1. *Нагаев С. В., Мухамедханова Р.* Переходные явления в ветвящихся случайных процессах с дискретным временем.— В сб.: Предельные теоремы и математическая статистика. Ташкент, 1966. 2. *Лебедев Е. А.* Уточнение одной предельной теоремы для ветвящихся процессов.— ДАН АН УССР. Сер. А, 1979, № 5. 3. *Lamperty J.* Limiting distributions for branching processes.— Proceeding Fifth Berkelly Symposium Mathematical Statistics and Probability, 1967. 4. *Lindvall T.* Convergence of critical Galton-Watson branching processes.— J. Appl. Probab., 1972, 9, N 2. 5. *Севастьянов Б. А.* Переходные явления в ветвящихся случайных процессах.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 2. 6. *Чистяков В. П.* Переходные явления в ветвящихся процессах с n типами частиц.— Теория вероятностей и ее применения, 1961, 6, № 1. 7. *Шуренков В. М.* Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. II.— Математический сборник, 1980, 112 (154), № 2 (6). 8. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 3. 9. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редколлегию 01.10.80

УДК 519.21/519.24

И. МАДРЕИМОВ, асп., Киевский университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК, ПРИ ЦЕНЗУРИРОВАНИИ ВЫБОРКИ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка, состоящая из n независимых значений генеральной совокупности F с функцией распределения $F(u)$. Рассмотрим вариационный ряд

$$x_n^{(1)} \leqslant x_n^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_n^{(n)}, \tag{1}$$

соответствующий выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Составим из порядковых статистик $x_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ случайный интервал $l = (x_n^{(i)}, x_n^{(j)})$, где $i<j$.

Вероятность $p(x \in l) = p(x \in (x_n^{(i)}, x_n^{(j)}))$, где x — не зависящий от выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элемент генеральной совокупности F будем называть надежностью, а математическое ожидание $m(|l|) = m(x_n^{(j)} - x_n^{(i)})$ — точностью случайного интервала $l = (x_n^{(i)}, x_n^{(j)})$.

Если из вариационного ряда (1) выброшен с обеих сторон $k-1$ элемент, то оставшаяся часть $x_n^{(k)} \leqslant x_n^{(k+1)} \leqslant \ldots \leqslant x_n^{(n-k+1)}$ будет цензурированным вариационным рядом.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N$ — две выборки из одной и той же генеральной совокупности, $N > n$. Проведем цензурирование вариационного ряда, соответствующего второй выборке, так, чтобы

$$p(x \in (x_n^{(1)}, x_n^{(n)})) = p(\tilde{x} \in (\tilde{x}_N^{(k)}, x_N^{(N-k+1)})).$$

Будет ли при этом увеличиваться точность доверительного интервала $(\tilde{x}_N^{(k)}, \tilde{x}_N^{(N-k+1)})$ по сравнению с точностью интервала $(x_n^{(1)}, x_n^{(n)})$? Другими словами, необходимо исследовать неравенство $m(\tilde{x}_N^{(N-k+1)} - \tilde{x}_N^{(k)}) \leqslant$ $\leqslant m(x_n^{(n)} - x_n^{(1)})$.

Рассмотрим решение этой проблемы в некоторых важных частных случаях. Пусть распределение $F(u)$ генеральной совокупности F является равномерным на отрезке $[0, 1]$.

Заметим, что для любой функции распределения $F(u)$ генеральной совокупности F выполняется равенство

$$p(x \in (x_n^{(i)}, x_n^{(j)})) = \frac{j-i}{n+1} . \quad (2)$$

Для равномерного распределения $m(x_n^{(k)}) = k/(n+1)$ [1, с. 41]. Поэтому

$$m(x_n^{(n)} - x_n^{(1)}) = \frac{n-1}{n+1} = p(x \in (x_n^{(1)}, x_n^{(n)})) = p(\tilde{x} \in (\tilde{x}_N^{(k)}, \tilde{x}_N^{(N-k+1)})) =$$

$$= \frac{N-2k+1}{N+1} = m(\tilde{x}_N^{(N-k+1)} - \tilde{x}_N^{(k)}).$$

Итак, в случае равномерного распределения на отрезке [0,1] при одинаковой надежности точность интервала, составленного из цензурированной выборки большого объема, остается неизменной.

Лемма. Пусть $y_m = x_m$ — случайная величина, где x — равномерно распределенная случайная величина на интервале $[0, 1]$ и $m = 1, 2, \ldots$. Если

$$p(y_m \in (y_{mn}^{(1)}, y_{mn}^{(n)})) = p(\tilde{y}_m \in \tilde{y}_{mN}^{(k)}, \tilde{y}_{mN}^{(N-k+1)})),$$

то справедливо неравенство

$$m(\tilde{y}_{mN}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{mN}^{(k)}) < m(y_{mn}^{(n)} - y_{mn}^{(1)}),$$

где $y_{mn}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\tilde{y}_{mN}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ $(N > n)$ — порядковые статистики, соответствующие выборкам $y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{mn}$ и $\tilde{y}_{m1}$, $\tilde{y}_{m2}, \ldots, \tilde{y}_{mN}$.

Доказательство. Пусть ξ — случайная величина с плотностью распределения $f_\xi(u)$ и $\eta = g(\xi)$, тогда математическое ожидание случайной величины η вычисляется по формуле (см. [2, с. 26])

$$m(\eta) = m[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f_\xi(u)\, du. \quad (3)$$

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка объема n, $\xi_n^{(1)} \leqslant \xi_n^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_n^{(n)}$ — вариационный ряд, составленный из этой выборки и $\eta = g(\xi)$, где $g(u)$ — возрастающая функция, то, используя формулу (3), можно утверждать, что

$$m(\eta_n^{(k)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u) f_\xi(u)\, du. \tag{4}$$

Здесь $\eta_n^{(k)} = g(\xi_n^{(k)})$ — k-я порядковая статистика, соответствующая выборке $g(\xi_1), g(\xi_2), \ldots, g(\xi_n)$, $f_\xi^{(k)}(u) = nC_{n-1}^{k-1}[F_\xi(u)]^{k-1}[1-F_\xi(u)]^{n-k} \times \times f_\xi(u)$ — плотность вероятности k-й порядковой статистики случайной величины ξ [1, с. 17; 2, с. 95].

Вычислим теперь математическое ожидание случайной величины $y_{mn}^{(k)}$. По формуле (4) с учетом равенства 855.42 из книги [3, с. 183], находим

$$m(y_{mn}^{(k)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^m f_x(u)\, du = nC_{n-1}^{k-1} \int\limits_0^1 u^m u^{k-1} (1-u)^{n-k}\, du =$$

$$= nC_{n-1}^{k-1} \int\limits_0^1 u^{m+k-1} (1-u)^{n-k}\, du = nC_{n-1}^{k-1} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(m+k)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(m+n+1)} = \frac{n!\,(m+k-1)!}{(k-1)!\,(m+n)!}.$$

Рассмотрим разность

$$I_m = m(y_{mn}^{(n)} - y_{mn}^{(1)}) - m(\tilde{y}_{mN}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{mN}^{(k)}) = \frac{n}{n+m} -$$

$$- \frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} - \frac{(N-k+1)(N-k+2)\ldots N}{(m+N-k+1)(m+N-k+2)\ldots(m+N)} +$$

$$+ \frac{k(k+1)\ldots N}{(m+k)(m+k+1)\ldots(m+N)}.$$

Используя равенство (2) и условие леммы, находим $N = nk + + k - 1$. Тогда

$$I_m = \frac{n}{n+m} - \frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} -$$

$$- \frac{nk(nk+1)\ldots(nk+k-1)}{(m+nk)(m+nk+1)\ldots(m+nk+k-1)} +$$

$$+ \frac{k(k+1)\ldots(nk+k-1)}{(m+k)(m+k+1)\ldots(m+nk+k-1)} >$$

$$> \frac{n}{n+m} - \frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} -$$

$$- \frac{nk(nk+1)\ldots(nk+k-1)}{(m+nk)(m+nk+1)\ldots(m+nk+k-1)} = I_m^{(k)}.$$

Заметим, что $I_1 = I_2 = 0$. Докажем, что $I_m > 0$ при $m \geqslant 3$. Для этого достаточно показать, что $I_m^{(k)} > 0$ для всех натуральных $k > 1$ и $m \geqslant 3$.

Доказательство проведем методом математической индукции по m. Рассмотрим вначале случай $m=3$. Легко показать, что

$$I_3^{(k)}=\frac{n}{n+3}-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)}-$$

$$-\frac{nk(nk+1)(nk+2)}{(nk+k)(nk+k+1)(nk+k+2)}=$$

$$=\frac{3n^3k^2-3n^3k+n^2k^2-3n^2k-10nk^2-12nk-4n^2-8n-6k^2-18k-12}{(n+1)(n+2)(n+3)(nk+k+1)(nk+k+2)}.$$

Рассмотрим числитель этой дроби и покажем методом математической индукции по k, что он положительный:

$$A_{nk}=3n^3k^2-3n^3k+n^2k^2-3n^2k-10nk^2-12nk-$$

$$-4n^2-6k^2-18k-8n-12>0.$$

Если $k=2$, то $A_{n2}=6n^3-6n^2-72n-72>0$ при $n=5, 6, \ldots$; если $k=3$, то $A_{n3}=18n^3-4n^2-134n-120>0$ при $n=4, 5, \ldots$.

Допустим, что при $k=l$, $A_{nl}>0$. Рассмотрим случай $k=l+1$:

$$A_{n,l+1}=A_{nl}+6n^3l+2n^2l-2n^2-20nl-22n-12l-24>0$$

при $n=3, 4, \ldots$.

Таким образом, $I_3^{(k)}>0$ для всех $k=2, 3, \ldots$, если объем выборки $n\geqslant 5$.

Дальнейшее доказательство проведем методом математической индукции по m. Пусть для $m=p$ выполняется неравенство $I_p^{(k)}>0$, т. е.

$$I_p^{(k)}=\frac{n}{n+p}-\frac{n!}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}-$$

$$-\frac{nk(nk+1)\ldots(nk+k-1)}{(nk+p)(nk+p+1)\ldots(nk+p+k-1)}>0.$$

Рассмотрим $I_m^{(k)}$ при $m=p+1$:

$$I_{p+1}^{(k)}=\frac{n}{n+p+1}-\frac{n!}{(p+2)(p+3)\ldots(p+1+n)}-$$

$$-\frac{kn(kn+1)\ldots(nk+k-1)}{(nk+p+1)(nk+p+2)\ldots(nk+p+k)}=$$

$$=\frac{n+p}{n+p+1}\cdot\frac{n}{n+p}-\frac{p+1}{n+p+1}\cdot\frac{n!}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}-$$

$$-\frac{nk+p}{nk+p+k}\cdot\frac{nk(nk+1)\ldots(nk+k-1)}{(nk+p)(nk+p+1)\ldots(nk+p+k-1)}>$$

$$>\frac{n+p}{n+p+1}\cdot I_p^{(k)}>0.$$

Итак, мы доказали, что $I_m > I_m^{(k)} > 0$, отсюда следует, что

$$m\left(\tilde{y}_{mN}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{mN}^{(k)}\right) < m\left(y_{mn}^{(n)} - y_{mn}^{(1)}\right).$$

Теорема. Пусть

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m, \tag{5}$$

где x — равномерно распределенная случайная величина на интервале $[0, 1]$. Если все коэффициенты многочлена (5), кроме свободного члена, положительны (или отрицательны), то из условия

$$p\left(y \in \left(y_n^{(1)}, y_n^{(n)}\right)\right) = p\left(\tilde{y} \in \left(\tilde{y}_N^{(k)}, \tilde{y}_N^{(N-k+1)}\right)\right)$$

следует неравенство

$$m\left(\tilde{y}_N^{(N-k+1)} - \tilde{y}_N^{(k)}\right) < m\left(y_n^{(n)} - y_n^{(1)}\right), \tag{6}$$

где $y_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\tilde{y}_N^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ — порядковые статистики, соответствующие выборкам $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_N$.

Доказательство. Покажем, что теорема справедлива для многочлена с положительными коэффициентами, для многочлена с отрицательными коэффициентами доказательство аналогично.

Найдем сначала $m_1(y_n^{(k)})$. По формуле (4)

$$m\left(y_n^{(k)}\right) = nC_{n-1}^{k-1}\int_0^1 \left(a_0u^m + a_1u^{m-1} + \ldots + a_m\right)u^{k-1}(1-u)^{n-k}\,du =$$

$$= a_0nC_{n-1}^{k-1}\int_0^1 u^{m+k-1}(1-u)^{n-k}\,du + a_1nC_{n-1}^{k-1}\int_0^1 u^{m+k-2}(1-u)^{n-k} \times$$

$$\times\, du + \ldots + a_mnC_{n-1}^{k-1}\int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{n-k}\,du = a_0m\left(y_{mn}^{(k)}\right) +$$

$$+ a_1m\left(y_{m-1,n}^{(k)}\right) + \ldots + a_{m-1}m\left(y_{1n}^{(k)}\right) + a_m.$$

Отсюда

$$m\left(y_n^{(n)} - y_n^{(1)}\right) = a_0m\left(y_{mn}^{(n)} - y_{mn}^{(1)}\right) + a_1m\left(y_{m-1,n}^{(n)} - y_{m-1,n}^{(1)}\right) + \ldots$$

$$\ldots + a_{m-1}m\left(y_{1n}^{(n)} - y_{1n}^{(1)}\right).$$

Точно так же получаем

$$m\left(\tilde{y}_N^{(N-k+1)} - \tilde{y}_N^{(k)}\right) = a_0m\left(\tilde{y}_{mN}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{mN}^{(k)}\right) +$$

$$+ a_1m\left(\tilde{y}_{m-1,N}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{m-1,N}^{(k)}\right) + \ldots + a_{m-1}m\left(\tilde{y}_{1N}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{1N}^{(k)}\right).$$

Рассмотрим теперь разность

$$I = m\,(y_n^{(n)} - y_n^{(1)}) - m\,(\tilde{y}_N^{(N-k+1)} - \tilde{y}_N^{(k)}) = a_0\,[m\,(y_{mn}^{(n)} - y_{mn}^{(1)}) -$$

$$- m\,(\tilde{y}_{mN}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{mN}^{(k)})] + a_1\,[m\,(y_{m-1,n}^{(n)} - y_{m-1,n}^{(1)}) -$$

$$- m\,(\tilde{y}_{m-1,N}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{m-1,N}^{(k)})] + \ldots + a_{m-1}\,[m\,(y_{1n}^{(n)} - y_{1n}^{(1)}) -$$

$$- m\,(\tilde{y}_{1N}^{(N-k+1)} - y_{1N}^{(k)})] = a_0 I_m + a_1 I_{m-1} + \ldots + a_{m-1} I_1.$$

По лемме $I_m > 0$ для всех $m = 3, 4, \ldots$ и $I_1 = I_2 = 0$, поэтому по условию теоремы $I > 0$, отсюда следует неравенство $m\,(\tilde{y}_N^{(N-k+1)} - \tilde{y}_N^{(k)}) < m\,(y_n^{(n)} - y_n^{(1)})$.

Следствие. Теорема остается справедливой, если все коэффициенты ряда $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots$, где x — равномерно распределенная случайная величина на интервале $[0, 1]$, положительны и ряд $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m + \ldots$ сходится на всех $t \in [0, 1]$.

Замечание. Если не все коэффициенты многочлена (5) положительны, то при условии

$$p\,(y \in (y_n^{(1)}, y_n^{(n)})) = p\,(\tilde{y} \in (\tilde{y}_N^{(k)}, \tilde{y}_N^{(N-k+1)}))$$

неравенство (6) может не выполняться. Например, для случайной величины $y = -x^3 + x^2 + x + 1$, $x \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$m\,(\tilde{y}_N^{(N-k+1)} - \tilde{y}_N^{(k)}) > m\,(y_n^{(n)} - y_n^{(1)}). \qquad (7)$$

Действительно, заметим вначале, что функция $y(x)$, $x \in [0, 1]$ является возрастающей, поэтому по формуле (4)

$$m\,(y_n^{(k)}) = nC_{n-1}^{k-1} \int_0^1 (-u^3 + u^2 + u + 1)\, u^{k-1} (1-u)^{n-k}\, du =$$

$$= -m\,(y_{3n}^{(k)}) + m\,(y_{2n}^{(k)}) + m\,(y_{1n}^{(k)}) + 1.$$

Тогда

$$I = m\,(y_n^{(n)} - y_n^{(1)}) - m\,(\tilde{y}_N^{(N-k+1)} - \tilde{y}_N^{(k)}) = -[m\,(y_{3n}^{(n)} - y_{3n}^{(1)}) -$$

$$- m\,(\tilde{y}_{3N}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{3N}^{(k)})] + [m\,(y_{2n}^{(n)} - y_{2n}^{(1)}) - m\,(\tilde{y}_{2N}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{2N}^{(k)})] +$$

$$+ [m\,(y_{1n}^{(n)} - y_{1n}^{(1)}) - m\,(\tilde{y}_{1N}^{(N-k+1)} - \tilde{y}_{1N}^{(k)})) = -I_3 + I_2 + I_1.$$

Так как $I_1 = I_2 = 0$ и $I_3 > 0$, то отсюда следует неравенство (7).

1. *Дэйвид Г.* Порядковые статистики. М., 1979. 2. *Ван дер Варден Б. Л.* Математическая статистика. М., 1960. 3. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов. М., 1969.

Поступила в редколлегию 09.06.80

УДК 519.21

А. И. МОЦА, ст. преп., Ужгородский университет

ОБЩИЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ В J-ТОПОЛОГИИ ПОЛЕЙ СТУПЕНЧАТЫХ СУММ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть X — некоторое абстрактное пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств F_X и для каждого $\varepsilon > 0$ заданы последовательность случайных величин $\eta_{\varepsilon l}$, $l \geqslant 1$ со значениями в X и совокупность числовых случайных величин $\gamma_{\varepsilon kr}$, $k, r \geqslant 1$. Предположим, что совокупность $\gamma_{\varepsilon kr}$, $k, r \geqslant 1$ условно независима по отношению к переключающей последовательности $\eta_{\varepsilon l}$, $l \geqslant 1$ в том смысле, что при любом $N \geqslant 1$

$$P\{\gamma_{\varepsilon kr} < u_{kr},\ k, r = \overline{1, N}/\eta_{\varepsilon l} = x_l,\ l = \overline{1, N}\} = \prod_{r=1}^{N} \prod_{k=1}^{N} F_\varepsilon(u_{kr}/x_k x_r),$$

где $F_\varepsilon(u/x, y)$ при каждом $x, y \in X$ — функция распределения на R_1 и при всех $u \in R_1$ измеримая функция по $(x, y) \in X \times X$.

Введем в рассмотрение поле ступенчатых сумм переключаемых случайных величин $\xi_\varepsilon(t, s) = \sum_{r=1}^{[sT_\varepsilon]} \sum_{k=1}^{[tT_\varepsilon]} \gamma_{\varepsilon kr}$, $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, где $T_\varepsilon \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ — некоторые неслучайные функции.

Для случая, когда переключающая последовательность представляет собой цепь Маркова со счетным множеством состояний, условия слабой сходимости распределений, а также условия сходимости к непрерывным полям изучались в работах [1, 2]. Отметим работу [3], где исследованы условия сходимости распределений двойных сумм неслучайных функций от случайных блужданий, а также работы [4—6], в которых получены результаты, аналогичные представленным в настоящей работе, для процессов ступенчатых сумм переключаемых случайных величин (однократных сумм).

Будем обозначать символом $\Rightarrow$ слабую сходимость функций распределения случайных величин или конечномерных распределений случайных процессов. Через D_{T_0} обозначим пространство числовых функций $x(t, s)$ на $T_0 = [0, T] \times [0, T]$ таких, что в каждой точке (t, s) существует предел по всем четырем квадрантам T_0^{++}, T_0^{-+}, T_0^{+-}, T_0^{--}, где

$$T_0^{++} = \{(u, v) \in T_0 : u \geqslant t,\ v \geqslant s\};$$