1. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М., 1972. 2. *Blichfeldt H. F.* A new principle in the geometry of numbers with some applications.— Trans. Amer. Math. Soc., 1914, 15 3. *Касселс Дж.* Введение в геометрию чисел. М., 1965. 4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М., 1967. 5. *Котляр Б. Д.* О распознавании образов на прямоугольном растре.— В кн.: Прочность и надежность конструкций. Киев, 1978.

Поступила в редколлегию 06.02.79

УДК 519.21

А. А. КУРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОДНОРОДНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПОЛЯМ

Предлагаемые здесь условия сингулярности мер, соответствующих однородным случайным полям, основаны на предельных теоремах бакстеровского типа. Результаты работы были приведены без доказательства в тезисах [1].

Пусть $\xi(\bar{t})$, $\bar{t}\in[0, 1]^m$ — однородное случайное поле с нулевым средним и корреляционной функцией $B(\bar{t}-\bar{s}) = M\xi(\bar{t})\,\xi(\bar{s})$. Приращением порядка $\vec{p}=(p_1, \ldots, p_m)$($p_k$ — целое неотрицательное число, $k=\overline{1, m}$) случайного поля $\xi(\bar{t})$ на m-мерном кубе $[\bar{t}-\bar{h}, \bar{t}]$, $\bar{t}, \bar{h}\in R^m$, $\bar{h}=(h, \ldots, h)$ назовем случайную величину

$$\Delta_{\bar{h}}^{\bar{p}}\xi(\bar{t}) = \Pi_{j=1}^{m}\Delta_{j,h\cdot 2^{1-p_j}}\prod_{l=1}^{p_j-1}\Delta_{j,h\cdot 2^{-l}}\xi(\bar{t}).$$

Здесь $\Delta_{j,h}$ — разностный оператор, $\Delta_{j,h}\xi(\bar{t}) = \xi(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_m) - \xi(t_1, \ldots, t_j-h, \ldots, t_m)$, $\Pi_{l=1}^{0}\Delta_{j,h\cdot 2^{-l}} = I$ — единичный оператор, при $p_j=0$ j-й сомножитель в $\prod_{j=1}^{m}$ является единичным оператором.

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$U_N^{\bar{p}}(\xi) = k_N^{-m}\left[\Delta_{\bar{h}_N}^{\bar{p}}\Delta_{-\bar{h}_N}^{\bar{p}}B(\bar{0})\right]^{-1}\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{k_N}\left(\Delta_{\bar{h}_N}^{\bar{p}}\xi(\bar{k}h_N)\right)^2, \qquad (1)$$

где $\bar{k}=(k_1, \ldots, k_m)$. Последовательность $\{h_N, N\geqslant 1\}$ такова, что $h_N\leqslant\frac{1}{2}$, $h_N\downarrow 0$ при $N\to\infty$, $\forall\delta>0$

$$\sum_{N=1}^{\infty}h_N^{\delta}<\infty,\ k_N=[h_N^{-1}]. \qquad (2)$$

Положим $q_4(\bar{t}^{(1)}, \bar{t}^{(2)}, \bar{t}^{(3)}, \bar{t}^{(4)}) = M\xi(\bar{t}^{(1)})\,\xi(\bar{t}^{(2)})\,\xi(\bar{t}^{(3)})\,\xi(\bar{t}^{(4)}) - M\xi(\bar{t}^{(1)})\times\xi(\bar{t}^{(2)})\,M\xi(\bar{t}^{(3)})\,\xi(\bar{t}^{(4)})$, $\bar{t}^{(i)}\in[0, 1]^m$, $i=1, 2, 3, 4$.

В работе [2] приведены некоторые достаточные условия, при которых последовательность случайных функционалов типа (1) от векторных случайных полей стремится к единице почти наверное. Сформулируем теорему [2] для однородного случайного поля $\xi(\bar{t})$.

Теорема 1. Пусть $\xi(\bar{t})$, $\bar{t} \in [0, 1]^m$—однородное случайное поле с корреляционной функцией $B(t)$ и выполнены такие условия:

а) $|\Delta_h^{\bar{p},\bar{p},\bar{p},\bar{p}} q_4(\bar{t}, \bar{t}, \bar{s}, \bar{s})| \leqslant Lh^\beta \prod_{i=1}^m (|t_i - s_i| - h)^{-\gamma_i} \ \forall \bar{t}, \bar{s} \in [0, 1]^m$: $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |t_i - s_i| \geqslant 2h$;

б) $\Delta_h^{\bar{p}} \Delta_{-h}^{\bar{p}} B(\bar{0}) \geqslant Ch^\alpha$;

в) $\gamma_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, ровно k чисел из набора $\{\gamma_i, \ i = \overline{1, m}\}$ меньше 1 и

$$\frac{1}{2} \sum\nolimits_{i=1, \gamma_i \geqslant 1}^m \gamma_i + \alpha < \frac{\beta}{2} + \frac{m-k}{2};$$

г) $|\Delta_h^{\bar{p},\bar{p},\bar{p},\bar{p}} q_4(\bar{t}, \bar{t}, \bar{s}, \bar{s})| [\Delta_h^{\bar{p}} \Delta_{-h}^{\bar{p}} B(\bar{0})]^{-2} \leqslant Kh^{-\sigma}$, $\sigma < 1 \ \forall \bar{t}, \bar{s} \in [0, 1]^m$: $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |t_i - s_i| < 2h$; последовательность $\{h_N, \ N \geqslant 1\}$ удовлетворяет условию (2).

Тогда $U_N^{\bar{p}}(\xi) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 1$ почти наверное.

Далее будем предполагать, что $\xi(\bar{t})$, $\eta(\bar{t})$, $\bar{t} \in [0, 1]^m$ — вещественные однородные случайные поля с нулевыми средними, корреляционными функциями $B_1(\bar{t})$ и $B_2(\bar{t})$, спектральными функциями $F_1(\bar{\lambda})$, $F_2(\bar{\lambda})$ соответственно.

Предположение А. При некотором $\bar{p}$

$$U_N^{\bar{p}}(\xi) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 1, \quad U_N^{\bar{p}}(\eta) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

почти наверное для любой последовательности $\{h_N, \ N \geqslant 1\}$, удовлетворяющей условию (2). Для удобства положим

$$L(h) = \Delta_h^{\bar{p}} \Delta_{-h}^{\bar{p}} B_1(\bar{0}) \ [\Delta_{\bar{h}}^{\bar{p}} \Delta_{-\bar{h}}^{\bar{p}} B_2(\bar{0})]^{-1}.$$

Теорема 2. Пусть $\xi(\bar{t})$, $\eta(\bar{t})$, $t \in [0, 1]^m$ — однородные случайные поля и для них выполнено предположение А.

Тогда при нарушении условия

$$L(h) \to 1 \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{3}$$

меры μ_1 и μ_2, соответствующие этим случайным полям в пространстве траекторий, ортогональны.

Доказательство. Пусть X — пространство функций, которому почти наверное принадлежат реализации однородных случайных полей $\xi(\bar{t})$ и $\eta(\bar{t})$. Если нарушено условие (3), то найдется последовательность $\{h_n,\ n \geqslant 1\}$, $h_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что $L(h_n) \nrightarrow 1$ при $n \to \infty$.

В таком случае это отношение имеет хотя бы одну предельную точку, отличную от 1. Выделим соответствующую подпоследовательность так, чтобы $L(h_{n_l}) \underset{l \to \infty}{\to} c \neq 1$ (быть может, $c = \infty$). Не ограничивая общности, можно полагать $l = n_l$, причем для последовательности $\{h_l,\ l \geqslant 1\}$ выполнено условие (2).

На пространстве X введем функционал

$$\Phi_l(x) = k_l^{-m} L(h_l)\,[\Delta_h^{\bar p}\,\Delta_{-h_l}^{\bar p} B_1(\bar 0)]^{-1} \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{k_l} [\Delta_{h_l}^{\bar p} x(\bar k h_l)]^2.$$

Тогда почти наверное

$$\lim_{l\to\infty} \Phi_l(\eta) = 1, \quad \lim_{l\to\infty} \Phi_l(\xi) = c.$$

Итак, меры μ_1 и μ_2 имеют непересекающиеся носители A_1 и A_2 вида $A_1 = \{x \in X : \Phi_l(x) \underset{l\to\infty}{\to} c\}$, $A_2 = \{x \in X : \Phi_l(x) \underset{l\to\infty}{\to} 1\}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Обозначим $b(\bar t) = B_1(\bar t) - B_2(\bar t)$. При $\Delta_h^{\bar p}\Delta_{-h}^{\bar p} B_2(\bar 0) \neq 0$ (3) эквивалентно соотношению $\Delta_h^{\bar p}\Delta_{-h}^{\bar p} b(\bar 0) = o(\Delta_h^{\bar p}\Delta_{-h}^{\bar p} B_2(\bar 0))$ при $h \to 0$.

Теорема 2 для $p_1 = p_2 = \ldots = p_m$ сформулирована в статье [3].

Ниже будут приведены спектральные условия сингулярности мер, основанные на нарушении предположения (3).

Лемма 1. Пусть $\{a_{\bar k},\ \bar k \in Q\}$, $\{b_{\bar k},\ \bar k \in Q\}$, $\{c_{\bar k},\ \bar k \in Q\}$ — наборы неотрицательных чисел, $b_{\bar k} \neq 0$, $\sum_{k \in Q} c_{\bar k} b_{\bar k} \neq 0$; $Q \subset Z^m$, Z — множество целых чисел, Q — конечное множество. Тогда:

а) если $a_{\bar k}/b_{\bar k} \geqslant d$, то $\left[\sum_{\bar k \in Q} c_{\bar k} a_{\bar k}\right]\left[\sum_{\bar k \in Q} c_{\bar k} b_{\bar k}\right]^{-1} \geqslant d$;

б) если $a_{\bar k}/b_{\bar k} \leqslant d$, то $\left[\sum_{\bar k \in Q} c_{\bar k} a_{\bar k}\right]\left[\sum_{\bar k \in Q} c_{\bar k} b_{\bar k}\right]^{-1} \leqslant d$, d — неотрицательное число.

Лемма 2. Пусть $\bar p = (p_1, \ldots, p_m)$, $|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$. Тогда

$$\Delta_h^{\bar p}\Delta_{-h}^{\bar p} B_k(\bar 0) = 2^{2|\bar p|} \int_{R^m} \prod_{j=1}^m \sin^2(\lambda_j h \cdot 2^{-p_j}) \times$$

$$\times \prod_{l=2}^{p_j} \sin^2(\lambda_j h \cdot 2^{-l})\, F_k(d\bar\lambda), \quad k = 1, 2. \tag{4}$$

Здесь при $p_j = 0$ j = й сомножитель во внешнем произведении равен 1. Если $p_j = 1$, то внутреннее произведение обращается в 1.

Для доказательства достаточно использовать спектральное представление и определение приращения $\bar p$-го порядка;

Теорема 3 Пусть $\xi(\bar t)$, $\eta(\bar t)$, $\bar t \in [0, 1]^m$ — вещественные однородные случайные поля и для них выполнено предположение А. Пусть, далее, $\exists h_0 > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall h \in (0, h_0)$, $\forall \bar{\lambda} \in R^m$ $\Delta_h^{\bar{1}} F_2(\bar{\lambda}) > 0$ и

$$[\Delta_h^{\bar{1}} F_1(\bar{\lambda})][\Delta_h^{\bar{1}} F_2(\bar{\lambda})]^{-1} \geqslant 1 + \delta \tag{5}$$

или же

$$[\Delta_h^{\bar{1}} F_1(\bar{\lambda})][\Delta_h^{\bar{1}} F_2(\bar{\lambda})]^{-1} \leqslant 1 - \delta, \tag{6}$$

где $\bar{1} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m})$. При этих условиях $\mu_1 \perp \mu_2$.

Доказательство. Убедимся, что $L(h) \not\to 1$ при $h \to 0$. Тогда в силу теоремы 2 меры μ_1 и μ_2 сингулярны. Положим

$$\prod_{j=1}^{m} \sin^2(\lambda_j h \cdot 2^{-p_j}) \prod_{l=2}^{p_j} \sin^2(\lambda_j h \cdot 2^{-l}) = \Phi(\bar{\lambda} h).$$

Из (4) получаем

$$L(h) = \left[\int_{R^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_1(d\bar{\lambda})\right]\left[\int_{R^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_2(d\bar{\lambda})\right]^{-1}.$$

Пусть $h \in (0, h_0)$ фиксировано, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Lambda = \Lambda(h, \varepsilon)$

$$\left| \int_{R^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_1(d\bar{\lambda}) \left[\int_{R^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_2(d\bar{\lambda})\right]^{-1} - \right.$$

$$\left. - \int_{[-\Lambda,\Lambda]^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_1(d\bar{\lambda}) \left[\int_{[-\Lambda,\Lambda]^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_2(d\bar{\lambda})\right]^{-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Функция $\Phi(\bar{\lambda} h)$ непрерывна на $[-\Lambda, \Lambda]^m$ и поэтому $\int_{[-\Lambda,\Lambda]^m} \Phi(\bar{\lambda} h) \times$ $\times F_k(d\bar{\lambda})$, $k = 1, 2$ можно рассматривать как интеграл Стилтьеса—Гюнтера [4, с. 281], определяемый по образцу классического интеграла Римана. Следовательно, $\exists n = n(\Lambda, h, \varepsilon, h_0) \in N : 1/n < h_0$ (N— множество натуральных чисел) и

$$\left| \int_{[-\Lambda,\Lambda]^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_1(d\bar{\lambda}) \left[\int_{[\Lambda,\Lambda]^m} \Phi(\bar{\lambda} h) F_2(d\bar{\lambda})\right]^{-1} - \right.$$

$$- \sum_{k_1=-n+1}^{n} \cdots \sum_{k_m=-n+1}^{n} \Phi(\Lambda \bar{k} h/n) \Delta_{n^{-1}}^{\bar{1}} F_1(\bar{k}\Lambda/n) \times$$

$$\left. \times \left[\sum_{k_1=-n+1}^{n} \cdots \sum_{k_m=-n+1}^{n} \Phi(\Lambda \bar{k} h/n) \Delta_{n^{-1}}^{\bar{1}} F_2(\bar{k}\Lambda/n)\right]^{-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Для определенности предположим, что выполнено условие (5). Спектральные функции $F_1(\bar{\lambda})$, $F_2(\bar{\lambda})$ обладают характеристическими свойствами m-мерной функции распределения, умноженной на положительную постоянную, так что $\Delta_{n^{-1}}^{\bar{1}} F_k(\bar{\lambda}) \geqslant 0$, $k = 1, 2$. Кроме того,

$\Delta^{\bar 1}_{n-1} F_2(\bar\lambda) > 0$. Положим

$$a_{\bar k} = \Delta^{\bar 1}_{h-1} F_1(\bar k\Lambda/n),\ b_{\bar k} = \Delta^{\bar 1}_{n-1} F_2(\bar k\Lambda/n),\ c_{\bar k} = \Phi(\bar k\Lambda h/n),$$

$$k_i = -n+1, \ldots, n,\ i=\overline{1,m}$$

и применив лемму 1, получим

$$\sum_{k_i=-n+1, i=\overline{1,m}}^{n} \Phi(\bar k\Lambda h/n)\, \Delta^{\bar 1}_{n-1} F_1(\bar k\Lambda/n) \times$$

$$\times \left[\sum_{k_i=-n+1, i=\overline{1,m}}^{n} \Phi(\bar k\Lambda h/n)\, \Delta^{\bar 1}_{n-1} F_2(\bar k\Lambda/n) \right]^{-1} \geqslant 1+\delta.$$

В силу неравенств (7) и (8) $L(h) \geqslant 1+\delta-\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $L(h) \geqslant 1+\delta$. Это неравенство выполняется для произвольного $h \in (0, h_0)$ и, следовательно, $L(h) \not\to 1$ при $h \to 0$.

Случай, когда выполнено неравенство (6), рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 2. Если существуют непрерывные спектральные плотности $f_k(\bar\lambda) = \dfrac{F_k(d\bar\lambda)}{d\bar\lambda}$, $k=1, 2$, то условия (5) и (6) можно заменить такими: $\forall\bar\lambda \in R^m$ $f_2(\bar\lambda) > 0$ и $f_1(\bar\lambda) \mid f_2(\bar\lambda) \geqslant 1+\delta$ или же $f_1(\bar\lambda) \mid f_2(\bar\lambda) \leqslant 1-\delta$.

В работе [5] получены условия ортогональности мер, соответствующих стационарным гауссовским случайным процессам, в терминах спектральных функций, близкие к предположениям (5) и (6) теоремы 3. Основанием результата в работе [5] тоже служит нарушение условия (3).

В следующей теореме требуется, чтобы условия (5) и (6) выполнялись лишь для больших $\|\bar\lambda\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2}$.

Теорема 4. Пусть $\xi(\bar t)$, $\eta(\bar t)$, $\bar t \in [0, 1]^m$ — вещественные однородные случайные поля, выполнено предположение A и $h^{2|\bar p|} = o(\Delta_h^{\bar p}\Delta_{-h}^{\bar p} B_2(\bar 0))$ при $h \to 0$. Пусть, далее, $\exists h_0, \delta, \Lambda > 0 : \forall h \in (0, h_0)$, $\forall \bar\lambda : \|\bar\lambda\| > \Lambda$ $\Delta_h^{\bar 1} F_2(\bar\lambda) > 0$ и

$$\Delta_h^{\bar 1} F_1(\bar\lambda)\, [\Delta_h^{\bar 1} F_2(\bar\lambda)]^{-1} \geqslant 1+\delta \tag{9}$$

или же

$$\Delta_h^{\bar 1} F_1(\bar\lambda)\, [\Delta_h^{\bar 1} F_2(\bar\lambda)]^{-1} \leqslant 1-\delta. \tag{10}$$

Тогда меры μ_1 и μ_2 ортогональны.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, докажем, что $L(h) \not\to 1$ при $h \to 0$. Доказательство проведем методом от противного: предположим, что $L(h)\to 1$ при $h\to 0$. Из (4) получаем

$$L(h)=\left[\left(\int\limits_{[-\Lambda,\Lambda]^m}+\int\limits_{R^m\setminus[-\Lambda,\Lambda]^m}\right)\Phi(\bar\lambda h)\,F_1(d\bar\lambda)\right]\times$$

$$\times\left[\left(\int\limits_{[-\Lambda,\Lambda]^m}+\int\limits_{R^m\setminus[-\Lambda,\Lambda]^m}\right)\Phi(\bar\lambda h)\,F_2(d\bar\lambda)\right]^{-1}.$$

Так как

$$\sin^2(\lambda_j h\cdot 2^{-e})\leqslant\lambda_j^2h^2\cdot 4^{-e}\leqslant\Lambda^2h^2\cdot 4^{-e}\ \text{при}\ |\lambda_j|\leqslant\Lambda$$

$e=\overline{1,p_j}$, $j=\overline{1,m}$, то

$$\int\limits_{[-\Lambda,\Lambda]^m}\Phi(\bar\lambda h)\,F_k(d\bar\lambda)\leqslant c_k h^{2|\bar p|},\qquad(11)$$

где $c_k=(\Lambda^{2|\bar p|}/4^{\sum_{j=1}^m(2+3+\ldots+p_j+p_j)}\int\limits_{[-\Lambda,\Lambda]^m}F_k(d\bar\lambda)$, $k=1,2$. Из условия $h^{2|\bar p|}=o\,(\Delta_h^{\bar p}\Delta_{-h}^{\bar p}B_2(\bar 0))$ при $h\to 0$ и (11) следует, что

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{[-\Lambda,\Lambda]^m}\Phi(\bar\lambda h)\,F_k(d\bar\lambda)\left[\int\limits_{R^m}\Phi(\bar\lambda h)\,F_2(d\bar\lambda)\right]^{-1}=0,\qquad k=1,2.$$

Так что

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{R^m\setminus[-\Lambda,\Lambda]^m}\Phi(\bar\lambda h)\,F_1(d\bar\lambda)\left[\int\limits_{R^m\setminus[-\Lambda,\Lambda]^m}\Phi(\bar\lambda h)\,F_2(d\bar\lambda)\right]^{-1}=1.\quad(12)$$

Далее действуем аналогично доказательству предыдущей теоремы. Пусть $h\in(0,h_0)$ фиксировано, $\exists l=l(h,\Lambda,\varepsilon)\in N$

$$\left|\int\limits_{R^m\setminus[-\Lambda,\Lambda]^m}\Phi(\bar\lambda h)\,F_1(d\bar\lambda)\left(\int\limits_{R^m\setminus[-\Lambda,\Lambda]^m}\Phi(\bar\lambda h)\,F_2(d\bar\lambda)\right)^{-1}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_B\Phi(\bar\lambda h)\,F_1(d\bar\lambda)\left(\int\limits_B\Phi(\bar\lambda h)\,F_2(d\bar\lambda)\right)^{-1}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad(13)$$

где $B=[-l\Lambda,l\Lambda]^m\setminus[-\Lambda,\Lambda]^m$. $\exists n=n(h,l,\Lambda)\in N:n^{-1}<h_0$ и

$$\left|\int\limits_B\Phi(\bar\lambda h)\,F_1(d\bar\lambda)\left(\int\limits_B\Phi(\bar\lambda h)\,F_2(d\bar\lambda)\right)^{-1}-\sum_{\bar k\in A}\Phi(\bar k\Lambda h/n)\times\right.$$

$$\left.\times\Delta_{n-1}^{\bar 1}F_1(\bar k\Lambda/n)\left(\sum_{\bar k\in A}\Phi(\bar k\Lambda h/n)\,\Delta_{n-1}^{\bar 1}F_2(\bar k\Lambda/n)\right)^{-1}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad(14)$$

где $A=\{-ln+1,\ldots,ln\}^m\setminus\{-n+1,\ldots,n\}^m$.

Суммирование распространяется на кубики, не входящие в $[-\Lambda, \Lambda]^m$ и потому для отношения $\Delta_{n-1}^{\bar{1}} F_1(\bar{k}/n)[\Delta_{n-1}^{\bar{1}} F_2(\bar{k}/n)]^{-1}$ выполнено одно из условий (9), (10).

Для определенности предположим, что выполнено условие (9). Тогда в силу леммы 1

$$\sum_{\bar{k}\in A} \Phi(\bar{k}h/n)\, \Delta_{n-1}^{\bar{1}} F_1(\bar{k}/n) \left[\sum_{\bar{k}\in A} \Phi(\bar{k}h/n)\, \Delta_{n-1}^{\bar{1}} F_2(\bar{k}/n)\right]^{-1} \geqslant 1 + \delta.$$

Но из (13), (14) следует, что

$$\int\limits_{R^m \setminus [-\Lambda,\Lambda]^m} \Phi(\bar{\lambda}h)\, F_1(d\bar{\lambda}) \left(\int\limits_{R^m \setminus [-\Lambda,\Lambda]^m} \Phi(\bar{\lambda}h)\, F_2(d\bar{\lambda})\right)^{-1} \geqslant 1 + \delta - \varepsilon, \tag{15}$$

ε — произвольное положительное и поэтому (15) противоречит (12). Источник противоречия — предположение $L(h) \to 1$ при $h \to 0$. Следовательно, $L(h) \not\to 1$ при $h \to 0$ и согласно теореме 2 μ_1 и μ_2 ортогональны.

Замечание 3. Если существуют непрерывные спектральные плотности $f_k(\bar{\lambda}) = F_k(d\bar{\lambda}) \mid d\bar{\lambda}$, $k = 1, 2$, то условия (9), (10) в теореме 4 могут быть заменены следующими: $\exists \Lambda, \delta > 0 : \forall \bar{\lambda} : \|\bar{\lambda}\| > \Lambda\ f(\bar{\lambda}) > 0$ и $f_1(\bar{\lambda}) \mid f_2(\bar{\lambda}) \geqslant 1 + \delta$ или же $f_1(\bar{\lambda}) \mid f_2(\bar{\lambda}) \leqslant 1 - \delta$.

1. *Курченко А. А*. Некоторые спектральные условия ортогональности мер, отвечающих однородным случайным полям.— Тезисы докладов II Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, 1977, т. 2. 2. *Курченко А. А*. Одна предельная теорема для векторнозначных случайных полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1979, вып. 21. 3. *Курченко А. А*. Об условиях сингулярности мер, порожденных случайными полями.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 8. 4. *Вулих Б. З*. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., 1965. 5. *Рыжов Ю. М*. Спектральные условия ортогональности гауссовских мер, отвечающих стационарным процессам.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1972, вып. 7.

Поступила в редколлегию 17.11.80

УДК 519.21

Е. А. ЛЕБЕДЕВ, мл. науч. сотр. Киевский университет

О СХОДИМОСТИ К ВИНЕРОВСКОМУ ПРОЦЕССУ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКОМУ

Ветвящийся процесс с дискретным временем $Z(m)$, $m = \overline{0, \infty}$ определим рекуррентно. Пусть $\Xi = \{\xi_i^m;\ m,\ i = \overline{1, \infty}\}$ — семейство целочисленных, неотрицательных, независимых в совокупности случайных величин, распределение которых не зависит от m и i. Тогда

$$Z(0) = 1; \qquad Z(m) = \sum_{i=1}^{Z(m-1)} \xi_i^m; \qquad m \geqslant 1. \tag{1}$$