2 n^{-1/2},$$

справедливого в силу $\tau_k \leqslant Ck^{1/2}$. Чтобы доказать (24), заметим, что

$$R_4(\varepsilon) = \sum_{k>[\varepsilon^{-2}n]} k\tau_k P(|X_1| \geqslant k\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{j>[\varepsilon^{-2}n]} \int_{(j-1)\varepsilon<|x|\leqslant j\varepsilon} dF(x) \sum_{k=1}^{j} k\tau_k.$$

Еще раз воспользовавшись преобразованием Абеля, получаем

$$\sum_{k=1}^{j} k\tau_k \leqslant Cj^2 \ln^+ j$$

и поэтому

$$R_4(\varepsilon) \leqslant C \sum_{j>[\varepsilon^{-2}n]} \int_{(j-1)\varepsilon<|x|\leqslant j\varepsilon} x^2 \ln^+ x^2 dF(x) -$$

$$- C\varepsilon^2 \ln \varepsilon \sum_{j>[\varepsilon^{-2}n]} j^2 \int_{(j-1)\varepsilon<|x|\leqslant j\varepsilon} dF(x).$$

Итак, для доказательства соотношения (24) достаточно установить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln \varepsilon \int_{|x|\geqslant n/\varepsilon} x^2 dF(x) = 0$$

для любого $n \geqslant 1$. Но это действительно так из-за того, что $MX_1^2 \ln^+ |X_1| < \infty$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Несложно получить аналог теоремы и для случайных величин $X(m, n)$, имеющих отличный от 1 второй момент. Для этого нужно заменить ε на $\varepsilon/MX^2(m, n)$.

Аналогичный результат можно доказать и в том случае, когда размерность индекса равна некоторому числу $d > 2$. Кроме того, можно установить асимптотическое равенство, аналогичное (1), и для другой нормировки в усиленном законе больших чисел (для $d = 1$ см. [8]), а также для неодинаково распределенных независимых случайных величин (в случае $d = 1$ такой результат получен В. В. Петровым [9]).

1. *Hsu P. L., Robbins H.* Complete convergence and the law of large numbers.— Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1947, **33**, 2. 2. *Heyde C. C.* A suplement to the strong law of large numbers.— J. Appl. Probab., 1975, **12**, 1. 3. *Smythe R. T.* Strong laws of large numbers for r-dimensional arrays of random variables.— Ann. Probab., 1973, **1**, 1. 4. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М., 1972. 5. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа, т. 2. М., 1963. 6. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., 1972. 7. *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1971, **16**, 4. 8. *Chen R.* A remark on the tail probability of a distribution.— J. Multivariate Analysis, 1978, **8**, 2. 9. *Петров В. В.* Одна предельная теорема для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 85.

Поступила в редколлегию 24.11.80