Brownian motion of several parameters.— Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18, 6. 6. *Fernander de la Vega*. On almost sure convergence of quadratic Brownian variation.— Ann. Probab., 1974, 2, 3. 7. *Kawada T*. The Levy—Baxter theorem for Caussian random fields: a sufficient conditions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 53, 2. 8. *Рыжов Ю. М*. Об одном классе функционалов для стационарного гауссовского процесса.— ДАН СССР, 1966, 169, № 1. 9. *Рыжов Ю. М*. Нелинейные преобразования гауссовских процессов.— Проблемы передачи информации, 1970, 6, № 3. 10. *Yeh J*. Stochastic integrals of L_2-functions with respect to Gaussian processes.— Tôhoku Math. J., 1975, 27.

Поступила в редколлегию 15.01.80

УДК 519.21

А. М. СЕКРЕТАРЕВ, асп., Киевский университет

О ПРОГНОЗЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ, ЗНАМЕНАТЕЛЕМ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ ПОЙА

В настоящей статье показана принципиальная возможность явного решения задачи экстраполирования для процессов со спектральными плотностями, где знаменателем является целая функция Пойа от мнимого аргумента.

Свойства целых функций Пойа достаточно подробно изложены в монографии [1].

Итак, рассмотрим стационарные в широком смысле процессы, спектральная плотность которых имеет вид $\frac{1}{|E(i\lambda)|^2}$, где $E(s)$ — целая функция Пойа, $E(s)=e^{-cs^2+bs}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_k}\right)e^{s/a_k}$, a_k, b, c вещественны, $c\geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}<\infty$.

Из свойств функций Пойа вытекает, что:

1) $|E(\sigma+i\tau)|\geqslant E(\sigma)$, $\operatorname{Im}\sigma=0$,

2) $\frac{1}{|E(\sigma+i\tau)|}=O\left(\frac{1}{|\tau|^r}\right)$, где $E(s)\neq e^{bs}P(s)$, $P(s)$ — полином конечной степени. Последнее условие выполняется равномерно в полосе $|\sigma|<R$ для любых положительных r и R. Отсюда вытекает выполнение условия $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{|E(i\lambda)|^2}<\infty$, что позволяет рассматривать процессы, допускающие спектральное представление:

$$\xi(t)=\int e^{i\lambda t}\,\frac{1}{|E(i\lambda)|^2}\,Z(d\lambda),$$

где $M|z(\Delta)|^2=m(\Delta)$, $m(\Delta)$ — мера Лебега на R^1.

Выясним, какие требования должны выполняться, чтобы $f(\lambda) = \frac{1}{|E(i\lambda)|^2}$, удовлетворяла условию регулярности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty.$$

Заметим, что $|E(i\lambda)|^2 = e^{2c\lambda^2} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)$. Очевидно, что для выполнения условия регулярности необходимо, чтобы $c=0$. Будем считать, что это требование далее везде выполнено.

Лемма 1. Для выполнения условия регулярности необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} < \infty$.

Доказательство. Перепишем условие регулярности в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty.$$

В силу монотонности частичной суммы ряда под знаком интеграла это условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}{1+\lambda^2}\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} I_k < \infty,$$

$$I_k = \frac{1}{|a_k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{\frac{1}{a_k^2}+u^2}\, du.$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{I_k}{\frac{1}{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{\frac{1}{a_k^2}+u^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\, du < \infty,$$

то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|}$ сходятся одновременно, что и доказывает лемму.

Далее будем полагать, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} < \infty$, т. е. условие регулярности выполняется. Отсюда следует, что процесс

$$\xi(t)=\int e^{i\lambda t}\frac{1}{E(i\lambda)}Z(d\lambda)$$

допускает представление

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}c(t-s)\widetilde{Z}(ds),$$

$$M|Z(\Delta)|^2=M|\widetilde{Z}(\Delta)|^2=m(\Delta),$$

где $m(\Delta)$ — мера Лебега.

При этом $c(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{E(i\lambda)}e^{-i\lambda t}d\lambda$, а стохастическая мера $\widetilde{Z}(\Delta)$ является преобразованием Фурье стохастической меры $Z(\Delta)$. Наилучший прогноз $\hat{\xi}(t+\tau)$ по наблюдаемому прошлому $-\infty<s\leqslant t$ запишется в виде

$$\hat{\xi}(t+\tau)=\int_{-\infty}^{t}c(t+\tau-s)\widetilde{Z}(ds).$$

Рассмотрим последовательность процессов

$$\xi_n(t)=\int e^{i\lambda t}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}Z(d\lambda)$$

со спектральными плотностями $f_n(\lambda)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}$. Эти процессы и их наилучшие линейные прогнозы также представим в виде

$$\xi_n(t)=\int_{-\infty}^{t}c_n(t-s)\widetilde{Z}(ds),$$

$$\hat{\xi}_n(t+\tau-s)=\int_{-\infty}^{t}c_n(t+\tau-s)\widetilde{Z}(ds).$$

Теперь поставим вопрос о среднеквадратичной сходимости прогнозов $\hat{\xi}_n$ к $\hat{\xi}$.

Теорема 1. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}<\infty$, то $\hat{\xi}_n(t+\tau)$ сходится к $\hat{\xi}(t+\tau)$ в среднеквадратичном.

Доказательство.

$$M|\hat{\xi}(t+\tau)-\hat{\xi}_n(t+\tau)|^2=\int\limits_{-\infty}^{t}|c(t+\tau-s)-c_n(t+\tau-s)|^2\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|c(t+\tau-s)-c_n(t+\tau-s)|^2\,ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)}\right|^2 d\lambda.$$

Последнее равенство следует из равенства Парсеваля. Обозначим последний интеграл через δ_n^2 и оценим его:

$$\delta_n^2=\int\limits_{A}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{-A}+\int\limits_{-A}^{A},$$

где Aтаково, что $\int\limits_{A}^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{a^2}}<\frac{\varepsilon}{8}$ для произвольного $\varepsilon>0$. Тогда

$$\int\limits_{A}^{\infty}\leqslant\int\limits_{A}^{\infty}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}\left(\frac{1}{\left|\prod\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)\right|}+1\right)^2 d\lambda<$$

$$<4\int\limits_{A}^{\infty}\frac{d\lambda}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}<4\int\limits_{A}^{\infty}\frac{d\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{a_1^2}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{-A}<\frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$\left|\int\limits_{A}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{-A}\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

для любого n.

Теперь оценим интеграл $\int\limits_{-A}^{A}$. Выберем N таким, чтобы $|a_n|>A+1$ при $n\geqslant N$. Если $|\lambda|\leqslant A$, и $n\geqslant N$, то $\left|\frac{i\lambda}{a_n}\right|<1$ и функция $\ln\left(1-\frac{i\lambda}{a_n}\right)$ является аналитической в круге $|z|\leqslant A$.

Заметим, что

$$\left|\ln\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)\right|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left|\frac{\lambda}{a_k}\right|^m<$$

$$<\frac{\left|\frac{\lambda}{a_k}\right|}{1-\left|\frac{\lambda}{a_k}\right|}<\frac{1}{|a_k|}\frac{A}{1-\frac{A}{A+1}}=C\frac{1}{|a_k|}.$$

Рассмотрим $g_n(i\lambda)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\ln\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)$. Ряд, составленный из модулей членов последнего ряда, мажорируется сходящимся рядом $C\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}$. Следовательно, $g_n(i\lambda)$ аналитична в круге $|z|\leqslant A$, и при $n\geqslant N$ допустимо представление $\prod\limits_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)=e^{g_n(i\lambda)}$.

Заметим, что $|g_n(i\lambda)|<C\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}$, поэтому $g_n(i\lambda)\to 0$ при $n\to\infty$;

$$\int_{-A}^{A}\leqslant\int_{-A}^{A}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}|e^{g_n(i\lambda)}-1|^2\,d\lambda=$$

$$=\int_{-A}^{A}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}\left|g_n(i\lambda)+\frac{g_n^2(i\lambda)}{2!}+\ldots\right|^2 d\lambda.$$

Теперь можно найти такое $N_1\geqslant N$, что при $n>N_1$ выполняется неравенство

$$\left|g_n(i\lambda)+\frac{g_n^2(i\lambda)}{2!}+\ldots\right|^2<|g_n(i\lambda)|.$$

Тогда

$$\left|\int_{-A}^{A}\right|<\int_{-A}^{A}\frac{|g_n(i\lambda)|}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}d\lambda<$$

$$<C\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}.$$

Следовательно, $\left|\int\limits_{-A}^{A}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Суммируя этот результат с (1), находим $\delta_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Ответ на вопрос о сходимости $\hat{\xi}_n$ к $\hat{\xi}$ почти для всех траекторий процесса дается следующей теоремой.

Теорема 2. Если существует такое $\sigma > 0$, что $\frac{1}{|a_k|} = O\left(k^{-\frac{3}{2}-\sigma}\right)$, то последовательность прогнозов $\hat{\xi}_n$ сходится к прогнозу $\hat{\xi}$ с вероятностью 1.

Доказательство.

$$\delta_n^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{i\lambda}{a_k}\right)} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{i\lambda}{a_k}\right)} \right|^2 d\lambda.$$

Выберем ε так, чтобы $0 < \varepsilon < \sigma$. Пусть

$$\delta_n^2 = \int\limits_{-n^\varepsilon}^{n^\varepsilon} + \left(\int\limits_{-\infty}^{-n^\varepsilon} + \int\limits_{n^\varepsilon}^{\infty}\right) = \delta_n^{2(2)} + \delta_n^{2(1)}.$$

Сначала оценим величину $\delta^{2(1)}$. Выберем натуральное N_1 так, чтобы $(N_1 - 1)\varepsilon > 1$. Пусть также $\tilde{a} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N_1} \{|a_i|\}$. Тогда при $n > N_1$

$$\delta_n^{2(1)} = \int\limits_{-\infty}^{-n^\varepsilon} + \int\limits_{n^\varepsilon}^{\infty} < 2\int\limits_{n^\varepsilon}^{\infty}\left(\frac{1}{\left|\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{i\lambda}{a_k}\right)\right|} + \frac{1}{\left|\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{i\lambda}{a_k}\right)\right|}\right)^2 d\lambda <$$

$$< 8\int\limits_{n^\varepsilon}^{\infty} \frac{d\lambda}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)} \leqslant 8\int\limits_{n^\varepsilon}^{\infty} \frac{d\lambda}{\prod\limits_{k=1}^{N_1}\left(1 + \frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)} \leqslant 8\int\limits_{n^\varepsilon}^{\infty} \frac{d\lambda}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{\tilde{a}^2}\right)^{N_1}} <$$

$$< 4\int\limits_{n^\varepsilon}^{\infty} \frac{2\lambda\, d\lambda}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{\tilde{a}^2}\right)^{N_1}} = 4\,\frac{\tilde{a}^{2N_1}}{N_1 - 1}\,\frac{1}{n^{2\varepsilon(N_1-1)}} < C_1\,\frac{1}{n^2}.$$

Следовательно, при $n \geqslant N_1$

$$\delta_n^{2(1)} < C_1 \cdot \frac{1}{n^2}. \tag{2}$$

Теперь оценим величину $\delta_n^{2(2)}$. Сначала проверим возможность представления в круге $|z| \leqslant n^\varepsilon$ бесконечного произведения $\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$ в виде $e^{g_n(z)}$, где $g_n(z)$ — функция, аналитическая в этом круге,

$$g_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right).$$

Так как по условию теоремы $\frac{1}{|a_k|}=O\left(k^{-\frac{3}{2}-\sigma}\right)$, то можно найти такое $N_2 \geqslant N_1$, что при $k>n\geqslant N_2$ и $|z|\leqslant n^\varepsilon$ одновременно выполняются два неравенства

$$\left|\frac{z}{a_k}\right|<C_2\frac{n^\varepsilon}{k^{3/2+\sigma}},\qquad \left|\frac{z}{a_k}\right|<\frac{1}{2}.$$

При $k>n\geqslant N_2$ все функции $\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$ аналитичны в кругах $|z|\leqslant n^\varepsilon$. Кроме того,

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left|\frac{z}{a_k}\right|^j<$$

$$<\frac{\left|\frac{z}{a_k}\right|}{1-\left|\frac{z}{a_k}\right|}<2\left|\frac{z}{a_k}\right|<2C_2\frac{n^\varepsilon}{k^{3/2+\sigma}}.$$

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\right|$ мажорируется сходящимся числовым рядом, откуда следует аналитичность функции $g_n(z)$, значит, и возможность представления

$$\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)=e^{g_n(z)}$$

в круге $|z|\leqslant n^\varepsilon$ при $n\geqslant N_2$.

Запишем $g_n(i\lambda)$ в виде

$$g_n(i\lambda)=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[i\left(\frac{\lambda}{a_k}-\frac{1}{3}\frac{\lambda^3}{a_k^3}+\ldots\right)+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{a_k^2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda^4}{a_k^4}-\ldots\right)\right].$$

$$|g_n(i\lambda)|^2 < \left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\lambda}{a_k}\right|\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right]^2 <$$

$$< \frac{5}{4}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\lambda}{a_k}\right|\right]^2 < \frac{5}{4}C_2^2\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^{\varepsilon}}{k^{3/2+\sigma}}\right]^2 <$$

$$< \frac{5}{4}C_2^2\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2+\sigma-\varepsilon}}\right]^2 = \frac{5}{4}C_2^2(\Delta_n)^2,$$

где $\Delta_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2+\alpha}}$, $\alpha = \sigma - \varepsilon > 0$.

Покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n^2 < \infty$;

$$\Delta_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2+\alpha}} < \int_n^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2+\alpha}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\alpha}\cdot\frac{1}{n^{1/2+\alpha}},$$

следовательно, $\Delta_n^2 < \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\alpha}\right)^2\frac{1}{n^{1+2\alpha}}$, откуда следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n^2 < \infty$.

Выберем $N_3 \geqslant N_2$ так, чтобы при $n > N_3$ для $|\lambda| < n^{\varepsilon}$ выполнялось неравенство

$$\left|g_n(i\lambda) + \frac{g_n^2(i\lambda)}{2!} + \frac{g_n^3(i\lambda)}{3!} + \ldots\right| < 2|g_n(i\lambda)|.$$

Тогда

$$\delta_n^{2(2)} = \int_{-n^{\varepsilon}}^{n^{\varepsilon}}\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{i\lambda}{a_k}\right)}\right|^2 d\lambda =$$

$$= \int_{-n^{\varepsilon}}^{n^{\varepsilon}}\frac{|e^{g_n(i\lambda)}-1|^2}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}d\lambda = \int_{-n^{\varepsilon}}^{n^{\varepsilon}}\left|g_n(i\lambda) + \frac{g_n^2(i\lambda)}{2!} + \ldots\right|^2 \times$$

$$\times \frac{d\lambda}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)} < 4\int_{-n^\varepsilon}^{n^\varepsilon} \frac{|g_n(i\lambda)|^2}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)} d\lambda <$$

$$< 4C_3\Delta_n^2 \int_{-n^\varepsilon}^{n^\varepsilon} \frac{d\lambda}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}.$$

Следовательно, при $n > N_3$ $\delta^{2(2)} < C_4\Delta_n^2$. Суммируя этот результат с (2), получаем

$$\sum_{n=N_3}^{\infty} \delta_n^{2(1)} + \delta_n^{2(2)} = \sum_{n=N_3}^{\infty} \delta_n^2 < \infty,$$

$$\delta_n^2 > M\,|\,\hat{\xi}_n - \hat{\xi}\,|^2.$$

Следовательно, сходимость прогнозов $\hat{\xi}_n$ к $\hat{\xi}$ такова, что $\sum_{n=N_3}^{\infty} M\,|\,\hat{\xi}_n - \hat{\xi}\,|^2 < \infty$. Используя лемму Бореля — Кантелли, можно легко показать, что отсюда следует

$$P\{\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_n = \hat{\xi}\} = 1.$$

Теорема доказана.

1. *Хиршман И. И., Уиддер Д. В.* Преобразования типа свертки. М., 1958.

Поступила в редколлегию 14.04.80

УДК 519.21

А. ХАЛИЛОВ, асп., Ташкентский университет

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. Пусть $\xi(t)$ — вещественное измеримое непрерывное в среднем квадратическом случайное поле с непрерывным временем $t \in R^n$ и со средним, равным нулю (R^n — n-мерное евклидово пространство). Предположим, что для любого $k \in \{1, 2, \ldots\}$ случайное поле $\xi(t)$ имеет абсолютный момент k-го порядка.

Пусть $\{V^\lambda;\ \lambda \in I = [0, \infty)\}$ — семейство ограниченных измеримых по Лебегу подмножеств R^n, такое что $|V_\lambda| \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Здесь и далее V_λ обозначает объем множества V_λ .