УДК 519.21

Ю. М. РЫЖОВ, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ, ОБЛАДАЮЩИХ БАКСТЕРОВСКИМ СВОЙСТВОМ

При изучении процесса броуновского движения давно было замечено, что среднеквадратическое отклонение приращения Δw пропорционально Δt. Строгая формулировка этого факта имеет вид [1]: если $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ и $\lambda_n = \max\limits_k |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$, то по вероятности

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k_n} [w(t_{k+1}^{(n)}) - w(t_k^{(n)})]^2 = b - a.$$

Г. Бакстер исследовал [2] условия, при которых случайный процесс (по крайней мере гауссовский) обладает подобным свойством. После статьи Бакстера появилось достаточно много работ, различным образом обобщающих его результаты [3—7].

В настоящей статье сделана попытка исследовать класс случайных процессов, обладающих бакстеровским свойством (определение см. ниже). Оказалось, что, постулируя лишь это свойство, можно получить достаточно содержательные результаты, касающиеся таких процессов и функционалов от них.

Пусть случайный процесс $\xi(t)$ определен на интервале $[0, T]$. Разбиением (интегральным) интервала будем называть семейство подмножеств $\Lambda_n = \{0 < t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = T\}$ таких, что $\lambda_n = |\Lambda_n| = \max\limits_k |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ будем называть $\mathbf{w}$-процессом, если для любого разбиения Λ_n интервала $[0, T]$ и любого интервала $I \subset [0, T]$ существует предел (неслучайный) в среднем квадратическом

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{I\cap\Lambda_n} [\xi(t_{k+1}^{(n)}) - \xi(t_k^{(n)})]^2 = m_\xi(I).$$

Очевидно, что функция $\mathbf{M}(t) = m_\xi([0, t])$ не убывает, неотрицательна и имеет ограниченную вариацию. Для непрерывных в среднем процессов она будет определять некоторую меру (которую мы также обозначим m_ξ) на $[0, T]$. Эту меру назовем бакстеровской мерой процесса $\xi(t)$.

Как уже было отмечено, процесс броуновского движения $w(t)$ является $\mathbf{w}$-процессом (этим и оправдывается название). Для броуновского движения бакстеровская мера есть мера Лебега.

Нам удобно теорему Бакстера переформулировать следующим образом.

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ — гауссовский процесс, у которого $\mathbf{M}\xi(t) = 0$, а корреляционная функция такова, что существуют

$$D^+(t) = \lim_{s \downarrow t} \frac{R(t,t) - R(s,t)}{s-t},$$

$$D^-(t) = \lim_{s \uparrow t} \frac{R(t,t) - R(s,t)}{t-s},$$

а если $t \neq s$, то существует ограниченная вторая производная $\frac{\partial^2}{\partial + \partial s} R(t,s)$. Тогда процесс $\xi(t)$ будет w-процессом с бакстеровской мерой $m_\xi(I) = \int_I f(t)\,dt$, где $f(t) = D^+(t) - D^-(t)$.

Для стационарных в широком смысле w-процессов можно доказать, что их бакстеровская мера будет (с точностью до постоянного множителя) мерой Лебега.

Предложение 1. Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ — стационарный в широком смысле w-процесс, обладающий бакстеровским свойством. Тогда существует односторонняя производная

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{R(\tau) - R(0)}{\tau} = -R_0, \tag{1}$$

где $R(\tau)$ — корреляционная функция процесса $\xi(t)$, а соответствующая бакстеровская мера $m_\xi(I)$ равна $2R_0\lambda(I)$, где $\lambda(\cdot)$ — мера Лебега.

Доказательство. Возьмем произвольное $\tau > 0$ и рассмотрим разбиение Λ_n интервала $[0, T]$ точками вида $k\tau$, Обозначим $N_\tau = \left[\frac{T}{\tau}\right]$ и $S_n = \sum_{k=1}^{N_\tau} (\Delta\xi_k)^2$. Поскольку $\xi(t)$ есть w-процесс, то предел

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{M}S_n = m_\xi([0, T])$$

существует. Легко подсчитать, что

$$\mathbf{M}S_n = 2N_\tau [R(0) - R(\tau)] = 2\frac{R(0) - R(\tau)}{\tau} \left[\frac{T}{\tau}\right] \tau \to 2R_0 T$$

при $\tau \to 0$. Утверждение доказано.

Следующая теорема показывает, что для гауссовских стационарных процессов, кроме условия (1), надо потребовать совсем немного, и процесс будет w-процессом.

Теорема 1. Для того чтобы стационарный гауссовский процесс с корелляционной функцией

$$R(t) = \int e^{i\lambda t} dF(\lambda)$$

был w-процессом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

I) $\lim\limits_{\tau\downarrow 0}\frac{R(0)-R(\tau)}{\tau}=R_0$ (существует отличный от нуля предел),

$$\text{II)}\quad \lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau^2}\int\limits_0^T (T-t)\,[2R(t)-R(t-\tau)-R(t+\tau)]^2\,dt=0$$

или в спектральной форме:

$$\text{I}')\quad \lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\int \sin^2\lambda\tau\,dF(\lambda)=R_0,$$

$$\text{II}')\quad \lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau^2}\int\int\frac{\sin^2(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^2}\sin^2\lambda\tau\sin^2\mu\tau\,dF(\lambda)\,dF(\mu)=0.$$

Доказательство. Рассмотрим для произвольного малого $\tau>0$ разбиение интервала $[0,T]$ точками $k\tau$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\Sigma(\Delta\xi_k)^2$, где суммирование производится по соответствующему разбиению, существует и неслучаен тогда и только тогда, когда выполняется условие 1) и условие

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\sum_{k,j=1}^{N_\tau}[2R((k-j)\tau)-R((k-j-1)\tau)-$$
$$R((k-j+1)\tau)]^2=0. \tag{2}$$

В спектральном виде условие (1) превращается в I'). Действительно,

$$2\frac{R(0)-R(\tau)}{\tau}=\frac{1}{\tau}[2R(0)-R(\tau)-R(-\tau)]=\frac{4}{\tau}\int\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}\,dF(\lambda).$$

Рассмотрим теперь (2). Покажем, что (2) и II) эквивалентны. Вначале заметим, что, учитывая 1), несложно получить

$$\sum_{k,j=1}^{N_\tau}[\Delta_\tau^{(2)}R((k-j)\tau)]^2=2\sum_{k>j=1}^{N_\tau}[\Delta_\tau^{(2)}R((k-j)\tau)]^2+O(\tau)=$$

$$=2\sum_{k=1}^{N_\tau-1}[\Delta_\tau^2R(k\tau)]^2(N_\tau-k)+O(\tau)=$$

$$=32\int\int\sum_{k=1}^{N_\tau-1}(N_\tau-k)\,e^{i(\lambda+\mu)k\tau}\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}\sin^2\frac{\mu\tau}{2}\,dF(\lambda)\,dF(\mu)+O(\tau).$$

Обозначим

$$\delta(\tau)=\delta_\tau(\lambda,\mu)=\sum_{k=1}^{N_\tau-1}(N_\tau\tau-k\tau)\,e^{i(\lambda+\mu)k\tau}\tau-\int\limits_\tau^T(T-s)\,e^{i(\lambda+\mu)s}ds,$$

$$\varphi_\tau(s)=(N_\tau\tau-s)\,e^{i(\lambda+\mu)s}.$$

Для δ_τ имеем оценку

$$|\delta_\tau| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{N_\tau-1} \varphi_\tau(k\tau)\,\tau - \int_\tau^T \varphi_\tau(s)\,ds + \Big|(T - N_\tau\tau)\int_\tau^T e^{i(\lambda+\mu)s}ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{N_\tau-1} \tau \int_0^1 [\varphi_\tau(k\tau) - \varphi_\tau((k+s)\tau)]\,ds\Big| + O(\tau),$$

где величина $O(\tau)$ не зависит от (λ, μ), и поскольку

$$\varphi_\tau(k\tau) - \varphi_\tau((k+t)\tau) = (N_\tau\tau - k\tau)\,[e^{i(\lambda+\mu)k\tau} - e^{i(\lambda+\mu)(k+t)\tau}] +$$

$$+ t\tau e^{i(\lambda+\mu)(k+t)\tau} = (N_\tau\tau - k\tau)\,e^{i(\lambda+\mu)k\tau}(1 - e^{i(\lambda+\mu)t\tau}) + O(\tau),$$

где снова $O(\tau)$ не зависит от (λ, μ), получаем

$$|\delta_\tau| \leqslant \sum_{k=1}^{N_\tau-1} (N_\tau - k)\,\tau^2 \Big|1 - \int_0^1 e^{i(\lambda+\mu)t\tau}dt\Big| + O(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant C\left|\frac{e^{i(\lambda+\mu)\tau} - 1 - i(\lambda+\mu)\tau}{(\mu+\lambda)\tau}\right| + O(\tau).$$

Рассмотрим теперь

$$\gamma_\tau = \Big|\sum_{k>j=1}^{N_\tau} [2R((k-j)\tau) - R((k-j-1)\tau) -$$

$$- R((k-j+1)\tau)]^2 - \frac{1}{\tau^2}\int_\tau^T (T-s)\,[2R(s) - R(s-\tau) -$$

$$- R(s+\tau)]^2\,ds\Big| = 16\Big|\int\int\Big[\sum_{k=1}^{N_\tau-1}(N_\tau - k)\,e^{i(\lambda+\mu)k\tau} -$$

$$- \frac{1}{\tau^2}\int_\tau^T (T-s)\,e^{i(\lambda+\mu)s}ds\Big]\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}\sin^2\frac{\mu\tau}{2}\,dF(\lambda)\,dF(\mu)\Big| =$$

$$= \frac{16}{\tau^2}\iint |\delta_\tau(\lambda, \mu)|\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}\sin^2\frac{\mu\tau}{2}\,dF(\lambda)\,dF(\mu).$$

Используя 1), получаем

$$\gamma_\tau \leqslant \frac{C}{\tau^2}\iint\left|\frac{e^{i(\lambda+\mu)\tau} - 1 - i(\lambda+\mu)\tau}{(\lambda+\mu)\tau}\right|\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}\times$$

$$\times\sin^2\frac{\mu\tau}{2}\,dF(\lambda)\,dF(\mu) + O(\tau).$$

Значит,

$$\gamma_\tau \leqslant C \iint f_\tau(\lambda, \mu)\, g_\tau(\lambda, \mu)\, dF(\lambda)\, dF(\mu) + O(\tau),$$

где функция

$$f_\tau(\lambda, \mu) = \left| \frac{e^{i(\lambda+\mu)\tau} - 1 - i(\lambda+\mu)\tau}{(\lambda+\mu)\tau} \right|$$

равномерно по (λ, μ) ограничена, $f_\tau \to 0$ при $\tau \to 0$ и всех (λ, μ), а $g_\tau(\lambda, \mu) = \frac{1}{\tau^2} \sin^2 \frac{\lambda\tau}{2} \sin^2 \frac{\mu\tau}{2}$ равномерно по τ интегрируема (это вытекает из I').

Отсюда заключаем, что $\gamma_\tau \to 0$ при $\tau \to 0$ и, следовательно, условия (2) и II) эквивалентны. Условие II') является эквивалентной спектральной формой II). Теорема доказана.

Далее будем изучать функционалы от **w**-процессов.

Теорема 2. Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ — некоторый **w**-процесс с бакстеровской мерой m_ξ. Тогда для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(t)$, $t \in [0, T]$ существует предел

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} \sum_{I \cap \Lambda_n} \varphi(t^n_{k-1}) (\Delta\xi^{(n)}_k)^2 = \int_a^b \varphi(t)\, m_\xi(dt),$$

где $I = [a, b) \subset [0, T]$, $\Lambda_n = \{t^{(n)}_0 < \ldots < t^{(n)}_{kn}\}$ — разбиение интервала $[0, T]$, а $\Delta\xi^{(n)}_k = \xi(t^{(n)}_k) - \xi(t^{(n)}_{k-1})$.

Доказательство. Обозначим

$$\varphi^{(n)}_k = \min_{t^{(n)}_{k-1} \leqslant s \leqslant t^{(n)}_k} \varphi(s),$$

$$\Phi^{(n)}_k = \max_{t^{(n)}_{k-1} \leqslant s \leqslant t^{(n)}_k} \varphi(s).$$

Будем считать $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$. Фиксируем некоторое достаточно большое n_0. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_0} \varphi^{(n_0)}_k (\Delta\xi^{(n_0)}_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \varphi(t^{(n_0)}_{k-1}) \times$$

$$\times (\Delta\xi^{(n_0)}_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \Phi^{(n_0)}_k (\Delta\xi^{(n_0)}_k)^2.$$

Так как при возрастании n величины $\varphi^{(n)}_k$ не возрастают, а величины $\Phi^{(n)}_k$ не убывают, то при $n > n_0$

$$\sum_k \varphi^{(n_0)}_k \sum_{j=1}^{j_k} (\Delta\xi^{(n)}_j)^2 \leqslant \sum_k \varphi(t^{(n_0)}_{k-1}) (\Delta\xi^{(n_0)}_k)^2 \leqslant \sum_k \Phi^{(n_0)}_k \sum_{j=1}^{j_k} (\Delta\xi^{(n)}_j)^2.$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем

$$\sum_k \varphi_k^{(n_0)} m_\xi(\Delta t_k) \leqslant \sum_k \varphi(t_{k-1}^{(n_0)}) \Delta\xi_k^{(n_0)})^2 \leqslant \sum_k \Phi_k^{(n_0)} m_\xi(\Delta t_k).$$

Слева и справа в этом неравенстве стоят суммы Дарбу для интеграла $\int_a^b \varphi(t)\, m_\xi(dt)$. Переходя к пределу при $n_0 \to \infty$, завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Как видно из доказательства, функция $\varphi(t)$ может быть случайной. От нее достаточно потребовать лишь интегрируемости.

Следствие. Меры μ_ξ и μ_η в функциональном пространстве, отвечающие **w**-процессам $\xi(t)$ и $\eta(t)$ с различными бакстеровскими мерами m_ξ и m_η, сингулярны.

Для доказательства достаточно применить теорему 2 с функцией $\varphi(t) = \chi_B(t)$, где χ_B — индикатор множества B, на котором $m_\xi(B) \neq \neq m_\eta(B)$.

Теорема 3. Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ — некоторый **w**-процесс с бакстеровской мерой m_ξ, функция $f(t, x)$ имеет непрерывные ограниченные производные f'_t, f'_x, f''_{xx} и существуют интегралы

$$\int_0^T f'_t(s, \xi(s))\, ds, \qquad \int_0^T f''_{xx}(s, \xi(s))\, m_\xi(ds).$$

Тогда для любого разбиения $\Lambda_n = \{t_k^{(n)},\ k = 0, 1, \ldots, k_n\}$ интервала $[0, T]$ такого, что $|\Lambda_n| \to 0$, существует предел

$$\operatorname*{l.i.m}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} f'_x(t_k^{(n)}) \Delta\xi_k^{(n)} = \int_0^T f'_x(t, \xi(t))\, d\xi(t),$$

причем

$$\int_0^T f'_x(t, \xi(t))\, d\xi(t) = f(T, \xi(T)) - f(0, \xi(0)) -$$

$$- \int_0^T f'_t(t, \xi(t))\, dt - \frac{1}{2} \int f''_{xx}(t, \xi(t))\, m_\xi(dt).$$

Доказательство вытекает из соотношения

$$f(T, \xi(T)) - f(0, \xi(0)) = \sum_k [f(t_k^{(n)}, \xi(t_k^{(n)})) - f(t_{k-1}^{(n)}, \xi(t_{k-1}^{(n)})] =$$

$$= \sum_k f'_t(t_k + \theta\Delta t_k \xi(t_{k-1}^{(n)}))\, \Delta t_k + \sum_k f'_x(t_{k-1}^{(n)}, \xi(t_{k-1}^{(n)}))\, \Delta\xi_k^{(n)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_k f''_{xx}(t_{k-1}^{(n)}, \xi(t_{k-1}^{(n)}) + \theta\Delta\xi_k^{(n)})\, (\Delta\xi_k^{(n)})^2$$

и теоремы 2.

Из теоремы 3 следует, что для определения стохастического интеграла $\int_0^T f(t, \xi(t))\, d\xi(t)$ для **w**-процессов достаточно уметь определять интегралы вида $\int g(t, \xi(t))\, dt$; $\int g(t, \xi(t))\, m_\xi(dt)$. В работах [8, 9] содержатся необходимые и достаточные условия для функции g, при которых такой интеграл существует (для стационарных гауссовских процессов). Из них вытекает, что функция $g(x)$ может быть обобщенной, тем не менее интеграл $\int_0^T g(\xi(t))\, dt$ можно корректно определить.

Подобно теореме 3 может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Если функция $f(t, x)$ имеет производные $f'_x(s, 0)$, $f''_{t,x}(s, 0)$, $f''_{xx}(s, 0)$ и $f(s, 0) = 0$ при всех s; существуют интегралы

$$\int_0^T \int_0^T R(u, v)\, f''_{tx}(u, 0)\, f''_{tx}(v, 0)\, du dv,$$

$$\int f''_{xx}(s, 0)\, m_\xi(ds),$$

где m_ξ — бакстеровская мера **w**-процесса $\xi(t)$, а $R(t, s)$ — его корреляционная функция, то существует предел

$$\int_0^T f(s, d\xi(s)) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{\Lambda_n} f(t_{k-1}^{(n)},\ \Delta\xi_k^{(n)}),$$

который равен

$$\int_0^T f'_x(s, 0)\, d\xi(s) + \frac{1}{2}\int_0^T f''_{xx}(s, 0)\, m_\xi(ds),$$

или иначе

$$\xi(T)\, f'_x(T, 0) - \xi(0)\, f'_x(0, 0) - \int_0^T \xi(s) \times$$

$$\times f''_{t,x}(s, 0)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^T f''_{xx}(s, 0)\, m_\xi(ds).$$

В работе [10] функционалы рассмотренного выше вида изучались для неслучайных функций $\varphi(t)$ и гауссовских процессов $\xi(t)$, корреляционная функция которых удовлетворяет условиям теоремы Бакстера, т. е. в конечном счете для **w**-процессов.

В заключение укажем еще одно свойство стационарных в широком смысле **w**-процессов.

Теорема 5. Стационарный в широком смысле **w**-процесс недетерминирован.

Доказательство опирается на следующие леммы.

Лемма 1. Пусть корреляционная функция $R(\tau)=\int e^{i\lambda\tau}dF(\lambda)$ такова, что $R(0)=1$ и $\int\limits_0^\infty \lambda^a dF(\lambda)<\infty$ при некотором $0<a\leqslant 2$. Тогда при $\tau\downarrow 0$ $R(\tau)=1-0(\tau^b)$ для любого $b<a$.

Лемма 2. Пусть при некотором $a<1$

$$R(\tau)=1-O(\tau^a).$$

Тогда при $b<a$

$$\int\limits_0^\infty \lambda^b dF(\lambda)<\infty.$$

Как было показано выше, стационарный в широком смысле случайный **w**-процесс обязан иметь односторонне дифференцируемую в нуле корреляционную функцию. Доказательство теоремы 5 завершает следующее утверждение.

Лемма 3. Если корреляционная функция $R(\tau)$ стационарного в широком смысле процесса $\xi(t)$ имеет в точке $\tau=0$ одностороннюю производную $R'(+0)\neq 0$, то процесс $\xi(t)$ недетерминирован.

Доказательство. Процесс $\xi(t)$ недетерминирован тогда и только тогда, когда его абсолютно непрерывная компонента спектра $f(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$\left|\int \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right|<\infty.$$

Если существует $R'(+0)\neq 0$ и $R(0)=1$ (что не является ограничением), то $1-R(\tau)=O(\tau)$ при $\tau\downarrow 0$, $\tau>0$. Поэтому при всех $b<1$ $\int\lambda^b dF(\lambda)<\infty$ и тем более $\int\lambda^b f(\lambda)\,d\lambda<\infty$. При этом $\infty=$ $=\int\lambda^b f(\lambda)\,d\lambda\leqslant\int\lambda^b dF(\lambda)$ при $b>1$. Действительно, если бы последний интеграл сходился, то по лемме 1 $1-R(\tau)=O(\tau^\gamma)$ при некотором $\gamma>1$ и, значит,

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1-R(\tau)}{\tau}=0,$$

что противоречит условию $R'(+0)\neq 0$. Значит, $f(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ убывает не быстрее некоторой степени λ, откуда и вытекает лемма.

1. *Levy P.* Le mouvement Brownian plan.— Amer. J. Math., 1940, 62. 2. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes.— Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, 3. 3. *Арак Т. В.* О теоремах типа Леви—Бакстера для случайных полей.— Теория вероятностей и ее применения, 1972, 17, 1. 4. *Бондарь Ю. В., Курченко А. А.* Некоторые предельные теоремы бакстеровского типа для случайных полей.— Всесоюзный симпозиум по статистике случайных процессов. Киев, 1973. 5. *Berman S. M.* A version of the Levy—Baxter theorem for the increments of the

Brownian motion of several parameters.— Proc. Amer. Math. Soc., 1967, **18**, 6. 6. *Fernander de la Vega*. On almost sure convergence of quadratic Brownian variation.— Ann. Probab., 1974, **2**, 3. 7. *Kawada T*. The Levy—Baxter theorem for Caussian random fields: a sufficient conditions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **53**, 2. 8. *Рыжов Ю. М*. Об одном классе функционалов для стационарного гауссовского процесса.— ДАН СССР, 1966, **169**, № 1. 9. *Рыжов Ю. М*. Нелинейные преобразования гауссовских процессов.— Проблемы передачи информации, 1970, **6**, № 3. 10. *Yeh J*. Stochastic integrals of L_2-functions with respect to Gaussian processes.— Tôhoku Math. J., 1975, 27.

Поступила в редколлегию 15.01.80

УДК 519.21

А. М. СЕКРЕТАРЕВ, асп., Киевский университет

О ПРОГНОЗЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ, ЗНАМЕНАТЕЛЕМ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ ПОЙА

В настоящей статье показана принципиальная возможность явного решения задачи экстраполирования для процессов со спектральными плотностями, где знаменателем является целая функция Пойа от мнимого аргумента.

Свойства целых функций Пойа достаточно подробно изложены в монографии [1].

Итак, рассмотрим стационарные в широком смысле процессы, спектральная плотность которых имеет вид $\frac{1}{|E(i\lambda)|^2}$, где $E(s)$ — целая функция Пойа, $E(s) = e^{-cs^2+bs}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_k}\right)e^{s/a_k}$, a_k, b, c вещественны, $c \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2} < \infty$.

Из свойств функций Пойа вытекает, что:

1) $|E(\sigma+i\tau)| \geqslant E(\sigma)$, $\operatorname{Im}\sigma = 0$,

2) $\frac{1}{|E(\sigma+i\tau)|} = O\left(\frac{1}{|\tau|^r}\right)$, где $E(s) \neq e^{bs}P(s)$, $P(s)$ — полином конечной степени. Последнее условие выполняется равномерно в полосе $|\sigma| < R$ для любых положительных r и R. Отсюда вытекает выполнение условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{|E(i\lambda)|^2} < \infty$, что позволяет рассматривать процессы, допускающие спектральное представление:

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t}\frac{1}{|E(i\lambda)|^2}Z(d\lambda),$$

где $M|z(\Delta)|^2 = m(\Delta)$, $m(\Delta)$ — мера Лебега на R^1.