Учитывая последнее неравенство, (5) легко получаем из (14). Неравенство (14) выполняется, в частности, если

$$\sup_{f\in F}\sup_{|u|\leqslant h}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_{L_2(D)}=O\left(\frac{h^{d/2}}{\ln^{\beta}\frac{1}{h}}\right),$$

$h\to 0$, где $\beta>1$.

Для класса $W_pH_\alpha(D)$ p раз дифференцируемых функций в области D с равномерно ограниченными производными до p-го порядка включительно и p-й производной, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем α, выполняется условие (4), в котором $d(R)$ — R-мерный поперечник класса в $L_2(D)$, если $p+\alpha>d/2$ (см. [3, 4]). Если $d=1$, то (4) выполняется для класса F дифференцируемых функций с $\sup\limits_{f\in F}\int\limits_D|f'(u)|^2du<+\infty$ (см. [3]).

В работах [3, 4] приведен ряд других примеров классов функций, конечномерные поперечники которых удовлетворяют условию (4).

1. *Dudley R. M.* Central limit theorems for empirial measures.— Ann. probab., 1978, **6**, 6, 2. *Колчинский В. И.* О центральной предельной теореме для эмпирических мер.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1981, вып. 24. 3. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений.— УМН, 1960, **15**, 3. 4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. М., 1976. 5. *Kuelbs J.* Kolmogorov's law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables.— Illinois journal of mathematics, 1977, **21**, 4. 6. *Колчинский В. И.* О законе повторного логарифма в форме Штрассена для эмпирических мер.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1981, вып. 25. 7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редколлегию 04.11.80

УДК 519.21

Б. Д. КОТЛЯР, канд. физ.-мат. наук, ВНИИмехчермет

О ЧИСЛЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК В СЛУЧАЙНОМ МНОЖЕСТВЕ

1. В работе [1] рассмотрена задача о числе точек с целочисленными координатами (целочисленных точек), попавших в случайный отрезок вещественной оси либо в случайный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. В обоих случаях вычислены математическое ожидание и дисперсия числа точек. В настоящей статье получены формулы для произвольных моментов этих и некоторых других случайных величин. Задача о дисперсии числа точек, попавших в прямоугольник, сторона которого случайно ориентирована относительно координатных осей, пока не решена; некоторые сведения об этой задаче приведены ниже (см. предложение 1). Для решения таких задач весьма эффективным представляется метод, подобный тому, каким была доказана известная теорема Блихфельдта о трансляции множества [2]

(см. также [3]). С помощью этого метода задача сводится к вычислению площадей или объемов конкретных множеств с последующим применением стандартного аппарата производящих функций.

2. Ниже (кроме одного случая, когда это будет специально оговорено) случайное бросание множества A суть семейство множеств $A+y$, если $A \subset R^n$ и $y \in R^n$ — случайный вектор, равномерно распределенный в единичном кубе. Статистические характеристики случайной величины X — количества целочисленных точек, попавших в случайное множество A, — не зависят от того, рассматривается само множество A или его трансляция $A+x_0$, где x_0 — фиксированный вектор. Следующее утверждение решает вопрос о моментах этой случайной величины в одномерном случае.

Теорема 1. Если f — функция целого неотрицательного аргумента, l — длина отрезка, случайно брошенного на R^1, $p = [l]$, $q = \{l\} \equiv l - [l]$, X — количество целочисленных точек, находящихся на отрезке, то r-й момент случайной величины $f(X)$

$$M_r = qf^r(p+1) + (1-q)f^r(p); \tag{1}$$

r-й центрированный момент

$$\overline{M}_r = (f(p+1) - f(p))^r q(1-q)((1-q)^{r-1} + (-1)^r q^{r-1}) \tag{2}$$

(здесь r — натуральное число; если $f \geqslant 0$, то в (1) r — произвольное вещественное положительное число).

При $f(x) \equiv x$ и $r = 2$ получаем результат, приведенный в работе [1]. Для доказательства теоремы 1 достаточно заметить, что ряд распределения случайной величины X имеет вид

$$p_n = \begin{cases} 1-q, & n = p, \\ q, & n = p+1, \\ 0 & n \neq p,\ p+1. \end{cases}$$

Следующий результат относится к случаю произвольного $n \geqslant 1$.

Теорема 2. Если параллелепипед с длинами сторон $l_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$ случайно брошен на R^n (стороны параллелепипеда параллельны координатным осям), $P_i = [l_i]$, $q_i = \{l_i\} \equiv l_i - [l_i]$, X — количество целочисленных точек, попавших в параллелепипед, то для математического ожидания и дисперсии случайной величины $\ln X$ справедливы формулы

$$M(\ln X) = \ln \prod_{i=1}^{n} (p_i + 1)^{q_i} p_i^{1-q_i}; \tag{3}$$

$$D(\ln X) = \sum_{i=1}^{n} q_i(1-q_i)\ln^2((p_i+1)/p_i). \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что X является произведением независимых случайных величин X_i, т. е. чисел целочисленных точек, покрытых отрезками длины l_i при случайном бросании на R^1. Применяя к случайной величине $\ln X = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ равенство (2) при $f(t) \equiv \ln t$ и $r = 2$, получаем (4); из (1) при $f(t) \equiv \ln t$, $r = 1$ следует (3).

Отметим еще одну предельную теорему.

Теорема 3. Если n-мерный куб с длиной стороны $l \notin N$, $p = [l]$, $q = \{l\}$ случайно брошен на R^n (стороны куба параллельны координатным осям), X — число покрытых кубом целочисленных точек, то при $n \to +\infty$ случайная величина

$$(\sqrt[n]{X}/(p+1)^q p^{1-q})^{\sqrt{nq(1-q)}/\ln((p+1)/p)}$$

асимптотически распределена по логарифмически нормальному закону.

Конечно, при $l \in N$ случайная величина X/l^n асимптотически стремится к вырожденному распределению на R^n. При случайном бросании параллелепипеда приходится наложить дополнительное условие на длины его сторон.

Теорема 4. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_j > 1$ — последовательность вещественных чисел $l_j \notin N$, $p_j = [l_j]$, $q_j = \{l_j\}$, и

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i (1 - q_i)/p_i^2 = +\infty. \tag{5}$$

Если n-мерный параллелепипед с длинами сторон $l_1, \ldots, l_n$ случайно брошен на R^n (стороны параллелепипеда параллельны координатным осям), X — число покрытых параллелепипедом целочисленных точек, то при $n \to +\infty$ случайная величина

$$\left(X/\prod_{i=1}^{n} (p_i + 1)^{q_i} p_i^{1-q_i}\right)^{\left(\sum_{i=1}^{n} q_i(1-q_i)\ln^2((p_i+1)/p_i)\right)^{-1/2}}$$

асимптотически распределена по логарифмически нормальному закону.

Доказательство теоремы 4 состоит в применении центральной предельной теоремы с условием Ляпунова к последовательности случайных величин $Z_i = \ln X_i/(p_i + 1)^{q_i} p_i^{1-q_i}$, где X_i — число целочисленных точек, покрытых случайным отрезком длины l_i. Ясно, что теорема 3 следует из теоремы 4.

3. Пусть $A \subset R^n$, A измеримо по Лебегу; разобьем R^n на кубы $Q_m = \{x \in R^n \mid m_k \leqslant x_k < m_k + 1\}$, $m_k \in Z$ (здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$). Семейство трансляций $\Pi_m : Q_m \to Q_0$, заданных формулами $\Pi_m(x) = x - m$, отображает в фиксированную точку куба Q_0 k $(k = 0, 1, \ldots, \infty)$ точек множества A. Пусть σ_k — подмножество множества Q_0, покрытое ровно k раз, $s_k = \operatorname{mes} \sigma_k$. Если множество A ограничено, то $\sigma_\infty = \varnothing$ и $Q_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \sigma_k$, $\sigma_k \cap \sigma_l = \varnothing$ при $k \neq l$.

Если $y \in \sigma_k$, то трансляция

$$\Pi_y : R^n \to R^n,$$

заданная формулой $\Pi_y(x) = x - y$, такова, что $\Pi_y(A)$ покрывает ровно k раз целочисленную решетку в R^n. Так как вектор y равномерно распределен на кубе Q_0, то случайная величина X, равная числу покрытых целочисленных точек при случайном бросании A, принимает значение k с вероятностью S_k. Тогда [4, гл. XI] дисперсия случайной величины X вычисляется по формуле

$$D(X) = P''(1) + P'(1) - P'^2(1). \tag{6}$$

4. Методика, приведенная в п. 3, позволяет решать задачи об определении моментов случайной величины X, если удается вычислить s_k. Пусть $Q = \{(x_1, x_2) \in R^2 | x_i \in [-1/2, 1/2), i = 1, 2\}$ — единичный квадрат, Φ^α — поворот R^2 на угол α вокруг начала системы координат. Если $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}$ и σ_k^α, s_k^α означают множества и вероятности, соответствующие множеству $\Phi^\alpha(Q)$, то $\sigma_k^\alpha = \varnothing$ при $k > 2$ и справедливы равенства

$$s_0^\alpha + s_1^\alpha + s_2^\alpha = 1; \quad s_1^\alpha + 2s_2^\alpha = 1. \tag{7}$$

Учитывая (7) и то, что σ_0^α является квадратом со стороной, равной $\cos\alpha + \sin\alpha - 1$, находим $s_0^\alpha = s_2^\alpha = 2(1 - \cos\alpha)\ (1 - \sin\alpha)$ $s_1^\alpha = 1 - 4(1 - \cos\alpha)(1 - \sin\alpha)$. Теперь из (6) легко получаем

$$D(\Phi^\alpha(Q)) = P''(1) = 4(1 - \cos\alpha)(1 - \sin\alpha).$$

Если угол α равномерно распределен в промежутке $[0, 2\pi)$, то вероятности s_k того, что будут покрыты ровно k точек $(k = 0, 1, \ldots)$, имеют вид

$$s_0 = s_2 = 2 - 6/\pi; \quad s_1 = (12/\pi) - 3; \quad s_k = 0 \text{ при } k > 2. \tag{8}$$

Ясно, что для $r > 0$

$$M_r = \sum_{k=0}^{\infty} k^r s_k = 1 + (2^{r-1} - 1)(4 - 12/\pi).$$

Из (6) и (8) вытекает, что $D = 4 - 12/\pi$.

В следующем предложении под «случайным бросанием» квадрата Q на R^2 будем понимать семейство $\Phi^\alpha(Q) + y$, где y — случайный вектор, равномерно распределенный в единичном квадрате $Q_0 \subset R^2$, α — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi)$.

Предложение 1. Если Q — квадрат площади 1, то при случайном бросании его на R^2 r- й момент $r > 0$) числа покрытых целочисленных точек определяется по формуле

$$M_r = 1 + (2^{r-1} - 1)(4 - 12/\pi),$$

а дисперсия равна

$$D = 4 - 12/\pi \simeq 0{,}180282.$$

Аналогично, при бросании единичного круга U на R^2

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1; \quad s_1 + 2s_2 = 1; \quad s_k = 0 \text{ для } k > 2. \tag{9}$$

Проводя описанное выше «преобразование Блихфельдта», строим множества σ_0, σ_1, σ_2. Элементарный подсчет дает

$$s_2 = (4/\pi)\arccos(\sqrt{\pi}/2) - \sqrt{(4/\pi) - 1}. \tag{10}$$

Используя (6), (9) и (10), получаем такое утверждение

Предложение 2. Если U — круг площади 1, то при случайном бросании его на R^2 r-й момент ($r > 0$) числа X покрытых целочисленных точек определяется по формуле

$$M_r = 1 + (2^{r-1} - 1)((8/\pi)\arccos(\sqrt{\pi}/2) - 2\sqrt{(4/\pi) - 1});$$

$$D = (8/\pi)\arccos(\sqrt{\pi}/2) - 2\sqrt{(4/\pi) - 1} \simeq 0{,}181090.$$

Отметим, что предложения 1 и 2 дают подход к решению задачи о распознавании образов на прямоугольном растре [5].

В теореме 2 изучалось распределение случайной величины $\ln X$ при произвольном $n \geqslant 1$. В следующей теореме дается полное решение аналогичной задачи для случайной величины X при $n = 2$.

Теорема 5. Если прямоугольник со сторонами, длины которых равны l_i, $p_i = [l_i]$, $q_i = \{l_j\}$, $i = 1,2$, случайно брошен на R^2 (стороны прямоугольника параллельны координатным осям), то производящая функция числа X покрытых целочисленных точек такова:

$$P(t) = t^{p_1 p_2}((1 - q_1)(1 - q_2) + (1 - q_1) q_2 t^{p_1} + q_1(1 - q_2) t^{p_2} + q_1 q_2 t^{p_1 p_2 + 1}). \tag{11}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $S = \{(x_1, x_2) \in R^2 \times \times \mid x_i \in [0, l_i),\ i = 1, 2\}$. Прямые $x_i = m_i$, $m_i \in Z$, $i = 1, 2$, разбивают этот прямоугольник (при $q_i > 0$, $i = 1, 2$) на $(p_1 + 1)(p_2 + 1)$ множеств; после сдвигов Π_m (см. п. 3) прямоугольник $S_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \times \times \mid x_i \in [0, q_i),\ i = 1, 2\}$ покроется $(p_1 + 1)(p_2 + 1)$ раз. Аналогично, множества с мерами $q_1(1 - q_2)$, $(1 - q_1) q_2$, $(1 - q_1)(1 - q_2)$ покроются соответственно $p_2(p_1 + 1)$, $p_1(p_2 + 1)$, $p_1 p_2$ раз. Точек с иными кратностями покрытия на Q_0 не будет, а потому выполняется равенство (11).

Отметим, что используя (6) и (11), легко вычислить значение дисперсии X [1, гл. 5].

1. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М., 1972. 2. *Blichfeldt H. F.* A new principle in the geometry of numbers with some applications.— Trans. Amer. Math. Soc., 1914, 15 3. *Касселс Дж.* Введение в геометрию чисел. М., 1965. 4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М., 1967. 5. *Котляр Б. Д.* О распознавании образов на прямоугольном растре.— В кн.: Прочность и надежность конструкций. Киев, 1978.

Поступила в редколлегию 06.02.79

УДК 519.21

А. А. КУРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОДНОРОДНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПОЛЯМ

Предлагаемые здесь условия сингулярности мер, соответствующих однородным случайным полям, основаны на предельных теоремах бакстеровского типа. Результаты работы были приведены без доказательства в тезисах [1].

Пусть $\xi(\bar{t})$, $\bar{t}\in[0,1]^m$ — однородное случайное поле с нулевым средним и корреляционной функцией $B(\bar{t}-\bar{s})=M\xi(\bar{t})\,\xi(\bar{s})$. Приращением порядка $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_m)(p_k$ — целое неотрицательное число, $k=\overline{1,m})$ случайного поля $\xi(\bar{t})$ на m-мерном кубе $[\bar{t}-\bar{h},\bar{t}]$, $\bar{t},\bar{h}\in R^m$, $\bar{h}=(h,\ldots,h)$ назовем случайную величину

$$\Delta_{\bar{h}}^{\bar{p}}\xi(\bar{t})=\Pi_{j=1}^{m}\Delta_{j,h\cdot 2^{1-p_j}}\prod_{l=1}^{p_j-1}\Delta_{j,h\cdot 2^{-l}}\xi(\bar{t}).$$

Здесь $\Delta_{j,h}$ — разностный оператор, $\Delta_{j,h}\xi(\bar{t})=\xi(t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_m)-\xi(t_1,\ldots,t_j-h,\ldots,t_m)$, $\Pi_{l=1}^{0}\Delta_{j,h\cdot 2^{-l}}=I$ — единичный оператор, при $p_j=0$ j-й сомножитель в $\prod\limits_{j=1}^{m}$ является единичным оператором.

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$U_N^{\bar{p}}(\xi)=k_N^{-m}\left[\Delta_{\bar{h}_N}^{\bar{p}}\Delta_{-\bar{h}_N}^{\bar{p}}B(\bar{0})\right]^{-1}\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{k_N}\left(\Delta_{\bar{h}_N}^{\bar{p}}\xi(\bar{k}h_N)\right)^2, \tag{1}$$

где $\bar{k}=(k_1,\ldots,k_m)$. Последовательность $\{h_N,\ N\geqslant 1\}$ такова, что $h_N\leqslant\frac{1}{2}$, $h_N\downarrow 0$ при $N\to\infty$, $\forall\delta>0$

$$\sum\nolimits_{N=1}^{\infty}h_N^{\delta}<\infty,\quad k_N=[h_N^{-1}]. \tag{2}$$

Положим $q_4(\bar{t}^{(1)},\bar{t}^{(2)},\bar{t}^{(3)},\bar{t}^{(4)})=M\xi(\bar{t}^{(1)})\,\xi(\bar{t}^{(2)})\,\xi(\bar{t}^{(3)})\,\xi(\bar{t}^{(4)})-M\xi(\bar{t}^{(1)})\times\xi(\bar{t}^{(2)})M\xi(\bar{t}^{(3)})\,\xi(\bar{t}^{(4)})$, $\bar{t}^{(i)}\in[0,1]^m$, $i=1,2,3,4$.