$$\times \frac{d\lambda}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)} < 4\int_{-n^\varepsilon}^{n^\varepsilon} \frac{|g_n(i\lambda)|^2}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)} d\lambda <$$

$$< 4C_3\Delta_n^2 \int_{-n^\varepsilon}^{n^\varepsilon} \frac{d\lambda}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2}{a_k^2}\right)}.$$

Следовательно, при $n > N_3$ $\delta^{2(2)} < C_4\Delta_n^2$. Суммируя этот результат с (2), получаем

$$\sum_{n=N_3}^{\infty} \delta_n^{2(1)} + \delta_n^{2(2)} = \sum_{n=N_3}^{\infty} \delta_n^2 < \infty,$$

$$\delta_n^2 > M\,|\,\hat{\xi}_n - \hat{\xi}\,|^2.$$

Следовательно, сходимость прогнозов $\hat{\xi}_n$ к $\hat{\xi}$ такова, что $\sum_{n=N_3}^{\infty} M\,|\,\hat{\xi}_n - \hat{\xi}\,|^2 < \infty$. Используя лемму Бореля — Кантелли, можно легко показать, что отсюда следует

$$P\{\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_n = \hat{\xi}\} = 1.$$

Теорема доказана.

1. *Хиршман И. И., Уиддер Д. В.* Преобразования типа свертки. М., 1958.

Поступила в редколлегию 14.04.80

УДК 519.21

А. ХАЛИЛОВ, асп., Ташкентский университет

## ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. Пусть $\xi(t)$ — вещественное измеримое непрерывное в среднем квадратическом случайное поле с непрерывным временем $t \in R^n$ и со средним, равным нулю ($R^n$ — $n$-мерное евклидово пространство). Предположим, что для любого $k \in \{1, 2, \ldots\}$ случайное поле $\xi(t)$ имеет абсолютный момент $k$-го порядка.

Пусть $\{V^\lambda;\ \lambda \in I = [0, \infty)\}$ — семейство ограниченных измеримых по Лебегу подмножеств $R^n$, такое что $|V_\lambda| \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Здесь и далее $V_\lambda$ обозначает объем множества $V_\lambda$ .

Рассмотрим асимптотическое поведение распределения случайного процесса $\eta(\lambda)$ с непрерывным временем $\lambda \in \mathrm{I}$,

$$\eta(\lambda) = \int\limits_{V_\lambda} \xi(t)\, dt.$$

Считаем, что для случайного поля $\xi(t)$ выполнена центральная предельная теорема (ц. п. т.) относительно семейства множеств $\{V_\lambda;\ \lambda \in \mathrm{I}\}$, если при $\lambda \to \infty$ для каждого $x \in R$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\{\eta(\lambda)\,\sigma_\lambda^{-1} < x\} = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-z^2/2)\, dz,$$

где $\sigma_\lambda^2 = D\eta(\lambda)$.

Различные условия, обеспечивающие выполнение ц. п. т. для случайных полей, получены многими авторами (см., например, [1—3]).

Пусть $\{t_1, \ldots, t_k\}$ и $\{t_{k+1}, \ldots, t_m\}$ — конечные подмножества $R^n$, положим $\rho(t_1, \ldots, t_k;\ t_{k+1}, t_m) = \min\limits_{1\leqslant p\leqslant k,\, k<q\leqslant m} \rho(t_p, t_q)$, где $\rho(t_p, t_q)$ — евклидово расстояние между точками $t_p$ и $t_q$. Для произвольного набора точек $t_1, \ldots, t_m$ пространства $R^n$ определим функцию $d(t_1, \ldots, t_m)$ следующим образом: $d(t_1, \ldots t_m) = \max \rho(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k};\ t_{i_{k+1}}, \ldots, t_{i_m})$, где максимум берется по всем перестановкам $i_1, \ldots i_m$ индексов $1, 2, \ldots, m$ и $1 \leqslant k < m$.

Обозначим через $U_{t_1,\ldots,t_p}$ наименьшую $\sigma$-алгебру, порожденную случайными величинами $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_p)$.

Случайное поле $\xi(t)$ считаем удовлетворяющим условию сильного перемешивания, если при $\tau \to \infty$

$$\alpha_m(\tau) = \sup_{t_j\in R^n,\, j=1,\ldots,m,\, \rho(t_1,\ldots,t_k;t_{k+1},\ldots,t_m)\geqslant\tau} \alpha(t_1, \ldots, t_k;\ t_{k+1}, \ldots, t_m) \to 0,$$

где

$$\alpha(t_1, \ldots, t_k;\ t_{k+1}, \ldots, t_m) = \sup_{A\in U_{t_1,\ldots t_k},\, B\in U_{t_{k+1},\ldots,t_m}} |P(AB) - P(A)\,P(B)|.$$

Отметим, что различные условия перемешивания для случайных полей и соответствующие ц. п. т. приведены в работах [4 — 9].

Введем обозначения

$$S_m(t_1, \ldots, t_m) = i^{-m} \frac{\partial^m}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} \ln M \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} x_j \xi(t_j) \right\} \Bigg|_{x_1=\ldots=x_m=0},$$

$$j_{m,\lambda}(\tau) = \sup_{t_j\in V_\lambda,\, j=1,\ldots,m,\, d(t_1,\ldots,t_m)\geqslant\tau} |S_m(t_1, \ldots, t_m)|,$$

$$\hat{j}_m(\tau) = \sup_{t_j\in R^n,\, j=1,\ldots,m,\, d(t_1,\ldots,t_m)\geqslant\tau},\quad V_\lambda^m = V_\lambda \times \ldots \times V_\lambda.$$

II. Ниже приводятся некоторые условия, обеспечивающие выполнение ц. п. т. для случайных полей. Эти условия выражены в терминах семиинвариантов (теоремы 1, 2, 4) или скорости убывания коэффициента перемешивания (теоремы 3, 5) случайного поля.

Введем следующие условия:

А) $\sup_{t \in V_\lambda} M |\xi(t)|^\nu = C_{\nu,\lambda} < \infty$, $\lambda \in I$, $\nu = 1, 2, \ldots$;

Б) для любых натуральных $m$ и $q$ существуют ограниченное положительное число $C(m, q)$ и натуральное число $p$, для которых имеет место неравенство $\tau^q j_{m,\lambda}(\tau) \leqslant C(m, q)\, C_{pm,\lambda}^{1/p}$;

В) $C_{m,\lambda} \sigma_\lambda^{-m} |V_\lambda|^{1+\varepsilon} \to 0$ при $\lambda \to \infty$ для любых натуральных $m \geqslant 3$ и некоторого $\varepsilon > 0$.

**Теорема 1.** Если выполняется условие А) и при $\lambda \to \infty$

$$\sigma_\lambda^{-m} \int_{V_\lambda^m} S_m(t_1, \ldots, t_m)\, dt_1 \ldots dt_m \to 0$$

для всех натуральных $m \geqslant 3$, то для случайного поля $\xi(t)$ имеет место ц. п. т.

**Теорема 2.** Если выполнены условия $A$)—$B$), то для случайного поля $\xi(t)$ имеет место ц. п. т.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия $A$), $B$) и условие: $Г$) $\alpha_m(\tau) = O(\tau^{-q})$ при $\tau \to \infty$ для всех натуральных $m$ и $q$. Тогда для случайного поля $\xi(t)$ справедлива ц. п. т.

**Теорема 4.** Если выполнены условия

А′) $\sup_{t \in R^n} M |\xi(t)|^\nu = C_\nu < \infty$, $\nu = 1, 2, \ldots$,

Б′) при $\tau \to \infty$ $j_m(\tau) = O(\tau^{-q})$ для всех натуральных $m$ и $q$,

В′) при $\lambda \to \infty$ $\sigma_\lambda^{-1} |V_\lambda|^\beta \to 0$ для некоторого $\beta > 1/3$, то для случайного поля $\xi(t)$ имеет место ц. п. т.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия $A'$), $B'$) и условие $Г$). Тогда для случайного поля $\xi(t)$ справедлива ц. п. т.

Отметим, что в теореме 1 условия несколько ослаблены по сравнению с условиями теоремы 1 из работы [2]: требуется только, чтобы $|V_\lambda| \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, а семейство множеств $V_\lambda$ необязано образовать поток. Условие $A$) слабее, чем условие $\xi(t) \in T^{(\infty)}$ из работы [2].

Теорема 3 и теоремы 4, 5 являются аналогами результатов соответственно работ [8 и 6] для случайных полей с непрерывным временем.

III. Теорема 1 доказывается тем же методом, что и соответствующие утверждения из работ [1, 2].

Доказательство теоремы 2. Семиинварианты $m$-го порядка $S_m^{(\lambda)}$ случайной величины $\sigma_\lambda^{-1} \eta(\lambda)$ имеют вид

$$S_m^{(\lambda)} = \sigma_\lambda^{-m} \int_{V_\lambda^m} S_m(t_1, \ldots, t_m)\, dt_1 \ldots dt_m, \tag{1}$$

где $m \geqslant 1$ и для любых $t_j \in V_\lambda$, $j=1, \dots, m$ справедливо соотношение [6]

$$|S_m(t_1, \dots, t_m)| \leqslant C_{m,\lambda} m^m. \tag{2}$$

Представим правую часть (1) в виде

$$S_m^{(\lambda)} = \sigma_\lambda^{-m} \int\limits_{V_\lambda^{(1)}} S_m(t_1, \dots, t_m)\, dt_1 \dots dt_m + \sigma_\lambda^{-m} \int\limits_{V_\lambda^{(2)}} S_m(t_1, \dots, t_m)\, dt_1 \dots dt_m,$$

где

$$V_\lambda^{(1)} = \{(t_1, \dots, t_m);\ (t_1, \dots, t_m) \in V_\lambda^m,\ d(t_1, \dots, t_m) < L\},$$

$$V_\lambda^{(2)} = V_\lambda^m \setminus V_\lambda^{(1)},\ L \geqslant 1.$$

Отсюда в силу (2) и определения $j_{m,\lambda}(\tau)$, оценивая сверху $|V_\lambda^{(1)}|$ и $|V_\lambda^{(2)}|$, находим

$$|S_m^{(\lambda)}| \leqslant |V_\lambda| \sigma_\lambda^{-m} C_{m,\lambda} m^m (mL)^{n(m-1)} \pi^{n(m-1)/2} \Gamma_{(n/2+1)}^{-(m-1)} + \\ + \sigma_\lambda^{-m} |V_\lambda| j_{m,\lambda}(L). \tag{3}$$

Пусть $L = |V_\lambda|^\delta$, где $0 < \delta < \varepsilon / n(m-1)$. Учитывая (3), получаем

$$|S_m^{(\lambda)}| \leqslant \sigma_\lambda^{-m} C_{m,\lambda} |V_\lambda|^{1+\varepsilon} \pi^{n(m-1)/2} \Gamma_{(n/2+1)}^{-(m-1)} m^{m+n(m-1)} + \\ + \sigma_\lambda^{-m} (|V_\lambda|^\delta)^{[m/\delta]+1} j_{m,\lambda}(|V_\lambda|^\delta).$$

Из последнего неравенства, условий Б) и В) следует, что $S_m^{(\lambda)} \to 0$ при $\lambda \to \infty$ для всех натуральных $m \geqslant 3$. Отсюда в силу условия А) и теоремы 1 вытекает утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 основывается на следующей лемме.

**Лемма.** Пусть $\tau = \rho(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m) > 0$, где $t_j \in V_\lambda$, $j = 1, 2, \dots, m$. Если при некотором $k > 2$

$$\sup_{t \in V_\lambda} M |\xi(t)|^{km} = C_{km,\lambda} < \infty,$$

то

$$|S_m(t_1, \dots, t_m)| \leqslant 10 m^m \alpha_m^{1-2/k}(\tau)\, C_{km,\lambda}^{1/k}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 из работы [6]. При помощи леммы можно показать, что из условия Г) теоремы 3 вытекает справедливость условия Б) теоремы 2. Поэтому теорема 3 является следствием теоремы 2.

Теоремы 4 и 5 непосредственно вытекают из теоремы 2.

1. *Леонов В. П.* Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных процессов. М., 1964. 2. *Леоненко Н. Н.* О центральной предельной теореме для некоторых классов случайных полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1976, вып. 15. 3. *Леоненко Н. Н.* Центральная предельная теорема для одного класса случайных полей.— ДАН УССР Сер. А,

1978, № 2. 4. *Леоненко Н. Н., Ядренко М. И.* Предельные теоремы для однородных и изотропных случайных полей.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1979, вып. 21. 5. *Леоненко Н. Н.* Предельные теоремы для аддитивных случайных функций.— В кн.: Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1976. 6. *Булинский А. В., Журбенко И. Г.* Центральная предельная теорема для случайных полей.— ДАН УССР, 1976, **226**, № 1. 7. *Булинский А. В., Журбенко И. Г.* Центральная предельная теорема для аддитивных случайных функций.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, **21**, вып. 4. 8. *Булинский А. В.* О центральной предельной теореме для случайных полей.— Тезисы II Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, 1977, т. 2. 9. *Добрушин Р. Л.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.— Теория вероятностей и ее применения, 1968, **13**, вып. 2.

Поступила в редколлегию 22.04.80